## Correction MATHS 1, concours CCP 2009, filière PC

**Partie I**

**I.1)** Soit S $\in S_n^+(\mathbb{R})$, soit M $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■ Montrons tout d'abord que , ${}^tMSM$ est symétrique: ${}^t({}^tMSM) = {}^tM{}^tS{}^t({}^tM) = {}^tMSM$

■ Ensuite, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX{}^tMSMX = {}^t(MX)S(MX)$

Or $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et S $\in S_n^+(\mathbb{R})$, donc ${}^t(MX)S(MX) \geqslant 0$.

Finalement, $\boldsymbol{{}^tMSM \in S_n^+(\mathbb{R})}$.

**I.2)** Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n

Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S, et P une matrice orthogonale d'ordre n. On peut donc écrire $D = {}^tPSP$

Remarquons que si Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

On en déduit que S $\in S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) $\Rightarrow D = {}^tPSP \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ )

$\Rightarrow {}^tYDY \geqslant 0$ (resp $>0$ si $Y \neq 0$)

$\Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \geqslant 0$ (resp $>0$ si $Y \neq 0$)

En prenant successivement pour Y chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ , on obtient $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots \lambda_n \geqslant 0$ (resp. $\lambda_1 > 0, \ldots \lambda_n > 0$ )

Réciproquement si on suppose toutes les valeurs propres de S positives (respectivement strictement positives), alors pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \geqslant 0$ (resp $>0$ si $Y \neq 0$), donc D $\in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) , et par suite

S = ${}^t\left(P^{-1}\right)DP^{-1} \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ )

**I.3)** La matrice A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement symétrique. Pour montrer qu'elle est positive, déterminons ses valeurs propres: son polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 1$, qui admet pour racines $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ .

Les valeurs propres de S sont donc strictement positives (car $\sqrt{5} < 3$).

Bilan: **A est symétrique positive, et même définie positive**.

**I.4)** La matrice B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement symétrique. En utilisant la matrice A de la question précédente, on peut affirmer que les valeurs propres de B sont -1, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . **La matrice B n'est donc pas positive.**

**I.5)** Soit S $\in S_n^+(\mathbb{R})$, et soit une matrice symétrique réelle semblable à S, c'est-à-dire il existe une matrice d'ordre n inversible P telle que $T = PSP^{-1}$. Montrons que T $\in S_n^+(\mathbb{R})$.

Les matrices T et S représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes, donc leurs valeurs propres sont les mêmes, donc celles de T sont positives, c'est-à-dire T $\in S_n^+(\mathbb{R})$.

**I.6) a)** Soit M $\in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda$ est une valeur propre de M, alors $\lambda$ est non nul (sinon il existerait X $\neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = 0$, ce qui contredit le fait que M est inversible), et $\lambda^{-1}$ est valeur propre de $M^{-1}$ (en effet si on note X un vecteur propre non nul associé à la valeur propre $\lambda$, alors $MX = \lambda X \Rightarrow X = \lambda M^{-1}X \Rightarrow \lambda^{-1}X = M^{-1}X$ , c'est-à-dire $\lambda^{-1}$ est valeur propre de $M^{-1}$ avec comme vecteur propre X).

On a donc montré l'implication: $\lambda \in sp(M) \Rightarrow \lambda^{-1} \in sp(M^{-1})$ .

A présent si $\mu$ est une valeur propre de $M^{-1}$, alors en appliquant le raisonnement précédent à $M^{-1}$ au lieu de M, on montre que $\mu$ est non nul et que $\mu^{-1}$ est valeur propre de $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$

Finalement, nous avons l'équivalence $\lambda \in sp(M) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in sp(M^{-1})$ .

**Bilan: si le spectre de M est sp(M) = {$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$} , alors le spectre de $M^{-1}$ est : sp($M^{-1}$) = {$\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_p^{-1}$}**

**I.6) b)** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S, et P une matrice orthogonale d'ordre n.
D est inversible (matrice diagonale de coefficients diagonaux non nuls), donc S est inversible comme produit de matrices inversibles. De plus, les valeurs propres de $S^{-1}$ étant les inverses des valeurs propres de S, elles ont bien strictement positives, c'est-à-dire $\boldsymbol{S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$.

