PARTIE I : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS UN CAS PARTICULIER

I.1. Calculons le déterminant dans la base (i,j) des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées dans (i,j) le couple $(0,1)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(\alpha, \frac{1}{2})$. Alors

$$\det_{(i,j)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\alpha$$

Par hypothèse, $\alpha \neq 0$, on peut donc en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, et par conséquent, les points A, B, C sont non alignés.

I.2 .

I.2.a. Par définition de $p_{a,b}$ pour tout point M de coordonnées (x,y), $p_{a,b}(M)$ est le point de coordonnées $(x, ax+b)$. On en déduit aussitôt que le vecteur $\overrightarrow{Ap_{a,b}(A)}$ a pour coordonnées $(0,-b)$, le vecteur $\overrightarrow{Bp_{a,b}(B)}$ a pour coordonnées $(0, 1-b)$ et le vecteur $\overrightarrow{Cp_{a,b}(C)}$ a pour coordonnées $(0, \frac{1}{2} - (a\alpha + b))$. Finalement, on peut conclure

$$f_0(a,b) = b^2 + (b-1)^2 + \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2$$

I.2.b. Comme de plus, $b^2 + (b-1)^2 = 2b^2 - 2b + 1 = 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ (c'est la mise sous forme canonique), on peut aussi écrire

$$f_0(a,b) = \left(a\alpha + b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

I.2.c. Écrit sous la forme précédente (somme de carrés), on remarque que pour tout couple (a,b), $f_0(a,b) \geq \frac{1}{2}$ avec égalité si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} a\alpha + b - \frac{1}{2} = 0 \\ b - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right.$, système équivalent à $(a,b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ puisque $\alpha \neq 0$, ce qui montre que f_0 atteint son minimum en un couple unique $(a_0, b_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. La droite $\mathcal{D}_0$ a alors pour équation $y = 0x + \frac{1}{2}$ soit $y = \frac{1}{2}$.

I.3 .

I.3.a. De la même façon, pour tout point M de coordonnées (x,y), $p'_{a,b}(M)$ est le point de coordonnées $(ay+b, y)$, ce qui donne

$$f_1(a,b) = b^2 + (a+b)^2 + \left(\frac{a}{2} + b - \alpha\right)^2$$

I.3.b. En développant $f_1(a,b) = \frac{5}{4}a^2 + 3b^2 + 3ab - 2b\alpha - a\alpha$, mais aussi $3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2 = \frac{5}{4}a^2 + 3b^2 + 3ab - 2b\alpha - a\alpha$, d'où l'expression de f_1 comme somme de carrés :

$$f_1(a,b) = 3\left(\frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}\alpha^2$$

I.3.c. Pour tout couple (a,b), $f_1(a,b) \geq \frac{2}{3}\alpha^2$, avec égalité si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{2} + b - \frac{\alpha}{3} = 0 \\ a = 0 \end{array}\right.$. Ce qui montre que f_1 atteint son minimum $\frac{2}{3}\alpha^2$ en l'unique couple $(a_1, b_1) = \left(0, \frac{\alpha}{3}\right)$. La droite $\mathcal{D}_1$ a alors pour équation $x = 0y + \frac{\alpha}{3}$ soit $x = \frac{\alpha}{3}$.

I.4. La droite $\mathcal{D}_0$ a pour vecteur directeur $(1,0)$ et la droite $\mathcal{D}_1$ a pour vecteur directeur $(0,1)$ donc $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ sont orthogonales ; de plus elles se coupent en un unique point $M\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{2}\right)$. L'isobarycentre des points A, B, C est le point de coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Donc le point d'intersection de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ est l'isobarycentre des points A, B, C.

PARTIE II : RÉSULTATS SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

II.1. $F^\perp = \{x \in E,\ \forall a \in F, \quad (x|a) = 0\}$
Dans le cas général, $F \cap F^\perp = \{0\}$, et dans le cas où E est de dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$ (en fait, ici, F est supposé de dimension finie, donc $F \oplus F^\perp = E$, même si E est de dimension infinie).

