

Partie I

I.1.1 Du développement en série entière de $\exp$ on obtient :

$$\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} x^n \text{ et } f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! 2^p} x^{2p} \text{ qui sont bien des séries entières}$$

de la variable x avec un rayon de convergence infini.

I.1.2 En notant $a_n(z) = \frac{(-1)^n z^n}{n!}$, $b_{2p+1} = 0$, $b_{2p} = \frac{(-1)^p}{p! 2^p}$ les coefficients des séries entières précédentes et en remarquant que $F(x, z) = \exp\left(-zx - \frac{x^2}{2}\right) = \exp(-zx) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ on sait que (produit de séries entières) :

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) x^n \text{ avec } A_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z) b_{n-k} = a_n(z) b_0 + a_{n-1}(z) b_1 + \cdots + a_0(z) b_n.$$

Les a_k étant polynomiales de degré k , A_n est polynomiale de degré n .

$$A_0(z) = a_0(z) = 1, A_1(z) = a_1(z) + 0 = -z, H_0(z) = 1, H_1(z) = z.$$

I.1.3 D'une part $\frac{dF}{dx}(x, z) = (-z - x)F(x, z) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) z x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}(z) x^n$

D'autre part par dérivation de la série entière de la variable x , on a

$$\frac{dF}{dx}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n(z) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1}(z) x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient $(n+1)A_{n+1}(z) = -zA_n(z) - A_{n-1}(z)$ pour $n \geq 1$ soit encore pour $n \in \mathbf{N}$: $(n+2)A_{n+2}(z) = -zA_{n+1}(z) - A_n(z)$ et en multipliant par $(-1)^n (n+1)!$ on obtient $\text{pour } n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{C}, H_{n+2}(z) = +zH_{n+1}(z) - (n+1)H_n(z)$

I.2.1 $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $f'(x) = -xf(x)$ donc $f''(x) = -xf'(x) - f(x)$.

Par récurrence — ou en dérivant n la relation précédente par la formule de Leibniz (pour le terme en $xf'(x)$) — on obtiendra

$$\text{pour } n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}, \frac{d^{n+2}f}{dx^{n+2}}(x) + x \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x) + (n+1) \frac{d^n f}{dx^n}(x) = 0$$

I.2.2 Il suffit de reporter $\frac{d^n f}{dx^n}(x) = (-1)^n f(x) K_n(x)$ pour les trois rangs et de diviser par $(-1)^n f(x) \neq 0$ pour obtenir la relation $K_{n+2}(x) - xK_{n+1}(x) + (n+1)K_n(x) = 0$.

$$K_0(x) = 1f(x)/f(x) = 1 = H_0(x), \quad K_1(x) = -f'(x)/f(x) = x = H_1(x).$$

Par récurrence on montrerait que $K_n(x) = H_n(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ — même relation de récurrence et égalité pour les rangs 0 ET 1 —

Remarque : Le texte n'est pas clair puisque K_n semble être définie comme une fonction d'une variable réelle et H_n d'une variable complexe et nulle part on parle de polynôme (formel). Il me semble que ce qui figure au dessus suffit. Néanmoins : on montrerait aussi que $K_n(x)$ est polynomiale en x donc les deux polynômes K_n et H_n coïncident sur $\mathbf{R}$ — donc pour une infinité de valeurs — donc sont égaux.

I.3.1 On dérive $H_{n+1}(x) = K_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \exp(x^2/2) f^{(n+1)}(x)$ comme un produit :
 $H'_{n+1}(x) = x(-1)^{n+1} \exp(x^2/2) f^{(n+1)}(x) + (-1)^{n+1} \exp(x^2/2) f^{(n+2)}(x) = xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x)$ donc
 $H'_{n+1}(x) = (n+1)H_n(x)$.