**I.7)** Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n
Écrivons $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S, et P une matrice orthogonale d'ordre n.
Soit Y= $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors ${}^tYDY = {}^t(PY)S(PY) = 0$ par hypothèse.
Or ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$
Remarquons que si Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et si $\lambda_1 , \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S (comptées avec leur ordre de multiplicité), alors ${}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$
En prenant successivement pour Y chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ , on obtient $\lambda_1 = 0 , \ldots \lambda_n = 0$ , c'est-à-dire **toutes les valeurs propres de S sont nulles.**
Par suite $S = PDP^{-1} = P0P^{-1} = 0$

**I.8) a)** Si $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$., et si $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$., alors pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(S_2 - S_1)X \geqslant 0$, et ${}^tX(S_1 - S_2)X \geqslant 0$, donc ${}^tX(S_2 - S_1)X = 0$. En utilisant la question 7), on en déduit donc que $S_2 - S_1 = 0$, c'est-à-dire $\boldsymbol{S_1 = S_2}$ **.**

**I.8) b)** Considérons l'exemple suivant $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \notin \boldsymbol{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})}$**.**, et $S_1 - S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \notin \boldsymbol{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})}$**.**

**I.8) c)** Considérons l'exemple suivant $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Alors $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})}$**.**, mais $\boldsymbol{S_2 - S_1 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$ (pourtant on a bien $S_2 \neq S_1$ )

**I.8) d)** Supposons que $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$., soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la matrice $\alpha S_2 - \alpha S_1 = \alpha(S_2 - S_1)$ admet des valeurs propres positives si $\alpha \geqslant 0$, et négatives si $\alpha \leqslant 0$.
Donc ■ **si** $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0, \alpha S_1 \leqslant \alpha S_2}$ ■ **si** $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0 , \alpha S_2 \leqslant \alpha S_1}$

**I.8) e)** $(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$., donc on a bien $\boldsymbol{S_1 \leqslant S_2 \Rightarrow S_1 + S \leqslant S_2 + S}$

**I.9)** Si $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ alors ${}^tMS_2M - {}^tMS_1M = {}^tM(S_2 - S_1)M \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ d'après la question 1)

**I.10) a)** Si on suppose que $S - I_n \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ , alors les valeurs propres de cette matrice sont positives. Or si spectre (S) = $\{\lambda_1 , \ldots, \lambda_p \}$ , alors spectre $(S - I_n ) = \{\lambda_1 - 1 , \ldots, \lambda_p - 1\}$ ,. On peut donc dire que **toutes les valeurs propres de S sont supérieures à 1**. On en déduit en particulier que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$., donc **S est inversible** d'après la question 6)b).

**I.10) b)** D'après la question 6)a) spectre$(S^{-1}) = \{\lambda_1^{-1} , \ldots, \lambda_p^{-1} \}$ , donc **les valeurs propres de** $\boldsymbol{S^{-1}}$ **appartiennent à ]0,1],** en particulier $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire $\boldsymbol{S^{-1} > 0}$**.**
De plus spectre$(S^{-1} - I_n ) = \{\lambda_1^{-1} - 1 , \ldots, \lambda_p^{-1} - 1\}$ , donc les valeurs propres de $S^{-1} - I_n$ sont négatives, c'est-à-dire $\boldsymbol{S^{-1} \leqslant I_n}$ .

**I.11) a) S est symétrique** car ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$
De plus pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ si on pose $MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Or $X \neq 0 \Rightarrow MX \neq 0$ car M est inversible, donc ${}^tXSX = y_1^2 + \ldots + y_n^2 > 0$
On a donc bien **S définie positive.**

**I.11) b)** Si S est diagonale définie positive, alors S est de la forme S = $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$, où pour tout entier i entre 1 et n $\alpha_i > 0$.

