Corrigé CCP mathématiques || 2010

I.1

On a $u_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in N^*$ et $x \in D$. De plus $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\sum u_n(x)$ converge (séries de Riemann, $n \geq 2$).

I.2

1.2.1 $u_n(x) = (n+x)^{-2}$ donc par un calcul immédiat
$u_n^{(p)}(x) = (-2)(-3)\ldots(-(p+1))(n+x)^{-2-p} = \boxed{\frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{2+p}}}$

1.2.2 On a pour tous éléments x de $[a,b]$ et $n \in N^*$ $\quad 0 < n+a \leq n+x \leq n+b$ d'où $0 < \frac{1}{(n+x)^{2+p}} \leq \frac{1}{(n+a)^{2+p}}$ pour tout entier naturel p.

La série $\sum u_n^{(p)}$ converge donc normalement sur $[a,b]$

Par conséquent, si $p \in N^*$, comme $\sum u_n$ converge simplement, et que $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement pour tout $k \in [[1,p|]$,

1.2.3 U est dérivable à tout ordre p sur tout segment $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, et donc sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in]-1,+\infty[$ $\boxed{U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{2+p}}}$

U est donc de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$

I.3

1.3.1 $U(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(x+n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n+N)^2} = \boxed{U_N(x)+U(x+N)}$

1.3.2 Pour tout $x \in]-N-1,-N[$, on a: $U(x) = U_N(x)+U(x+N)$ avec $x+N \in]-1,+\infty[$

L'application U_N est une fraction rationnelle donc est de classe C^∞ sur $]-N-1,-N[$ où elle est définie.

L'application $x \to x+N$ est de classe C^∞ (fonction affine),et U est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

Donc par composition: $x \to U(x+N)$ est de classe C^∞ sur $]-N-1,-N[$ et

$U^{(p)}(x) = U_N^{(p)}(x)+U^{(p)}(x+N) = (-1)^p(p+1)!\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+x)^{2+p}} + (-1)^p(p+1)!\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{2+p}} =$

Soit à nouveau: $\boxed{U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{2+p}}}$

U est donc de classe C^∞ sur $]-N-1,-N[$.

Donc U est de classe C^∞ sur chacun des intervalles dont D est la réunion, donc sur D

1.3.3 On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!}U^{(p-2)}(x)$

1.4 On pose $U_0(x) = 0$. Pour $x \in D \quad U(x) = \frac{1}{(x+N)^2} + U_{N-1}(x) + U(x+N)$

U_{N-1} est une fonction polynôme, et $x \to U(x+N)$ est continue en $-N$ (puisque U) est continue en 0, donc $x \to U_{N-1}(x) + U(x+N)$ est continue, donc bornée au voisinage de $-N$. Donc $\boxed{U(x) \underset{x\to -N}{\sim} \frac{1}{(x+N)^2}}$

1.5

I.5.1 Pour $x > -1$: $U'(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3} < 0$

1.5.2 Pour $x > 0$, $n \in N^*$ et $t \in [x+n-1, x+n]$ on a : $\frac{1}{(t+1)^2} \leq \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{t^2}$ donc

$\int_{x+n-1}^{x+n} \frac{dt}{(t+1)^2} = \int_{x+n}^{x+n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{(x+n)^2} \leq \int_{x+n-1}^{x+n} \frac{dt}{t^2}$

d'où pour $N \in N,$ d'après la relation de Chasles : $\int_{x+1}^{x+1+N} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{dt}{t^2} \leq \int_{x}^{N} \frac{dt}{t^2}.$

D'où, en faisant tendre N vers $+\infty$ puisque les intégrales convergent:

$\boxed{\int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq U(x) \leq \int_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}}$

On obtient alors $\frac{1}{x+1} \leq U(x) \leq \frac{1}{x}$ d'où $\boxed{U(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$

I.6 Pour $x \in D,$ on a $\frac{x}{2} \in D$ et $\frac{x-1}{2} \in D.$ De plus $U(\frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n)^2}$ et