II.2. Soit x vecteur quelconque de E et $y = p_F(x)$. y est l'unique vecteur de E vérifiant $\left\{\begin{array}{l} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{array}\right.$ Par suite, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\forall z \in F, \quad \|x - z\|^2 = ||\underbrace{(x-y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{(y-z)}_{\in F}||^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$$

On en déduit donc que l'application $d : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & \|x-z\|^2 \end{array} \right.$ est minorée par $\|x-y\|^2$ et ce minorant est atteint pour l'unique vecteur $z = y = p_F(x)$. Donc $\inf_{z\in F} \|x-z\|$ est bien défini et est atteint par l'unique vecteur de F, défini par $z = p_F(x)$.

II.3 .

I.3.a. Produit subordonné

– Soit $(x,y) \in E^2$ comme $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $y - p_F(y) \in F^\perp$, d'après l'assertion (iv)

$$(x - p_F(x)|y - p_F(y)) = (x - p_F(x)|y - p_F(y))_F$$

D'autre part, le produit subordonné étant linéaire par rapport à la deuxième variable (assertion (i)) et symétrique (assertion (ii)), il est aussi linéaire par rapport à la première variable et donc finalement, il est bilinéaire, d'où

$$(x - p_F(x)|y - p_F(y))_F = (x|y)_F - (x|p_F(y))_F - (p_F(x)|y)_F + (p_F(x)|p_F(y))_F$$

Mais par symétrie et d'après l'assertion (iii), dès que l'un des vecteurs est dans F, le produit subordonné est nul, or $p_F(x), p_F(y)$ sont des vecteurs de F donc les trois derniers produits subordonnés sont nuls, d'où finalement

$$(x - p_F(x)|y - p_F(y)) = (x|y)_F$$

– Soit $x \in E$, d'après le point précédent,

$$(x|x)_F = (x - p_F(x)|x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 = d^2(x,F)$$

– Cette dernière égalité permet d'affirmer $\forall x \in E, \quad (x|x)_F \geq 0$ (carré d'un nombre réel).

– Et également, $(x|x)_F = 0$ si et seulement si, $d(x,F) = 0$ ce qui équivaut encore à $x \in F$.

II.3.b. On a montré à la question précédente que si $(.|.)_F$ existe, alors

$$\forall x,y \in E, \quad (x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y))$$

Ce qui montre que si il existe un produit subordonné alors celui-ci est unique. Réciproquement, posons $\varphi_F : \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x - p_F(x)|y - p_F(y)) \end{array} \right.$.

(i) par linéarité de $\mathrm{id}_E - p_F$ et linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, φ_F est linéaire par rapport à la deuxième variable.

(ii) Par symétrie du produit scalaire, φ_F est symétrique.

(iii) Soit $x \in E$ et $y \in F$, alors $y = p_F(y)$, donc $\varphi_F(x,y) = (x - p_F(x)|0) = 0$.

(iv) Soit $(x,y) \in F^\perp \times F^\perp$, alors $p_F(x) = p_F(y) = 0$, donc $(x|y)_F = (x - p_F(x)|y - p_F(y)) = (x|y)$.

Les assertions (i), (ii), (iii), (iv) sont vérifiées par φ_F d'où φ_F est un produit subordonné. Finalement, on a vérifié l'existence et l'unicité d'un produit subordonné.

II.4. Soit $(x,y) \in E^2$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec le "vrai" produit scalaire)

$$((x|y)_F)^2 = (x - p_F(x)|y - p_F(y))^2 \leq \|x - p_F(x)\|^2 \|y - p_F(y)\|^2$$

Mais $\|x - p_F(x)\| = (x|x)_F$ et $\|y - p_F(y)\| = (y|y)_F$ d'après II.3.a. donc

$$|(x|y)_F| \leq \|x\|_F \|y\|_F$$

De plus, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement siles vecteurs sont colinéaires, donc il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si$x - p_F(x)$ et $y - p_F(y)$ sont colinéaires.

II.5 .

II.5.a. Par hypothèse $E \neq \{0\}$, donc il existe un vecteur $x \neq 0$, on peut alors considérer $u = \frac{1}{\|x\|}x$;ainsi $\|u\| = 1$. Autrement dit, dans tout espace préhilbertien réel non réduit à $\{0\}$, il existe au moins un vecteur normé.

