CCP 2008 Filière PC. Mathématiques 2
Corrigé par Md Chehabi

Partie I

Pour tout nombre réel s, on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre $(\mathcal{E}_s)$ suivante :

$$(\mathcal{E}_s) \quad (1-x^2)\ y''(x) - 2(s+2)\ x\ y'(x) - 2(s+1)\ y(x) = 0$$

On note f_s la solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ qui vérifie les conditions initiales $f_s(0) = 0$ et $f_s'(0) = 1$.

I.1. Soit g_s la fonction définie sur $]-1,1[$ par $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$.

I.1.1. On a f_s est de classe C^2 sur $]-1,1[$, donc g_s est de classe C^2 sur $]-1,1[$.
On a $\forall x \in]-1,1[$, $g_s'(x) = f_s'(x) - f_s'(-x)$ et $g_s''(x) = f_s''(x) + f_s''(-x)$, et puisque f_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ alors

$$\begin{aligned}(1-x^2)\ g_s''(x) - 2(s+2)\ x\ g_s'(x) - 2(s+1)\ g_s(x) &= [(1-x^2)\ f_s''(x) - 2(s+2)\ x\ f_s'(x) - 2(s+1)\ f_s(x)] \\ &+ [(1-(-x)^2)\ f_s''(-x) - 2(s+2)\ (-x)\ f_s'(-x) - 2(s+1)\ f_s(-x)] = 0.\end{aligned}$$

Ainsi g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$.

I.1.2. On a $g_s(0) = 2f_s(0) = 0$ et $g_s'(0) = f_s'(0) - f_s'(0) = 0$.
g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ qui vérifie les conditions initiales $g_s(0) = 0$ et $g_s'(0) = 0$.
Or la fonction nulle est aussi solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ qui vérifie les mêmes conditions initiales. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz , on a $g_s = 0$.
Ainsi, $\forall x \in]-1,1[\ \ f_s(-x) = -f_s(x)$ et donc f_s est impaire.

I.2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et h_α la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$.
On a h_α est de classe C^2 sur $]-1,1[$, $\forall x \in]-1,1[\ \ h_\alpha'(x) = -2\alpha\ x\ (1-x^2)^{\alpha-1}$ et
$h_\alpha''(x) = -2\alpha\ (1-x^2)^{\alpha-1} + 4\alpha\ (\alpha-1)\ x^2\ (1-x^2)^{\alpha-1}$ donc

$$(1-x^2)\ h_\alpha''(x) - 2(s+2)\ x\ h_\alpha'(x) - 2(s+1)\ h_\alpha(x) = [-2(\alpha+s+1) + (4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1))x^2]\,(1-x^2)^{\alpha-1}.$$

$$\begin{aligned} h_\alpha \text{ est solution de } (\mathcal{E}_s) \text{ sur }]-1,1[&\Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \\ &\quad -2(\alpha+s+1) + (4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1))x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -2(\alpha+s+1) = 0 \text{ et } 4\alpha^2 + (6+4s)\alpha + 2(s+1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha = -(s+1).\end{aligned}$$

I.3. Soit u_s la fonction définie sur $]-1,1[$ par $u_s(x) = (1-x^2)^{s+1} f_s(x)$.

I.3.1. On a u_s est de classe C^2 sur $]-1,1[$, et
$\forall x \in]-1,1[\ \ u_s'(x) = -2(s+1)\ x\ (1-x^2)^s\ f_s(x) + (1-x^2)^{s+1}\ f_s'(x)$ et
$u_s''(x) = 2(s+1)(1-x^2)^{s-1}((1+2s)\ x^2 - 1)f_s(x) - 4(s+1)\ x\ (1-x^2)^s f_s'(x) + (1-x^2)^{s+1} f_s''(x)$.
Donc $\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)\ u_s''(x) + 2s\ x\ u_s'(x) = 0$.
Ainsi u_s' est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_s') \quad (1-x^2)\ y'(x) + 2s\ x\ y(x) = 0$$

I.3.2.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{E}'_s) \text{ sur }]-1,1[&\iff \forall x \in]-1,1[\quad y'(x) + \frac{2s\ x}{1-x^2}\ y(x) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ , } \forall x \in]-1,1[\quad y(x) = \lambda(1-x^2)^s. \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $(\mathcal{E}'_s)$ sur $]-1,1[$ sont les fonctions y_λ définies sur $]-1,1[$ par

$$y_\lambda(x) = \lambda(1-x^2)^s \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$

I.3.3. On a $u'_s(0) = f'_s(0) = 1$ et $u_s(0) = f_s(0) = 0$.
u'_s est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}'_s)$ donc d'après la question I.3.2, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[\quad u'_s(x) = \lambda(1-x^2)^s$.
De $u'_s(0) = 1$, on a $\lambda = 1$ et alors $\forall x \in]-1,1[\quad u'_s(x) = (1-x^2)^s$.
Puisque $u_s(0) = 0$ alors $u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s dt$ pour tout $x \in]-1,1[$.

