

CCP PC 2010, Mathématiques 1
Un corrigé.

Partie I

A)

1) Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi, P_f est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.

2) L'étude des sous-espaces propres donne :

$$E_0(f) = \text{Vect}(v_1) \text{ avec } v_1 = (1, -2, 0),$$

$$E_1(f) = \text{Vect}(v_2) \text{ avec } v_2 = (1, 0, 1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(v_3) \text{ avec } v_3 = (1, -1, 0).$$

Dans ce cas, la matrice D est donnée par : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et donc $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$.

4) En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

5) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ une matrice qui commute avec D . On écrit que $MD = DM$, ce qui donne $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.

Finalement, les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

6) On a $HD = DH = H^3$, donc H et D commutent.

7) D'après les questions 5) et 6), si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

B)

- 1) On trouve pour tout entier $m \geq 1$: $J^m = 3^{m-1}J$.
- 2) Travaillons avec les matrices A et J . On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$.
Evidemment, cette relation est encore valable pour $m = 0$ (car dans ce cas, on a $\text{id} = \text{id}$).

- 3) Un calcul du polynôme caractéristique de A donne : $P_f(X) = P_A(X) = -(X - 1)^2(X - 4)$. Donc f admet les deux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.
- 4) D'après la question 2), on peut écrire $f^m = 1^m(\text{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$ pour tout entier $m \geq 0$. En posant $p = \text{id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient l'existence de la décomposition voulue.
De plus, on a nécessairement $\text{id} = p + q$ (pour $m = 0$) et $f = p + 4q$ (pour $m = 1$). Donc $p = \frac{1}{3}(4\text{id} - f)$ et $q = \frac{1}{3}(f - \text{id})$, d'où l'unicité de cette décomposition.
Enfin, comme id et j sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour p et q .
- 5) On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p, q^2 = q, p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme (p, q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.

Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par : $h = \pm p \pm 2q$.

- 6) On détermine les sous-espaces propres de f :
 $E_1(f) = \text{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1, -1, 0)$ et $w_2 = (0, 1, -1)$,
 $E_4(f) = \text{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = (1, 1, 1)$.
Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, f est diagonalisable.
Et (w_1, w_2, w_3) est une base de vecteurs propres pour f .
Notons $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$. Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 7) On peut prendre par exemple : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 8) Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B}_d est Y . Alors $h^2 = f$ car $Y^2 = D$. Et h n'est pas combinaison linéaire de p et q , car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base \mathcal{B}_d .
- 9) Soit h tel que $h^2 = f$. Comme f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme $Q_1(X) = (X - 1)(X - 4)$ est un polynôme annulateur de f , donc de h^2 .
Donc le polynôme $Q_2(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 4) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de h . Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours, h est diagonalisable.

Partie II

1) On a, en utilisant les trois relations, $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$. Donc $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de f , scindé à racines simples. Et f est diagonalisable.

2) A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de f qui n'a que λ et μ comme racines. Il en résulte que $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda; \mu\}$.

Si μ n'est pas valeur propre de f , la seule valeur propre est donc λ . Comme f est diagonalisable, on a donc $f = \lambda \text{id}$. En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :

$$\lambda \text{id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q.$$

D'où $(\lambda - \mu)q = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$, $q = 0$. Ceci est contraire aux hypothèses ; ainsi μ est valeur propre de f .

On montrerait de même que λ est aussi une valeur propre de f . Donc $\text{Sp}(f) = \{\lambda; \mu\}$.

3) D'après la question 1), on a : $0 = (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $q \circ p = 0$.

De même, comme $(f - \mu \text{id}) \circ (f - \lambda \text{id}) = 0$, on trouve $p \circ q = 0$.

Enfin, comme $\text{id} = p + q$, on obtient, en composant par p (resp. par q) : $p = p^2$ (resp. $q = q^2$).

4) Comme $\lambda\mu \neq 0$, f n'admet pas la valeur propre 0. Donc $\text{Ker } f = \{0\}$, et comme E est de dimension finie, f est bijective.

De plus, on a vu en 1) que $f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$. D'où $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda + \mu)\text{id})$. On remplace

f et id à l'aide de p et q , ce qui donne finalement : $f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$.

5) La relation $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ est vérifiée pour $m = 0, 1, 2$ d'après l'énoncé, et pour $m = -1$ d'après la question précédente.

Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour $m \in \mathbb{N}$, d'autre part pour $-m \in \mathbb{N}$, donne (en utilisant le fait que $p \circ q = q \circ p = 0$) : $\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

6) Soient deux réels α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. En composant par p , on a $\alpha p = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $p \neq 0$. De même, en composant par q , on obtient $\beta = 0$.

Donc (p, q) est une famille libre et $\dim(F) = 2$.