II.5.b. Rappelons un résultat du cours : soit F un sous-espace de dimension finie de base orthonormée $(f_1, ..., f_p)$, soit x un vecteur quelconque de E, alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|f_k) f_k$.
Ici, u est un vecteur normé, donc c'est une base orthonormée de la droite vectorielle D dirigée par u. Le résultat rappelé s'écrit donc ici

$$\forall x \in E, \quad p_D(x) = (x|u)u$$

II.5.c. Soit $x, y \in E$, comme $(x|u) = m_x$, on peut aussi écrire $p_D(x) = m_x u$, alors d'après II.3.a. $\sigma_x = \|x\|_D = \|x - p_D(x)\| = \|x - m_x u\|$,
Toujours d'après II.3.a., $\mathrm{cov}(x, y) = (x|y)_D = (x - p_D(x)|y - p_D(y))$, mais avec $p_D(x) = m_x u$ et $p_D(y) = m_y u$, il vient $\mathrm{cov}(x, y) = (x - m_x u|y - m_y u)$, puis par bilinéarité du produit scalaire

$$\mathrm{cov}(x, y) = (x|y) - m_y \underbrace{(x|u)}_{m_x} - m_x \underbrace{(u|y)}_{m_y} + m_x m_y \underbrace{(u|u)}_{1} = (x|y) - m_x m_y$$

II.6. Comme une norme est une application à valeurs positives, l'égalité $\sigma_x = \|x - m_x u\|$, montre que $\sigma_x \geq 0$ et de plus d'après l'axiome de séparation de la norme $\|x - m_x u\| = 0$ si et seulement si$x = m_x u$, or (x, y, u) est libre par hypothèse, donc x n'est pas colinéaire à u, par conséquent $x - m_x u \neq 0$ et donc $\sigma_x \neq 0$, d'où $\sigma_x > 0$, et pour les mêmes raisons, $\sigma_y > 0$. En particulier, le réel ρ est donc toujours défini.

II.7 .

II.7.a. Par bilinéarité du produit scalaire

$$m_{x^*} = (x^*|u) = \left(\frac{x - m_x u}{\sigma_x}|u\right) = \frac{1}{\sigma_x}[\underbrace{(x|u)}_{m_x} - m_x \underbrace{(u|u)}_{1}] = 0$$

Et on en déduit

$$\sigma_{x^*} = \|x^* - m_{x^*} u\| = \|x^*\| = \frac{\|x - m_x u\|}{\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{\sigma_x} = 1$$

D'après II.4.

$$|(x|y)_D| \leq \|x\|_D \|y\|_D = \sigma_x \sigma_y$$

avec égalité si et seulement si$x - p_D(x)$ et $y - p_D(y)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si$x - m_x u$ et $y - m_y u$ sont colinéaires. Mais si ces vecteurs sont colinéaires, alors il existe deux réels α, β non tous deux nuls tels que $\alpha(x - m_x u) + \beta(y - m_y u) = 0$, ce qui donne $\alpha x + \beta y + (-\alpha m_x - \beta m_y)u = 0$, mais (u, x, y) étant libres, cela impose $\alpha = \beta = (-\alpha m_x - \beta m_y) = 0$. On a mis en évidence une contradiction, d'où $x - m_x u$ et $y - m_y u$ ne sont pas colinéaires et par conséquent l'inégalité précédente est stricte, comme de plus on a montré que $\sigma_x \sigma_y > 0$ à la question précédente, on peut simplifier l'inégalité par $\sigma_x \sigma_y$, ce qui donne

$$|\rho| < 1$$

ce qui est l'encadrement demandé.

II.7.b. D'après a. $(u|x^*) = m_{x^*} = 0$ et $\|x^*\| = \sigma_{x^*} = 1$, enfin on a choisi u normé, donc (u, x^*) est une famille orthonormée formée de deux vecteurs qui sont chacun combinaison linéaire de (x, u), famille génératrice du plan F, d'où (u, x^*) est une base orthonormée de F

II.7.c. Par définition de $\mathrm{vect}(u, x)$, $F = \{ax + bu,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, or on a montré en II.2. que $\inf_{z \in F} \|y - z\|$ est défini, vaut $d(y, F)$ et est atteint en l'unique vecteur $z = p_F(y)$, donc $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - ax - bu\|$ est défini, vaut $d(y, F)$ et est atteint en l'unique couple (a, b) tel que $ax + bu = p_F(y)$.