En posant M = $\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}$, on a bien **M inversible** et $\boldsymbol{S = {}^tMM}$

**I.11) c)** Si S est symétrique définie positive, alors on peut écrire $S = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale définie positive.
Donc d'après la question précédente, il existe M $\in \mathcal{Gl}_n(\mathbb{R})$ tel que $D = {}^tMM$ .

On a alors S = $P{}^tMMP^{-1} = {}^t(M\,{}^tP)(M\,{}^tP)$ car $P^{-1} = {}^tP$
En posant $N = M\,{}^tP$ , on a bien $\mathbf{N} \in \boldsymbol{\mathcal{Gl}_n(\mathbb{R})}$ (produit de matrices inversibles), et $\boldsymbol{S = {}^tNN}$

**I.12)** Notre hypothèse est $0 < {}^tM_1M_1 \leqslant S_2$
D'après la question 9), ceci implique ${}^t(M_1^{-1})\,{}^tM_1M_1\,M_1^{-1} \leqslant {}^t(M_1^{-1})\,S_2M_1^{-1}$ , c'est-à-dire $\mathbf{I_n} \leqslant \boldsymbol{{}^t(M_1^{-1})\,S_2M_1^{-1}}$
En utilisant ensuite la question 10)a), on en déduit que ${}^t(M_1^{-1})\,S_2M_1^{-1}$ est inversible, donc $S_2$ est inversible.
En utilisant à présent la question 10)b) , on a $({}^t(M_1^{-1})\,S_2M_1^{-1})^{-1} \leqslant I_n$ , d'où ${}^tM_1\,S_2^{-1}\,M_1 \leqslant I_n$
On utilise à nouveau la question 9) pour écrire $M_1^{-1}({}^tM_1\,S_2^{-1}\,M_1){}^t(M_1^{-1}) \leqslant M_1^{-1}\,{}^t(M_1^{-1})$ , d'où $\boldsymbol{S_2^{-1} \leqslant S_1^{-1}}$

## Partie II

**II.1) a)** Étant donné que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les systèmes suivants sont équivalents:

$$\begin{cases} I_n = P_1 + P_2 \\ S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(S - \lambda_2 I_n) \\ P_2 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I_n - S) \end{cases}$$

Le système proposé admet donc bien un unique couple solution $(P_1,P_2)$

Ces deux matrices sont symétriques comme combinaison linéaire de deux matrices symétriques.

**II.1) b)** Si on écrit $P^{-1}SP = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ où $D_1 = \mathrm{diag}(1,..,1,0,..,0)$ (1 étant répété $n_1$ fois) et $D_2 = \mathrm{diag}(0,..,0,1,..,1)$ (1 étant répété $n_2$ fois) , alors on a $S = \lambda_1 PD_1P^{-1} + \lambda_2 PD_2P^{-1}$.
Si on pose $\boldsymbol{P_1 = PD_1P^{-1}}$ *et* $\boldsymbol{P_2 = PD_2P^{-1}}$ , on a bien $S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, et de plus $P_1 + P_2 = P(D_1 + D_2)P^{-1} = P(I_n)P^{-1} = I_n$

On a alors $\boldsymbol{P_1}^2 = PD_1^2\,P^{-1} = PD_1P^{-1} = \boldsymbol{P_1}$ , de même $\boldsymbol{P_2}^2 = = \boldsymbol{P_2}$
$\boldsymbol{P_1P_2} = P(D_1\,D_2)P^{-1} = P0P^{-1} = 0$ , et $\boldsymbol{P_2P_1 = 0}$
$\mathbf{rg}(\boldsymbol{P_1}) = \mathbf{n_1}$ et $\mathbf{rg}(\boldsymbol{P_2}) = \mathbf{n_2}$

**II.1) c)** Pour tout entier naturel k, $S^k = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^k$
Les matrices $P_1$ et $P_2$ commutent, donc nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton
$S^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^{k-i} P_1^{k-i} \lambda_2^{i} P_2^{i}$
Or $P_1P_2 = 0$ , $P_2P_1 = 0$, $P_1^i = P_1$ et $P_2^i = = P_2$ si i est un entier naturel non nul, donc finalement la formule se simplifie:
$\boldsymbol{S^k = \lambda_1^k\, P_1 + \lambda_2^k\, P_2}$