I.3.2 On a aussi en dérivant $f(x)H_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$,

$f(x)H'_n(x) - xf(x)H_n(x) = (-1)^n f^{(n+1)}(x) = -f(x)H_{n+1}(x)$ donc $H'_n(x) - xH_n(x) = -H_{n+1}(x)$ puis en dérivant à nouveau

$$H''_n(x) - xH'_n(x) - H_n(x) = -H'_{n+1}(x) = -(n+1)H_n(x) \text{ d'où } \boxed{H''_n(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0.}$$

I.4 $\varphi_n(x) = (-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$, $\varphi'_n(x) = (-1)^n H'_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x}{2}(-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$
 puis $\varphi''_n(x) = (-1)^n H''_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) - x(-1)^n H'_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4}(-1)^n H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$

donc $\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = (-1)^n [H''_n(x) - xH'_n(x)] \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ d'où $\boxed{\varphi''_n(x) - \frac{x^2}{4}\varphi_n(x) = -n\varphi_n(x).}$

I.5.1 Notons $g : x \mapsto H_p(x)H_q(x)f(x)$.

Comme H_p, H_q sont des fonctions polynomiales et que $f(x) = \exp(-x^2/2)$, g est continue sur $\mathbf{R}$ et est, par croissances comparées, négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$ au voisinage de $\pm\infty$. Il en résulte que g est intégrable sur $\mathbf{R}$ donc que $\boxed{I_{p,q} \text{ existe pour tout } (p,q) \in \mathbf{N}^2.}$

I.5.2 $I_{p+1,q+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+1}(x)(-1)^{q+1}f^{(q+1)}(x)dx$. On se place sur un segment et on intègre par parties avec $u = H_{p+1}, u' = H'_{p+1} = (p+1)H_p, v' = (-1)^{q+1}f^{(q+1)}, v = (-1)^{q+1}f^{(q)} = -H_q f$.

Le produit $uv = -H_p H_q f$ aura une limite nulle en $\pm\infty$ donc après les passages à la limite on aura :

$$I_{p+1,q+1} = 0 - 0 + (p+1) \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x)H_q(x)f(x)dx = (p+1)I_{p,q} \text{ et } \boxed{I_{p+1,q+1} = (p+1)I_{p,q} = (q+1)I_{p,q}}$$

(par symétrie). Puis $\boxed{\text{Si } p \neq q, I_{p,q} = 0 \text{ et } I_{p,p} = p! I_0 = \sqrt{2\pi} p!}$ (par récurrence).

Partie II

II.1 Théorème de continuité

- Pour $t \in \mathbf{R}, \nu \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbf{R}$;
- Pour $\nu \in \mathbf{R}, t \mapsto F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $|F(t, 2i\pi\nu)| = \exp(-t^2/2) = f(t)$ ce qui prouve l'intégrabilité — f est intégrable sur $\mathbf{R}$ — tout en étant une domination.

Le théorème du cours s'applique $\boxed{\hat{f} \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

II.1 Théorème de dérivation : $\frac{\partial}{\partial \nu} F(t, 2i\pi\nu) = -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)$

- Pour $t \in \mathbf{R}, \nu \mapsto -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbf{R}$;
- Pour $\nu \in \mathbf{R}, t \mapsto -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $|-2i\pi t F(t, 2i\pi\nu)| = 2\pi|t| \exp(-t^2/2) = 2\pi|t|f(t)$. On montrerait que $t \mapsto |t|f(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ — comme précédemment ou en utilisant la dérivée de f —, le théorème du cours s'applique $\boxed{\hat{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$

II.2 On a $\hat{f}'(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi t F(t, 2i\pi\nu) dt$. Classiquement on utilise une intégration par parties. Si on ne voit pas que $-t \exp(-t^2/2)$ est une dérivée, on peut utiliser l'indication du texte...

$$-2i\pi t F(t, 2i\pi\nu) = -4\pi^2 \nu F(t, 2i\pi\nu) + 2i\pi(-2i\pi\nu - t)F(t, 2i\pi\nu)$$

Là on reconnaît dans le second terme la dérivée par rapport à t de $F(t, 2i\pi\nu)$ or ceci à une limite nulle en $\pm\infty$ puisque son module est $\exp(-t^2/2)$, donc on aura

$$\boxed{\hat{f}'(\nu) = -4\pi^2 \nu \hat{f}(\nu) + 0 - 0}$$

II.3.2 $\boxed{\hat{f}(\nu) = \hat{f}(0) \exp(-2\pi^2 \nu^2) = \sqrt{2\pi} \exp(-2\pi^2 \nu^2)}$

Partie III

III.1.1 On a $|x| \leq A \leq 2\pi n$ donc $x - 2\pi n \leq 0$ et donc $x \mapsto f(x - 2\pi n)$ est croissante sur $[-A, A]$ car f est croissante sur $\mathbf{R}^-$, de même comme $x + 2\pi n \geq 0$ et f est décroissante sur $\mathbf{R}^+$, $x \mapsto f(x + 2\pi n)$ est décroissante sur $[-A, A]$.