II.7.d. De plus, $d(y, F) = \|y\|_F = \|y - p_F(y)\|$, or (u, x^*) est une base orthonormée de F,
donc $p_F(y) = (y|u)u + (y|x^*)x^* = m_y u + (y|x^*)x^*$, d'où on peut aussi écrire

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - ax - bu\| = \|y - m_y u - (y|x^*)x^*\|$$

II.7.e. Soient $x, y \in E$, d'abord, $y^* - \rho x^* = \frac{y - m_y u}{\sigma_y} - \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} x^*$, donc par homogénéité de la norme

$$\sigma_y \|y^* - \rho x^*\| = \left\| y - m_y u - \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x} x^* \right\|$$

Ensuite, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x} &= \frac{1}{\sigma_x}((x|y) - m_x m_y) \\
&= \frac{1}{\sigma_x}((y|x) - m_x(y|u)) \\
&= (y|\frac{x - m_x u}{\sigma_x}) \\
&= (y|x^*)
\end{aligned}$$

Donc $\sigma_y \|y^* - \rho x^*\| = \|y - m_y u - (y|x^*)x^*\|$. Et finalement, d'après la question précédente

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - ax - bu\| = \sigma_y \|y^* - \rho x^*\|$$

II.7.f. On a expliqué que cette borne inférieure est atteinte pour (a,b) unique couple de réels tels que $ax+bu = p_F(y) = m_y u + (y|x^*)x^*$. (question II.7.d.) De plus,

$$\begin{aligned} m_y u + (y|x^*)x^* &= m_y u + (y|\frac{x-m_x u}{\sigma_x})\left(\frac{x-m_x u}{\sigma_x}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\left((x|y)-m_x m_y\right)x + \left(m_y - \frac{(x|y)-m_x m_y}{\sigma_x^2}m_x\right)u \\ &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho x + \left(m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho m_x\right)u \end{aligned}$$

Donc par liberté de la famille (x,u), on en déduit

$$(a_0,b_0) = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho, m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho m_x\right)$$

II.8. On en déduit aussitôt que $\mathcal{D}_0$ a pour équation $Y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho(X-m_x)+m_y$ ou encore de façon équivalente puisque $\sigma_y \neq 0$,

$$\frac{Y-m_y}{\sigma_y} = \rho\frac{X-m_x}{\sigma_x}$$

Attention ici, il faut bien avoir des notations distinctes pour les coordonnées (X,Y) des points du plan $\mathcal{P}$ et pour les vecteurs x,y de E.

II.9. En échangeant les rôles de x et y, on en déduit de même que $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|x-ay-bu\|$ est défini et que cette borne inférieure est atteinte pour

$$(a_1,b_1) = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho(y,x), m_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho(y,x)m_y\right)$$

Mais de plus, $\rho(y,x) = \frac{\mathrm{cov}(y,x)}{\sigma_y\sigma_x} = \rho$ par symétrie du produit scalaire, donc $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|x-ay-bu\|$ est atteinte pour

$$(a_1,b_1) = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho, m_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho m_y\right)$$

II.10. La droite $\mathcal{D}_1$ a pour équation $X = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho Y + m_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho m_y$ ou de manière équivalente

$$\frac{X-m_x}{\sigma_x} = \rho\frac{Y-m_y}{\sigma_y}$$

II.11. Un point M de coordonnées (α,β) dans $\mathcal{R}$ est dans l'intersection de $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_1$ si et seulement sile système suivant est vérifié

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\beta-m_y}{\sigma_y} = \rho\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x} \\ \frac{\alpha-m_x}{\sigma_x} = \rho\frac{\beta-m_y}{\sigma_y} \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} \frac{\beta-m_y}{\sigma_y} = \rho\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x} \\ \frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}(1-\rho^2) = 0 \end{array}\right.$ or on a montré que $\rho \in]-1,1[$ et en particulier $\rho^2 \neq 1$, d'où le système a pour unique solution $(\alpha,\beta) = (m_x,m_y)$. On a ainsi montré que $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1$ sont sécantes en un unique point M de coordonnées (m_x,m_y).

II.12. Les droites $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement sileurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux ce qui s'écrit $a_0+a_1=0$ condition équivalente à $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho + \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho = 0$; finalement, on peut conclure puisque $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}+\frac{\sigma_x}{\sigma_y} > 0$ que les droites $\mathcal{D}_0,\mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si$\rho = 0$ soit $(x|y) = m_x m_y$.