Soit Q un polynôme à coefficients réels, que nous pouvons écrire sous la forme $Q = a_0 + a_1X + \ldots + a_qa^q$
On a alors $Q(S) = a_0 + a_1S + \ldots + a_qS^q = a_0 + a_1(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) + \ldots + a_q(\lambda_1^qP_1 + \lambda_2^qP_2) = \boldsymbol{Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2}$

**II.1) d)** $S_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & & . \\ . & & . & 1 \\ 1 & . & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminons son polynôme caractéristique:

$$P_{S_0}(X)=\begin{vmatrix}2-X & 1 & .. & 1\\ 1 & 2-X & & .\\ . & & . & 1\\ 1 & . & 1 & 2-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n+1-X & 1 & .. & 1\\ n+1-X & 2-X & & .\\ . & & . & 1\\ n+1-X & . & 1 & 2-X\end{vmatrix}=(n+1-X)\begin{vmatrix}1 & 1 & .. & 1\\ 1 & 2-X & & .\\ . & & . & 1\\ 1 & . & 1 & 2-X\end{vmatrix}$$

$P_{S_0}(X)=(n+1-X)\begin{vmatrix}1 & 1 & .. & 1\\ 0 & 1-X & & .\\ . & 0 & . & 1\\ 0 & . & 0 & 1-X\end{vmatrix}$ (on a soustrait la ligne 1 à chacune des autres lignes du déterminant)

Finalement, $P_{So}(X)=(n+1-X)(1-X)^{n-1}$

Donc **la matrice $S_0$ admet deux valeurs propres $\lambda_1$=1 et $\lambda_2=n+1$**

En utilisant les formules $P_1=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(S_0-\lambda_2 I_n)$ et $P_2=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 I_n-S_0)$ , on obtient

$$P_1=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1 & -1 & .. & -1\\ -1 & n-1 & & .\\ . & & . & -1\\ -1 & . & -1 & n-1\end{pmatrix} \text{ et } P_2=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & .. & 1\\ 1 & 1 & & .\\ . & & . & 1\\ 1 & . & 1 & 1\end{pmatrix}$$

**<u>II.2) a)</u>** Soit (x,y) $\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors **(u(x) | y)** = ${}^t$(SX)Y = ${}^t$X ${}^t$S Y = ${}^t$X S Y **= (x | u(y))**

**<u>II.2) b)</u>**

Si i et j sont deux entiers naturels distincts compris entre 1 et p, considérons $x_i$ un vecteur du sous-espace propre $E_i$ , et $x_j$ un vecteur du sous-espace propre $E_j$ .

On a alors $\lambda_i$ ($x_i$ | $x_j$) = ($\lambda_i x_i$) | $x_j$) = (u($x_i$) | $x_j$) = ($x_i$ | u($x_j$)) = $\lambda_j$ ($x_i$ | $x_j$)

Or $\lambda_i \neq \lambda_j$ , donc ($x_i$ | $x_j$) =0 . Nous avons donc bien montré que **$E_i$ est orthogonal à $E_j$ .**

Comme de plus S est diagonalisable, on peut écrire $\bigoplus_{i=1}^{p}$ **$E_i = \mathbb{R}^n$**

**<u>II.2) c) i)</u>** Tout projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique, donc est associé à une matrice symétrique dans toute base orthonormée. Par conséquent **la matrice $P_i$ est symétrique.**

**<u>II.2) c) ii)</u>** Si $x_j$ est élément de $E_j$, alors **$p_i(x_j)$ = 0 si i$\neq$j** , et **$p_i(x_j) = x_j$ si i=j** .

On en déduit que si i $\neq$ j , alors pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ , $p_i(p_j(x))$ = 0 car $p_j(x) \in E_j$

Donc $p_i$ o $p_j$ est l'application nulle, d'où $\boldsymbol{P_iP_j=0}$.