7) Soit $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$. Alors $h = \alpha p + \beta q$ et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$. Comme (p, q) est une famille libre, on a $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$, i.e. (puisque λ et μ sont supposés positifs) $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \pm\sqrt{\mu}$. On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes.

Par conséquent, les 4 solutions sont $h = \pm\sqrt{\lambda}p \pm \sqrt{\mu}q$.

8) Définissons la matrice K diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & I_{k-2} \end{array} \right),$$

où I_{k-2} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$ (bien définie car $k \geq 2$).

Alors un produit par blocs donne immédiatement $K^2 = I_k$.

9) On va raisonner matriciellement. Appelons k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ ($k \geq 2$) et considérons une base de diagonalisation \mathcal{B}_d pour f ; c'est également une base de diagonalisation pour p et q car $p = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \text{id})$ et $q = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \text{id})$. De plus, dans la base \mathcal{B}_d , ces matrices sont définies par blocs comme suit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array} \right), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right).$$

Soit alors p' l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B}_d est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$$

où la matrice $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ a été définie à la question précédente. De plus,

- un produit par blocs donne $M^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p)$, donc $p'^2 = p$;
- des produits par blocs donnent $M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$, donc $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$;
- comme M n'est pas diagonale, $p' \notin F = \text{Vect}(p, q)$.

En résumé, l'endomorphisme p' ainsi construit répond à la question.

- 10) Si $\dim(E) \geq 3$, alors λ ou μ est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est λ . Posons $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$, où p' est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ par propriétés de p' et q , et pourtant $h \notin F$ car $p' \notin F$ et $\lambda \neq 0$.

En conclusion, $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie III

- 1) Pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

- 2) Prenons $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$. Alors $P(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$, et d'après la question précédente $P(f) = 0$. Le polynôme P est annulateur de f et il est scindé à racines simples. Donc f est diagonalisable.

- 3) D'après la question 1), $L_{\ell}(f) = \sum_{i=1}^m L_{\ell}(\lambda_i) p_i$. Mais $L_{\ell}(\lambda_i) = \delta_{\ell, i}$ (où $\delta_{\ell, i} = 1$ si $\ell = i$ et 0 si $\ell \neq i$). Donc $L_{\ell}(f) = p_{\ell}$. De plus,

$$(f - \lambda_{\ell} \text{id}) \circ p_{\ell} = (f - \lambda_{\ell} \text{id}) \circ L_{\ell}(f) = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m (f - \lambda_i \text{id})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m (\lambda_{\ell} - \lambda_i)} = \frac{0}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m (\lambda_{\ell} - \lambda_i)} = 0.$$

Il en résulte que $\text{Im}(p_{\ell}) \subset \text{Ker}(f - \lambda_{\ell} \text{id})$.

En outre, le polynôme $P(X)$ de la question 2) est annulateur de f et a pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Donc $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Et par hypothèse, pour tout $1 \leq \ell \leq m$, $p_{\ell} \neq 0$ donc $\text{Im}(p_{\ell}) \neq \{0_E\}$ et $\text{Ker}(f - \lambda_{\ell} \text{id}) \neq \{0_E\}$. Ceci signifie que λ_{ℓ} est effectivement une valeur propre de f .

Finalement, on a bien $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

- 4) Comme $p_{\ell}(f) = L_{\ell}(f)$, $p_i \circ p_j = (L_i \cdot L_j)(j)$.

- Si $i \neq j$, le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ divise $(L_i \cdot L_j)(X)$. Comme $P(f) = 0$, on a donc

$$(L_i \cdot L_j)(f) = 0 \text{ et } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $p_i \circ p_j = 0$.$$

- Si $i = j$, comme $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$ (relation de l'énoncé pour $k = 0$), en composant par p_i on obtient $p_i^2 = p_i$.

- 5) L'endomorphisme f étant diagonalisable, d'après le cours on a $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$.

Le fait que chaque p_i est un projecteur a été démontré à la question précédente. De plus, comme

id = $\sum_{k=1}^m p_i$, on a $E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$. Or on a vu que $\text{Im}(p_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$. D'après la somme directe précédente, on a donc $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ et $\text{Im}(p_i) = E_{\lambda_i}(f)$ pour tout i . Enfin le fait que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ montre que les p_i sont les projecteurs associés à cette somme directe.

6) Ecrivons une combinaison linéaire nulle des $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$: $\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0$. Soit $\ell \in \llbracket 1; m \rrbracket$. En composant par p_ℓ , on obtient $a_\ell p_\ell = 0$, d'où $a_\ell = 0$ car p_ℓ n'est pas nul d'après l'énoncé. Ainsi tous les coefficients a_i sont nuls et la famille (p_1, \dots, p_m) est libre. Donc $\dim(F) = m$.