PARTIE III : BASE ADAPTÉE À UN PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE EUCLIDIEN

III.1. Notons $X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = M_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n (e_i|e_j)y_j$$

Mais en notant S la matrice de terme général $(e_i|e_j)$, la i-ème composante de SY est $b_i = \sum_{j=1}^n (e_i|e_j)y_j$ et donc ${}^tXSY$ est le scalaire $\sum_{i=1}^n x_i b_i = (x|y)$. Ainsi, $(x|y) =^t XSY$.

III.2 .

III.2.a. Par symétrie du produit scalaire, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(e_i|e_j) = (e_j|e_i)$, donc le terme (i,j) de S est égal au terme (j,i) de S, autrement dit, S est symétrique réelle. Or pour toute matrice symétrique réelle de taille n le spectre complexe est en fait inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit maintenant λ une valeur propre de S (donc $\lambda \in \mathbb{R}$) ; il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ tel que $MX = \lambda X$; soit $x \in E$ tel que $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, d'après la question précédente

$$(x|x) = {}^tXSX = \lambda\, {}^tXX$$

Comme $X \neq 0$, ${}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ et $(x|x) > 0$ (d'après le caractère défini du produit scalaire), d'où $\lambda = \frac{(x|x)}{{}^tXX} > 0$.
Finalement, le spectre complexe de S est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

III.2.b. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et S associée. S est diagonale si et seulement sichacun des produits scalaires $(e_i|e_j)$ pour $i \neq j$ est nul, donc si et seulement sila famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est orthogonale.

III.3. Rappelons que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (X_1, X_2) & \mapsto & {}^tX_1X_2 \end{array} \right.$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On suppose que pour toutes matrices colonnes X, Y, ${}^tXAY = {}^tXBY$, cette égalité équivaut à ${}^tX((A-B)Y) = 0$, donc en utilisant le produit scalaire rappelé pour toutes matrices colonnes X, Y, $\varphi(X, (A-B)Y) = 0$, mais alors $(A-B)Y$ est orthogonale à toute matrice colonne X, et on en déduit $(A-B)Y = 0$ et ceci est vrai pour toute matrice colonne Y, mais enfin, en passant aux endomorphismes canoniquement associés, ceci équivaut à $A - B = 0$ soit à $A = B$. D'où l'implication demandée.

III.4 .

III.4.a. Question de cours archi-classique dans les sujets de CCP ! ! ! $X = PX'$.

III.4.b. Là encore on est dans le grand classique de CCP...
Avec les notations proposées, soient X', Y' deux matrices colonnes quelconques et x, y vecteurs de E associés à X', Y' dans la base $\mathcal{B}'$, X, Y matrices colonnes associées à x, y dans la base $\mathcal{B}$.
D'une part $(x|y) = {}^tX'S'Y'$ et d'autre part

$$(x|y) = {}^tXSY = {}^t(PX')S(PY') = {}^tX'\, {}^tPSP\, Y'$$

D'où ${}^tX'S'Y' = {}^tX'\, {}^tPSP\, Y'$. Ceci étant vrai pour toutes matrices colonnes X', Y', il résulte de la question précédente que $S' = {}^tPSP$.

III.4.c. E_n étant un espace euclidien, il possède au moins une base orthonormée $\mathcal{B}'$, la matrice associée à une base orthonormée est I_n, et en particulier

$$\forall x, y \in E, \quad (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i' y_i'$$

en notant $(x_1', ..., x_n')$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$ et $(y_1', ..., y_n')$ celles de y.

III.4.d. Réciproquement, si $\mathcal{B}' = (e_1', ..., e_n')$ est une base vérifiant la propriété précédente, alors en prenant pour vecteurs x, y les vecteurs e_i', e_j', on obtient aussitôt $(e_i'|e_j') = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Donc la propriété est vérifiée si et seulement si$\mathcal{B}'$ est orthonormée. $\mathcal{B}'$ étant orthonormée, P' matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale si et seulement si$\mathcal{B}$ est orthogonale et comme une matrice est orthogonale si et seulement sison inverse l'est aussi, on en déduit que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale si et seulement si$\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

III.5. $d_1, ..., d_n$ étant n réels strictement positifs, considérons $\mathcal{B}'' = (e_1'', ..., e_n'')$ formée à partir d'une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1', ..., e_n')$ de la façon suivante : $e_i'' = \sqrt{d_i} e_i'$ pour tout i, $\mathcal{B}''$ est encore une base de E, et la matrice associée à $\mathcal{B}''$ est la matrice de terme général $(e_i''|e_j'') = \sqrt{d_i}\sqrt{d_j}(e_i'|e_j')$, donc la matrice associée à $\mathcal{B}''$ est $M_1 = \mathrm{Diag}(d_1, ..., d_n)$. Ainsi, M_1 est bien une matrice associée à une base de E_n.