**<u>II.2) d)</u>** En reprenant les notations employées dans la réponse à la question **<u>II.2) c) i)</u>** , pour tout entier i entre 1 et p, $P_i = PD_iP^{-1}$ , donc $\sum_{i=1}^{p}P_i = P(\sum_{i=1}^{p}D_i)P^{-1} = PI_n P^{-1} = I_n$ et $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i P_i$ = P ( $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i D_i)P^{-1} = PD\,P^{-1} = S$

**<u>II.3) a)</u>** $Sf(S)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j P_j \times \sum_{i=1}^{p}f(\lambda_i)P_i$ Or si i$\neq$j, $P_iP_j=0$, donc $Sf(S)==\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(\lambda_i)P_i^2=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(\lambda_i)P_i$ car $P_i^2 = P_i$

On obtient la même expression en calculant $f(S)S$.

**<u>II.3) b)</u>** Soit X un vecteur propre de S pour la valeur propre $\lambda_k$. On a alors $f(S)X=\sum_{i=1}^{p}f(\lambda_i)P_i X$

Or $P_iX$ = 0 si i $\neq$ k , et $P_iX$ = X si i = k (car $P_i$ est la matrice de la projection orthogonale sur $E_i$)

Donc $f(S)X=f(\lambda_k)X$, c'est-à-dire **X est un vecteur propre de $f(S)$ pour la valeur propre $f(\lambda_k)$.**

**<u>II.3) c)</u>** En reprenant les notations de la question II.1) d) , cos($\pi S_0$)=cos($\pi$)$P_1$ + cos((n+1)$\pi$)$P_2$, c'est-à-dire:

$$\cos(\pi S_0)=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1 & -1 & .. & -1\\ -1 & n-1 & & .\\ . & & . & -1\\ -1 & . & -1 & n-1\end{pmatrix}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\begin{pmatrix}1 & 1 & .. & 1\\ 1 & 1 & & .\\ . & & . & 1\\ 1 & . & 1 & 1\end{pmatrix}$$

**II.4) a)** On peut définir g(S) si et seulement si les valeurs propres de S sont strictement positives, autrement dit si et seulement si **S ∈ $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.**

En notant S = $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S, $g(S) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} P_i$

Or ceci est la décomposition spectrale de $S^{-1}$, car les valeurs propres de $S^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de S, associées aux mêmes sous-espaces propres.
On a donc bien $\boldsymbol{g(S)=S^{-1}}$.
On en déduit que **g est matriciellement décroissante sur ]0;+∞[** car si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que A ⩽ B, alors $B^{-1} \leqslant A^{-1}$ d'après la question I.12).

**II.4) b)** On peut définir h(S) si et seulement si les valeurs propres de S sont strictement supérieures à -1.

En notant S = $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S, $h(S) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+1} P_i = \sum_{i=1}^{p} P_i - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i+1} P_i$ (car si x>-1, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

Or les valeurs propres de $I_n + S$ sont les valeurs propres de S augmentées de 1, associées aux mêmes sous-espaces propres, donc pour tout entier i entre 1 et p, $\frac{1}{\lambda_i+1}$ correspond à une valeur propre de $(I_n + S)^{-1}$

Finalement, on a bien $\boldsymbol{h(S)=I_n-(I_n+S)^{-1}}$
Montrons que **h est matriciellement croissante sur ]0;+∞[** :
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres strictement supérieures à -1, alors:
$A \leqslant B \Rightarrow I_n + A \leqslant I_n + B \Rightarrow (I_n + B)^{-1} \leqslant (I_n + A)^{-1} \Rightarrow -(I_n + A)^{-1} \leqslant -(I_n + B)^{-1} \Rightarrow I_n - (I_n + A)^{-1} \leqslant I_n - (I_n + B)^{-1} \Rightarrow h(A) \leqslant h(B)$

**II.5) a)** Déterminons les valeurs propres de la matrice $A(x)-B(x)$:
Après calculs, le polynôme caractéristique de cette matrice est $X\left(X - \frac{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)$, donc les valeurs propres de cette matrice sont 0 et $\frac{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}(x)}$, qui sont bien positives. Donc $A(x)-B(x) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\boldsymbol{B(x) \leqslant A(x)}$.