$U(\frac{x-1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n-1)^2}$

d'où le résultat

PARTIE II

II.1.1 $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ donc $f_p(t) \underset{0}{\sim} t^p$

Si $p \in N^*,$ alors $\boxed{\lim_{t\to 0} f_p(t) = 0}$ et $\boxed{\lim_{t\to 0} f_0(t) = 1}$

I.1.2 $f_p(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^{p+1}}{e^t}$

II.2.1 $t \to f_0(t)e^{-xt}$ est positive continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $f_0(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}$

Donc, si $x \leq -1,$ alors $\lim_{t\to +\infty} te^{-(x+1)t} = +\infty,$ donc l'intégrale diverge grossièrement.

Si $x > -1$ alors $te^{-(x+1)t} = o_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après les croissances comparée, et donc l'intégrale converge.

II.2.2 f_p est positive et l'exponentielle croissante, d'où pour tout $t \geq 0$ et $x \geq a$: $0 \leq f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$ puisque $-xt \leq -at$

On a $f_p(t)e^{-xt} \underset{+\infty}{\sim} t^{p+1}e^{-(x+1)t}$ donc d'après les croissances comparées, pour $x > -1$:$\underline{f_p(t)e^{-xt} = o_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$ ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de $t \to f_p(t)e^{-xt}$ qui est postive et continue.

II.2.3 On pose $u(x,t) = f_0(t)e^{-xt},$ pour $t \geq 0$ et $x > -1$

u admet des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre $p \in N^*$ et

$\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t) = (-1)^p t^p f_0(t)e^{-xt} = (-1)^p f_p(t)e^{-xt}$

De plus $t \to \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geq a$ et $t \in [0,+\infty[$ $\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,t)\right| = f_p(t)e^{-xt} \leq f_p(t)e^{-at}$

Comme $t \to f_p(t)e^{-at}$ est intégrable, on en déduit que f est de classe C^p sur tout

$[a,+\infty[$ avec $a > -1$(puisque bien sûr la continuité et la condition de domination de $t \to \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ vaut pour tout entier k compris entre 1 et p).

Par extension de l'intervalle, φ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et pour tout x de $]-1,+\infty[$, ona $\boxed{\varphi^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty}(-1)^p f_p(t)e^{-xt}dt}$

II.2.4 On a par convexité de l'exponentielle :$0 < e^t - 1 \leq t$ pour tout $t > 0,$ donc $0 \leq f_0(t)e^{-xt} \leq e^{-xt}$ pour tout $t \geq 0$

Pour $x > 0,$ on a donc $0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$ (intégrale convergente)

Par encadrement, on a donc $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$

II.3

II.3.1 Pour $x > -1,$ ona $\varphi(x) - \varphi(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^{-xt}-e^{-(x+1)t})}{e^t-1}dt = \int_0^{+\infty} te^{-(x+1)t}dt = \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$ (on effectue une intégration par parties dans cette dernière intégrale)

II.3.2 On pose pour $x > -1$ $h(x) = U(x) - \varphi(x).$

On a $U(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + U(x+1).$ Donc h est périodique de période $1.$

D'autre part , on a d'après la question $1.5.2$ $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Pour tout $x > -1$ et tout entier naturel $n,$ on a donc $h(x+n) = h(x).$ Comme $\lim_{n\to+\infty} h(x+n) = 0$ on a donc $h(x) = 0$ et $\boxed{U(x) = \varphi(x)}$

II.3.3 En égalant les expressions trouvées pour les dérivées d'ordre $p-2$ de U et $\varphi,$

on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t-1}dt$$

PARTIE III

III.1 g est 2π périodique continue sur $]-\pi,\pi[$ et $\lim_{\pi^-} g = \lim_{-\pi^+} g.$ Donc, par 2π-périodicité g est continue sur R

D'autre part, g est dérivable sur $]0,\pi[$ et $g'(x) = 1$ pour tout $x \in]0,\pi[.$ g' admet des limites finies en 0 par valeurs supérieures et en π par valeurs inférieures et est donc par parité et 2π périodicité de classe C^1 par morceaux sur $R.$ D'après le théorème de Dirichlet, g est donc en tout point réel la somme de sa série de Fourier, laquelle converge normalement.