III.6. .

III.6.a. $f_2(e_1 - e_2) = 0$ et $f(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$, donc 0 et 2 sont valeurs propres de f_2 et comme E_2 est de dimension 2, il n'y en a pas d'autre, donc $\mathrm{Sp}(f_2) = \{0, 2\}$.
De plus le sous-espace propre associé à 0 est $\mathbb{R}(e_1 - e_2)$ de base orthonormée $(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2))$ et le sous-espace propre associé à 2 est $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ de base orthonormée $(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2))$.

III.6.b. Si M_2 était une matrice associée à une base $\mathcal{B}_2$, alors d'après III.2.a. son spectre serait inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, ici 0 est valeur propre, donc par contraposée, M_2 n'est pas une matrice associée à une base de E_2.

III.7 .

III.7.a. En notant A_3 la matrice 3×3 dont tous les coefficients sont égaux à 1, M_3 s'écrit sous la forme $M_3 = 4I_3 - A_3$. Or A_3 admet 0 pour valeur propre d'ordre 2 (par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres associés à 0) et 3 pour valeur propre d'ordre 1 (par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 3), on en déduit que $f_3(e_1 - e_2) = 4(e_1 - e_2)$, $f_3(e_1 - e_3) = 4(e_1 - e_3)$ et $f_3(e_1 + e_2 + e_3) = (e_1 + e_2 + e_3)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f_3) = (1, 4, 4)$. Une base orthonormée du sous-espace propre associé à 1 est $(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3))$ et une base orthonormée du sous-espace propre associé à 4 est $(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3))$ (le dernier vecteur s'obtient par exemple comme produit vectoriel des vecteurs $\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$ puisqu'on sait que f_3 est diagonalisable en base orthonormée par symétrie de M_3)

III.7.b. Posons $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, P est l'inverse (donc aussi la transposée) de la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée de diagonalisation précédemment déterminée. D'après les formules de changement de bases $M_3 = {}^tPDP$ où $D = \mathrm{Diag}(1, 4, 4)$, posons alors $Q = \mathrm{Diag}(1, 2, 2)P$, il vient $M_3 = {}^tQQ$, où $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Donc M_3 est la matrice associée à la base $\mathcal{B}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}e_2 - \frac{4}{\sqrt{6}}e_3)$.

III.8. M_4 est une matrice symétrique réelle de trace nulle, elle possède donc quatre valeurs propres réelles comptées avec multiplicité et la somme de ces valeurs propres est 0, donc l'une au moins est négative ou nulle, donc M_4 n'a pas son spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc M_4 n'est pas une matrice associée à une base de E_4. remarque : si on veut vraiment déterminer le spectre de M_4, on peut déjà remarquer que la somme de chaque ligne de M_4 est 3, donc 3 est valeur propre (vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), puis effectuer l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ dans $\det(M_4 - \lambda I_4)$ qui permet de factoriser par $(3 - \lambda)$, on trouve alors $\mathrm{Sp}(M_4) = (-3, +3, -1, +1)$.

III.9 .

III.9.a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une famille adaptée. Alors par définition d'une famille adaptée, $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale formée de n vecteurs non nuls de E_n qui est un espace de dimension n, donc $(e_1, ..., e_n)$ est une base (orthogonale) de E_n.

III.9.b. Tout espace euclidien possède au moins une base orthonormée , donc E_n possède au moins une base orthonormée $(e'_1, ..., e'_n)$, posons alors $e_1 = \frac{e'_1}{\sqrt{n}}, ..., e_n = \frac{e'_n}{\sqrt{n}}$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ ainsi construite est une base adaptée de E_n, ce qui montre l'existence d'une telle base.

III.9.c. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base adaptée, alors $(-e_1, e_2, ..., e_n)$ est aussi une base adaptée à E_n ; il n'y a donc pas unicité d'une base adaptée pour E_n.