**II.5) b)** Déterminons les valeurs propres de la matrice $A(x)$:
Après calculs, le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 2\mathrm{ch}(x)X + 1$, de racines $\lambda_1 = e^x$ et $\lambda_2 = e^{-x}$ (distinctes car $x \neq 0$)
En utilisant les formules $\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A(x)-\lambda_2 I_2)$ et $P_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 I_2 - A(x))$ , on obtient :
$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
La décomposition spectrale de A(x) est donc $\boldsymbol{A(x) = e^x \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$

**II.5) c)** Si α > 0, $p_\alpha(A(x)) = p_\alpha(e^x)P_1 + p_\alpha(e^{-x})P_2 = e^{\alpha x}P_1 + e^{-\alpha x}P_2 = A(\alpha x)$)

**II.5) d)** De manière immédiate, on peut affirmer que la décomposition spectrale de B(x) est $B(x) = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{ch(x)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $p_\alpha(\mathrm{B}(x)) = p_\alpha(0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_\alpha\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ch^\alpha(x)} \end{pmatrix}$

**II.5) e)** Après simplifications, $det[p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))] = 1 - \frac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}^\alpha(x)}$

En utilisant des développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0, on obtient :

$1 - \frac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}^\alpha(x)} = \frac{(\alpha - \alpha^2)\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}{1 + \alpha\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)}$ qui est équivalent au voisinage de 0 à $\frac{\alpha(1-\alpha)x^2}{2}$

Si α >1, cette expression est négative au voisinage de 0.
Donc pour x au voisinage de 0, la matrice $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))$ admet au moins une valeur propre négative, c'est-à-dire $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x)) \notin \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
On a donc $B(x) \leqslant A(x)$, mais on n'a pas $p_\alpha(B(x)) \leqslant p_\alpha(A(x))$.
**L'application $p_\alpha$ n'est donc pas matriciellement croissante sur ]0;+∞[ si α >1.**

**Partie III**

**III.1) a)** Si X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, , alors ${}^tXA(t)X= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}(t)$ , donc ${}^tXAX$ est intégrable sur I comme somme et produit de fonctions intégrables sur I.

On a alors, par linéarité de l'intégrale, $\int_I {}^tXA(t)Xdt = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} x_k \int_I a_{ik}(t)dt = {}^tX \int_I A(t)dt\, X$

**III.1) b)** Si on note M=($m_{ij}$) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $f(t)M=(f(t)m_{ij})$ , donc tous les coefficients de cette matrice sont intégrables sur I car f est intégrable sur I. De plus, pour tous entiers i et j entre 1 et n, $\int_I f(t)m_{ij}dt = m_{ij}\int_I f(t)dt$ , c'est-à-dire

$$\int_I f(t)Mdt = \left(\int_I f(t)dt\right)M$$

**III.2) a)** Soit $\alpha \in ]0,1[$, et soit x > 0. Montrons que **l'intégrale F(x) =** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha}\,\mathbf{d}t$ **est bien définie:**

- remarquons que $1+xt \neq 0$ si x > 0 et $t \geqslant 0$, l'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$
- étude en 0: $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{t^\alpha}$ , dont l'intégrale converge en 0 (intégrale de Riemann avec $\alpha \in ]0,1[$)
- étude en $+\infty$: $\dfrac{x}{(1+xt)t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ , dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $\alpha+1>1$ )

**III.2) b)** En effectuant le changement de variable u = xt (du = xdt), on obtient les égalités suivantes:

F(x) = $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+u)u^\alpha}\,\mathrm{d}u = x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha}$

Posons $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha}$. on a alors $C>0$ (car la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{(1+u)u^\alpha}$ est continue strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ) et C vérifie F(x) = C $x^\alpha$

**III.2) c)** Soit t > 0, et soit S une matrice symétrique définie positive (donc toutes les valeurs propres de S sont strictement positives). Si on note spectre (S) = $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, et S = $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ la décomposition spectrale de S , alors spectre ($S^{-1} + tI_n$ ) = $\{\lambda_1^{-1} + t, \ldots, \lambda_p^{-1} + t\}$, donc **toutes les valeurs propres de** $S^{-1} + tI_n$ **sont strictement positives (car t > 0).**