I.4. Soit y une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, développable en série entière sur I. On note $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de y sur I.

I.4.1 On a y est la somme sur I d'une série entière, donc y est de classe C^2 sur I et $\forall x \in I$, $y'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)c_n x^{2n-1}$, donc
$(1-x^2)\, y''(x) - 2(s+2)\, x\, y'(x) - 2(s+1)\, y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) \left[(2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n\right] x^{2n+1}$.
D'après l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur I, on a :

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)\left[(2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n\right] x^{2n+1} \iff \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathcal{E}_s) \text{ sur } I &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ (2n+3)c_{n+1} - (2n+2s+3)c_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3}\ c_n \end{aligned}$$

I.4.2 On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \dfrac{2s+2n+1}{2n+1}\ c_{n-1}$.
Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n = \frac{(2s+3)(2s+5)..........(2s+2n+1)}{3 \times 5 \times .... \times (2n+1)}\ c_0 = c_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2s+2k+1}{2k+1}$$

I.4.3 Supposons que $(\mathcal{E}_s)$ admet une solution polynômiale h impaire et non identiquement nulle sur un intervalle ouvert I contenant 0.
Alors il existe $m \in \mathbb{N}$, $(c_n)_{0 \le n \le m} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{m} c_n x^{2n+1}$.

Posons $\forall n \geq m+1,\ \ c_n = 0$.

On a $\forall x \in I,\ \ h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, donc h est développable en série entière sur I.

Ainsi, h est une fonction impaire, définie sur l'intervalle ouvert I contenant 0 , developpable en série entière sur I, donc d'après les questions I.4.1 et I.4.2, et du fait que h est non identiquement nulle, on a $c_0 \neq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = c_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2s+2k+1}{2k+1}.$$

Pour tout $n \geq m+1$, on a $c_n = 0$ alors $\prod\limits_{k=1}^{n}(2s+2k+1) = 0$, donc il existe $k \in [[1,n]]$ tel que $s = -k - \dfrac{1}{2}$ par suite $s \in \left\{-k - \dfrac{1}{2},\ k \in [[1,n]]\right\} \subset \left\{-k - \dfrac{3}{2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

Réciproquement, supposons que $s \in \left\{-k - \dfrac{3}{2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $s = -m - \dfrac{3}{2}$.

Considérons la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = c_0 \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2s+2k+1}{2k+1}$.

Puisque $2s + 2m + 3 = 0$ alors $\forall n \geq m+1$ on a $c_n = 0$.

Soit $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{m} c_n x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$, on a y est une fonction polynômiale impaire, non identiquement nulle et $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

D'après les questions I.4.1 et I.4.2 , on a y est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$.

Ainsi $(\mathcal{E}_s)$ admet des solutions polynômiales impaires et non identiquement nulles si et seulement si $s \in \left\{-k - \dfrac{3}{2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

I.4.4 On suppose que $s \notin \left\{-n - \dfrac{3}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ et que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ est une solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I et que $c_0 \neq 0$.

Alors d'après la question I.4.1, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{2s+2n+3}{2n+3}\ c_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \neq 0$.

- Si $x = 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^{2n+1}$ converge.
- Supposons $x \neq 0$, on applique la régle de D'Alembert, on a

$$\lim_{n\longmapsto+\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{2n+3}}{c_n x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\longmapsto+\infty} \frac{2s+2n+3}{2n+3}\ x^2 = x^2.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^{2n+1}$ est $R = 1$.

I.5. Considérons la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n x^{2n+1}$ où $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2s+2k+1}{2k+1}$.

- Si $s \in \left\{-n - \dfrac{3}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ alors son rayon de convergence est $R = +\infty$.
- Si $s \notin \left\{-n - \dfrac{3}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ alors d'après la question I.4.4, son rayon de convergence

est $R=1$.
Dans tous les cas $R \geq 1$.
Considérons la fonction y définie sur $]-1,1[$ par $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$.
D'après les questions I.4.1 et I.4.2, on a y est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ qui vérifie $y(0)=0$ et $y'(0)=c_0=1$.
D'autre part f_s est une solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur $]-1,1[$ qui vérifie $f_s(0)=0$ et $f_s'(0)=1$.
Donc d'après l'unicité assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a

$$\begin{aligned}\forall x \quad \in \quad]-1,1[\ f_s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}\\ &= \quad x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right]x^{2n+1}.\end{aligned}$$

I.6. D'après la question I.3., pour $u_s(x)=(1-x^2)^{s+1}f_s(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$
on a trouvé que $u_s(x)=\int_0^x (1-t^2)^s dt$ pour tout $x\in]-1,1[$.
Donc $\forall x\in]-1,1[$, $\int_0^x (1-t^2)^s dt=(1-x^2)^{s+1}f_s(x)$.
Soit $p\in\mathbb{N}$, pour $s=-p-\dfrac{3}{2}$, on a $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}}=\frac{f_{-(p+\frac{3}{2})}(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}$.