III.9.d. Soient $x, y \in E_n$. Soit $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base adaptée à E_n et $(y_1, ..., y_n)$ les coordonnées de y dans $\mathcal{B}$. Alors par bilinéarité du produit scalaire

$$(x|y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

III.9.e. La famille $(e_1, ..., e_n)$ est orthogonale, ce qui permet d'appliquer la relation de Pythagore

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

PARTIE IV : DROITES DES MOINDRES CARRÉS DANS LE CAS GÉNÉRAL

IV.1. Un espace préhilbertien réel de dimension infinie possible est $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Un espace préhilbertien réel possible de dimension finie n est $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire
$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$.

IV.2. On a montré en III.9.b. l'existence d'une base adaptée $\mathcal{B}$, on a montré en III.9.d. que dans une telle base,

$$\forall x, y \in E_n, \quad (x|y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

où $(x_1, ..., x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, ..., y_n)$ les coordonnées de y dans $\mathcal{B}$. On notera qu'en particulier pour tout vecteur z de coordonnées $(z_1, ..., z_n)$ dans $\mathcal{B}$, $\|z\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2$.

IV.3. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u + \beta x + \gamma y = 0$, alors $\sum_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i + \gamma y_i) e_i = 0$, or $(e_1, ..., e_n)$ est libre donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha + \beta x_i + \gamma y_i = 0$$

Si $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$, alors $\alpha + \beta x + \gamma y$ est l'équation d'une droite Δ et tous les points de coordonnées (x_i, y_i) appartiennent à cette droite Δ. Or par hypothèse les points $A_1, ..., A_n$ sont non alignés, donc nécessairement $(\beta, \gamma) = (0, 0)$ et on en déduit $\alpha = 0$, d'où finalement, (u, x, y) est libre.

IV.4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme dans la première partie, pour tout point M de coordonnées (x, y), $p_{a,b}(M)$ est le point de coordonnées $(x, ax + by)$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left\| \overrightarrow{p_{a,b}(A_i) A_i} \right\|^2 = (ax_i + b - y_i)^2$, d'où

$$f_0(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

D'autre part, $ax + bu - y = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) e_i$, et comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base adaptée, d'après IV.2.,

$$\|ax + bu - y\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

D'où finalement,

$$f_0(a, b) = n \|ax + bu - y\|^2$$

En procédant de même, on obtient aussi

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f_1(a, b) = \sum_{i=1}^n \left\| \overrightarrow{p'_{a,b}(A_i) A_i} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n (ay_i + b - x_i)^2 = n \|ay + bu - x\|^2$$

IV.5 .

IV.5.a. On est alors ramené à chercher la borne inférieure si elle existe de $d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & \|ax + bu - y\| \end{array} \right.$, puis de $d' : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & \|ay + bu - x\| \end{array} \right.$ et on est dans la situation de la partie II, avec (u, x, y) famille libre (montré en IV.3.) donc les résultats de II. nous donnent

– f_0 atteint son minimum en un unique couple

$$(a_0, b_0) = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho, m_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho m_x \right)$$

– f_1 atteint son minimum en un unique couple

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \rho, m_x - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \rho m_y \right)$$

IV.5.b. On a vu en II.11. que $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ se coupent en l'unique point M de coordonnées (m_x, m_y), avec en utilisant IV.2. $m_x = (x|u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et de même $m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, or l'isobarycentre de $A_1, ..., A_n$ a pour coordonnées $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i)$, donc $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ sont sécantes en l'isobarycentre de $A_1, ..., A_n$.

IV.5.c. D'après II.12., $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ sont orthogonales si et seulement si$(x|y) = m_x m_y$ ce qui s'écrit aussi $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j$ ou encore

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$$

En ce cas, ρ étant nul, $\mathcal{D}_0$ a pour équation $y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$ et $\mathcal{D}_1$ a pour équation $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

IV.5.d. Prenons $A_1(0,0), A_2(1,0), A_3(0,1)$ et $A_4(1,1)$. Ces points sont non alignés et $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 1$, $\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^4 x_i)(\sum_{j=1}^4 y_j) = \frac{1}{4}(2)(2) = 1$, donc la condition de IV.5.c. est vérifiée : les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_\infty$ ont pour équations respectives $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (et elles sont bien orthogonales).