III.2

III.2.1 Comme g est paire, on a $b_n(g) = 0$ pour tout $n \in N^*$

III.2.2 Comme g est paire, on a $a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - t)\cos nt dt$

Pour n non nul, en intégrant par parties:

$a_n(g) = -\frac{2}{\pi n}[(\frac{\pi}{2} - t)\sin nt]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nt dt = -\frac{2}{\pi n^2}[\cos nt]_0^{\pi} = \frac{-2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$

Si n est pair non nul , on a donc $a_n(g) = 0$ et si n est impair, $n = 2k-1$ ($k \in N^*$) , on a donc $a_{2p+1}(g) = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}$

Enfin $a_0(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - t)dt = -\frac{2}{\pi}[(\frac{\pi}{2} - t)^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

III.3.

III.3.1 On a donc pour tout t réel: $g(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)t$

Pour $t = 0$, on obtient donc: $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

II.3.2 On a $U(-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$

En utilisant la question $I.6$ avec $x = 0$, on a donc $\frac{1}{4}[U(0) + U(-\frac{1}{2})] = U(0)$, d'où

$$\boxed{U(0) = \frac{\pi^2}{6}}$$

III.4 Comme g est continue , on peut appliquer la relation de Parseval et donc

: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^2(t)dt = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$

Or $\int_{-\pi}^{\pi}g^2(t)dt = 2\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - t)^2dt = -\frac{4}{3}[(\frac{\pi}{2} - t)^3]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$

On sait que la série $\sum\frac{1}{n^4}$ converge et en regroupant les termes pour les valeurs de n paires et impaires, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

III.5

III.5.1 g est continue sur R donc admet une unique primitive G prenant la valeur 0 en 0

On a pour tout x réel $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Donc $G(-x) = \int_0^{-x}g(t)dt$. En effectuant le changelment de variables de classe C^1 $u = -t$ (donc $dt = -du$), on obtient $G(-x) = -\int_0^x g(-u)du = -\int_0^x g(u)du = -G(x)$. Donc G est impaire

De même ,pour tout x réel:

$$G(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} g(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+2\pi} g(t)dt = G(x) + \int_0^{2\pi} g(t)dt = G(x) + \pi a_0 = G(x)$$

Donc G est 2π – périodique

III.5.2 On a $a_n(G') = nb_n(G)$, donc pour n non nul: $b_n(G) = \frac{1}{n}a_n(G') = \frac{1}{n}a_n(g)$

Si n est pair, on a donc $b_n(G) = 0$ et si n est impair, $n = 2k-1$, on a

$$\boxed{b_{2k-1}(G) = \frac{4}{\pi(2k-1)^3}}$$

On a d'autre part $a_n(G) = 0$ pour tout n puisque G est impaire.

G est de classe C^1 puisque dérivable et que $G' = g$ est continue. G est donc en tout point la somme de sa série de Fourier.

III.5.3

Comme G est continue, on peut appliquer la relation de Parseval et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(2k-1)^6}$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} G^2(t)dt = 2\int_0^{\pi} G^2(t)dt$

Pour $t \in [0,\pi]$ on a $G(t) = -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-t)^2 + \frac{\pi^2}{8}$.

Donc $\int_0^{\pi} G^2(t)dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^2}{8}(\frac{\pi}{2}-t)^2 + \frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}-t)^4\right)dt =$

$$\left[\frac{\pi^4 t}{64} + \frac{\pi^2}{24}(\frac{\pi}{2}-t)^3 - \frac{1}{20}(\frac{\pi}{2}-t)^5\right]_0^{\pi} = 2\pi^5[\frac{1}{64} - \frac{1}{192} + \frac{1}{320}] = \pi^5(\frac{1}{160} + \frac{1}{96}) = \frac{16\pi^5}{960}$$

Donc $\frac{16\pi^4}{960} = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}}$

On a alors , puisque $\sum\frac{1}{n^6}$ converge: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{64}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}$

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{64}{63}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$