On en déduit en particulier que $S^{-1} + tI_n$ est inversible, et que son inverse a pour décomposition spectrale

$$(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i)^{-1}+t} P_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i t} P_i$$

**III.2) d)** En utilisant la question III.1)b), on en déduit que $F(S) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i t} P_i \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}(S^{-1}+tI_n)^{-1}\mathrm{d}t$

**III.2) e)** Soit t > 0. On a les implications suivantes:

$A \leqslant B \Rightarrow B^{-1} \leqslant A^{-1} \Rightarrow B^{-1}+tI_n \leqslant A^{-1}+tI_n \Rightarrow (A^{-1}+tI_n)^{-1} \leqslant (B^{-1}+tI_n)^{-1}$, c'est-à-dire

$\forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathbf{{}^tX(A^{-1}+tI_n)^{-1}X \leqslant {}^tX(B^{-1}+tI_n)^{-1}X}$

On en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX \dfrac{1}{t^\alpha}(A^{-1}+tI_n)^{-1}X \leqslant {}^tX \dfrac{1}{t^\alpha}(B^{-1}+tI_n)^{-1}X$

Par croissance de l'intégrale, on a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} {}^tX \frac{1}{t^\alpha}(A^{-1}+tI_n)^{-1}X\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} {}^tX \frac{1}{t^\alpha}(B^{-1}+tI_n)^{-1}X\mathbf{d}t$, c'est-à-dire

${}^tX\ [\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}(A^{-1}+tI_n)^{-1}\mathrm{d}t\ ]X \leqslant {}^tX\ [\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}(B^{-1}+tI_n)^{-1}\mathrm{d}t\ ]$ X.

On a donc montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXF(A)X \leqslant {}^tXF(B)X$ ,c'est-à-dire $F(A) \leqslant F(B)$.

**La fonction F est donc matriciellement croissante sur ]0,+∞[..**

De plus, toujours sous l'hypothèse A $\leqslant$ B, on a $F(A) \leqslant F(B)$, ce qui est équivalent à $CA^{\alpha} \leqslant CB^{\alpha}$, c'est-à-dire $A^{\alpha} \leqslant B^{\alpha}$ (car $C < 0$)

**L'application $p_{\alpha}$ , si $\alpha \in$ ]0,1[, est donc matriciellement croissante sur ]0,+∞[.**

**<u>III.3) a)</u>** Soit x > 0. Soit X > 0. $\int_0^X \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) \mathrm{d}t$ = $\left[ \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) - \ln(x+t) \right]_0^X$ = $\ln\left( \frac{\sqrt{1+X^2}}{x+X} \right) + \ln(x)$ tend vers $\ln(x)$ lorsque X tend vers +∞.

**<u>III.3) b)</u>** On utilise à nouveau la décomposition spectrale S = $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$ , donc ln(S) = $\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{p} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i + t} \right) P_i dt$

Or $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + t} P_i$ est la décomposition spectrale de $(S + tI_n)^{-1}$, et comme $\sum_{i=1}^{p} P_i = I_n$, on peut écrire:

ln(S) = $\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - \left(S + tI_n\right)^{-1} \right) \mathrm{d}t$

**<u>III.3) c)</u>** Soient A et B dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, telles que A $\leqslant$ B.

On a alors $(B + tI_n)^{-1} \leqslant (A + tI_n)^{-1}$, d'où $\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \leqslant \frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1}$

$\forall$ **X** $\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t\boldsymbol{X} \left[ \frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1} \right] \boldsymbol{X} \leqslant {}^t\boldsymbol{X} \left[ \frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1} \right] \boldsymbol{X}$

En passant à l'intégrale, et en utilisant la question précédente, on obtient bien ln(A) $\leqslant$ ln(B), c'est-à-dire **ln est matriciellement croissante sur ]0,+∞[.**