$u_n \geq 0$ et sur $[-A, A]$ on a d'après ci-dessus :

$$u_n(x) = f(x - 2\pi n) + f(x + 2\pi n) \leq f(A - 2\pi n) + f(-A + 2\pi n) = 2f(2\pi n - A) = 2 \exp\left(-\frac{(2\pi n - A)^2}{2}\right).$$

III.1.2 Par croissance comparée $\exp\left(-\frac{(2\pi n - A)^2}{2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \exp\left(-\frac{(2\pi n - A)^2}{2}\right)$ converge et donc d'après III.1.1. $\sum u_n$ converge normalement sur $[-A, A]$.

III.2.1 En particulier $\sum u_n$ converge simplement sur $[-A, A]$ et comme pour tout réel x il existe A tel que $x \in [-A, A]$ – question stupide, réponse stupide! – bref $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

III.2.2 Les u_n sont continues sur $\mathbf{R}$ et la convergence est normale sur $[-A, A]$ donc U est continue sur $[-A, A]$ ceci pour tout $A > 0$ donc U est continue sur $\mathbf{R}$.

III.2.3 En utilisant que f est paire et un changement d'indice :

$$U_n(-x) = \sum_{k=-n}^n f(-x - 2k\pi) = \sum_{k=-n}^n f(x + 2k\pi) = \sum_{p=-n}^n f(x - 2p\pi) = U_n(x) \text{ puis en faisant tendre } n \text{ vers } +\infty, U(-x) = U(x). \text{ } U \text{ est paire.}$$

$$\text{III.2.4 } U_n(x + 2\pi) = \sum_{k=-n}^n f(x - 2(k-1)\pi) = \sum_{k=-n-1}^{n-1} f(x - 2k\pi) = f(x + 2(n+1)\pi) + \sum_{k=-n}^n f(x - 2k\pi) - f(x - 2n\pi) \text{ or } (x \text{ fixé}) \lim_n f(x + 2(n+1)\pi) = 0 = \lim_n f(x - 2n\pi) \text{ d'où } U(x) = 0 + U(x) - 0. \\ \text{} U \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

III.3.1 U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ (admis), elle coïncide avec sa série de Fourier...

III.3.2 Linéarité, changements de variable puis relation de Chasles (en faisant attention) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) dx = \sum_{p=-k}^k \int_{-\pi}^{\pi} f(x - 2p\pi) \cos(nx) dx = \sum_{p=-k}^k \int_{-\pi-2p\pi}^{\pi-2p\pi} \underbrace{f(t) \cos(nt + 2kn\pi)}_{=\cos(nt)} dt \\ \int_{-\pi}^{\pi} U_k(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi-2k\pi}^{\pi+2k\pi} f(t) \cos(nt) dt \text{ car les domaines d'intégration sont successivement } \\ \text{pour } p = -k \text{ à } k : [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi], [-3\pi + 2k\pi, -\pi + 2k\pi] \dots \text{ jusqu'à } \dots [-\pi - 2k\pi, \pi - 2k\pi]$$

III.3.3 On pose (n fixé) : $v_p(x) = u_p(x) \cos(nx)$ en utilisant $|v_p(x)| \leq |u_p(x)| \leq \|u_p\|_{\infty, [-\pi, \pi]}$ on montre que la série de fonctions v_p converge normalement sur le segment $[-A, A]$ on a donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} v_p(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x) dx \text{ ce qui donne le résultat. Puis d'après III.3.2. on a après passage la limite (l'intégrale converge...) :}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) dx = \lim_k \int_{-(2k+1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(t) \cos(nt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(nt) dt.$$

$$\text{III.3.4 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(int - t^2/2) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \Re(\hat{f}(-n/2\pi))$$

En fait $\hat{f}$ est à valeurs réelles — cf II mais c'est aussi lié au fait que $t \mapsto \sin(t) \exp(-t^2/2)$ impaire à une intégrale sur $\mathbf{R}$ qui est nulle —

$$a_n = \frac{1}{\pi} \hat{f} \left(-\frac{n}{2\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{n^2}{2} \right)$$