7) Soit $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \in F$ telle que $h^2 = f$. Alors $h^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ et comme la famille (p_1, \dots, p_m) est libre, $\alpha_i^2 = \lambda_i$ pour tout i . Réciproquement, tous les h vérifiant cette relation sont solutions. En résumé, $\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{i=1}^m \pm \sqrt{\lambda_i} p_i \right\}$.

8) a) Si $m = n$, il y a n sous-espaces propres dans l'espace E de dimension n .
Donc la dimension de chaque sous-espace propre de f est égale à 1.

b) Si $h \in \mathcal{R}(f)$, $h \circ f = h^3 = f \circ h$. Donc h et f commutent et d'après le cours, tout espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par h . Soit x un vecteur propre de f , par exemple $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$. Comme $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$, $h(x) = \mu_i x$ et x est vecteur propre pour h .

c) Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. D'après la question précédente, pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, $h(x_i) = \mu_i x_i$.

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$, $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ et

$$h(x) = h(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x)$$

soit $h = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i$. Donc $\mathcal{R}(f) \subset F$.

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide est : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.

9) Si $m < n$, alors il existe i tel que $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 2$. Si les λ_i sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie IV

A)

1) Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ et (a_1, \dots, a_p) une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$. En composant par f^{p-1} , comme $f^q = 0$ pour tout $q \geq p$, on obtient $a_0 f^{p-1}(x) = 0$ donc $a_0 = 0$. On recommence en composant par f^{p-2}, \dots, f , ce qui donne au final $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$.

Donc la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. Cette famille a p éléments dans un espace de dimension n , donc $p \leq n$ et $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

2) Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = f$. Alors $h^{2n} = f^n = 0$ donc h est nilpotent et d'après 1), $h^n = 0$. De plus, $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ donc $2p - 2 \leq n - 1$, i.e. $2p - 1 \leq n$.

3) On sait d'après le cours que pour $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1; 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^n)$$

au voisinage de 0. Ici, $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a_k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$.

4) D'après la question précédente, pour $-1 < x < 1$, $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$ où γ est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne $1+x = (P_n(x) + x^n \gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma(x)^2) = \boxed{P_n^2(x) + x^n \eta(x)}$ pour une fonction η bornée au voisinage de 0.

Posons alors $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$; c'est une fonction polynôme. D'après la relation précédente, $x \mapsto Q_n(x)/x^n$ est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si $Q_n(X)$ n'admet pas de terme en X^k pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, ce qui entraîne $\boxed{X^n \text{ divise } Q_n(X)}$.

On écrira dans la suite $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$ où S_n est une fonction polynôme.

- 5) • D'après les résultats des questions précédentes, $(P_n(f))^2 - f - \text{id} = (P_n^2)(f) - f - \text{id} = f^n \circ S_n(f)$. Or $f^n = 0$ d'après 1), donc $(P_n(f))^2 = f + \text{id}$, i.e. $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + \text{id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset}$.
- Plus généralement, $(P_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \text{id} = (P_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \text{id} = (\alpha f)^n \circ S_n(\alpha f)$. Comme $f^n = 0$, $(P_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \text{id}$, i.e. $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \text{id})$. Donc $\boxed{\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset}$.
- Comme $\beta \neq 0$, soit $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta}f + \text{id})$ (c'est possible d'après ce qui précède). Alors $h^2 = \frac{1}{\beta}f + \text{id}$ et comme $\beta > 0$, $(\sqrt{\beta} h)^2 = f + \beta \text{id}$. Donc $\sqrt{\beta} h \in \mathcal{R}(f + \beta \text{id})$ et $\boxed{\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset}$.

B)

- 1) La matrice $T - \lambda I_n$ est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale; il en résulte que $\text{rg}(T - \lambda I_n) \leq n-1$. Un calcul matriciel simple montre que $\text{rg}((T - \lambda I_n)^k) \leq n-k$ pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et en particulier pour $k = n$: $\text{rg}((T - \lambda I_n)^n) = 0$, i.e. $\boxed{(T - \lambda I_n)^n = 0}$.
Remarquons que cette question peut se traiter directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, mais que ce théorème est hors programme en PC.
- 2) Comme f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme f n'admet qu'une seule valeur propre λ , il existe une base dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ . D'après la question précédente, $(T - \lambda I_n)^n = 0_n$ et $(f - \lambda \text{id})^n = 0$. Donc $\boxed{E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n}$.
- 3) D'après la partie A), comme $(f - \lambda \text{id})^n = 0$, $\mathcal{R}((f - \lambda \text{id}) + \lambda \text{id}) \neq \emptyset$ (question A)5) en prenant $\beta = \lambda$ et en remplaçant f par $f - \lambda \text{id}$). Donc $\boxed{\text{si } \lambda > 0 \text{ alors } \mathcal{R}(f) \neq \emptyset}$.