D'après la question I.5 on a pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f_{-(p+\frac{3}{2})}(x)=x+\sum_{n=1}^{p}\left[\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\prod_{k=1}^{n}2(k-(p+1))\right]x^{2n+1}$$

Posons $Q_p(x)=x+\sum\limits_{n=1}^{p}\left[\dfrac{2^n n!}{(2n+1)!}\prod\limits_{k=1}^{n}2(k-(p+1))\right]x^{2n+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On a Q_p est une fonction polynômiale impaire de degré $2p+1$ et
$\forall x\in]-1,1[,\quad \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{p+\frac{3}{2}}}=\frac{Q_p(x)}{(1-x^2)^{p+\frac{1}{2}}}$.
En particulier, pour tout $x\in]-1,1[$,
$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Q_0(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{Q_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-\frac{2}{3}x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Partie II

On considère la fonction β de la variable réelle x définie par :

$$\beta(x)=\int_0^1 (1-t^2)^x dt$$

II.1. la fonction $h_x : t\longmapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0,1[$.
On a $(1-t^2)^x \underset{x\mapsto 1^-}{\sim} 2^x(1-t)^x$ et la fonction $t\longmapsto(1-t)^x$ est intégrable sur $[0,1[$ si et seulement si $x>-1$.
Donc h_x est intégrable sur $[0,1[$ si et seulement si $x>-1$.

Ainsi le domaine de définition de β est $D_\beta =]-1, +\infty[$.

II.2. Considérons la fonction $h(x,t) = (1-t^2)^x$ pour tout $(x,t) \in]-1,+\infty[\times [0,1[$.
• On a h est continue sur $]-1,+\infty[\times [0,1[$.
• Soit $a \in]-1,+\infty[$.
$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times [0,1[\quad |h(x,t)| \leq (1-t^2)^a$ (car $1-t^2 \in]0,1]$),
et la fonction $t \longmapsto (1-t^2)^a$ est continue, positive et intégrable sur $[0,1[$.
Donc d'après un théorème du cours β est continue sur $]-1,+\infty[$.

On admettra que β est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in]-1,+\infty[$
$\beta'(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2)dt$

II.3. Soit $x \in]-1,+\infty[$, on a $\forall t \in]0,1[$, $\ln(1-t^2) < 0$ et $(1-t^2)^x > 0$
donc $(1-t^2)^x \ln(1-t^2) < 0$.
Comme β' est continue sur $]-1,+\infty[$, alors $\forall x \in]-1,+\infty[\quad \beta'(x) < 0$.
Ainsi β est strictement décroisssante sur $]-1,+\infty[$.

II.4.
II.4.1. Soit $x \in]-1,+\infty[$, on a $\beta(x+1) = \int_0^1 (1-t^2)^{x+1}dt$.
Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\beta(x+1) &= [t(1-t^2)^{x+1}]_0^1 + 2(x+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^x dt = 2(x+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^x dt \\ &= 2(x+1)\int_0^1 (t^2-1)(1-t^2)^x dt + 2(x+1)\int_0^1 (1-t^2)^x dt \\ &= -2(x+1)\beta(x+1) + 2(x+1)\beta(x)\end{aligned}$$

Donc $\beta(x+1) = \dfrac{2x+2}{2x+3}\beta(x)$.

II.4.2. On a $\beta(0) = \int_0^1 dt = 1$.
D'après la question II.4.1 on a $\forall x \in]-1,+\infty[\quad \beta(x) = \dfrac{2x+3}{2x+2}\beta(x+1)$.
Comme β est continue en 0 alors $\lim\limits_{x \longmapsto -1^+} \beta(x+1) = \beta(0) = 1$
et donc $\lim\limits_{x \longmapsto -1^+} \beta(x) = \lim\limits_{x \longmapsto -1^+} \dfrac{2x+3}{2x+2}\beta(x+1) = +\infty$.

II.4.3. D'après la question II.4.1, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta(n) = \dfrac{2n}{2n+1}\beta(n-1)$.
Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \beta(n) = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
On a la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$,donc

$$(2^n n!)^2 \sim (2^n)^2 \ (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad (2n+1)! \sim \sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}.$$

Puisque $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \longrightarrow \dfrac{1}{e}$, alors $\beta(n) \sim \dfrac{2n\pi}{(2n+1)\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
Par suite $\lim\limits_{n \longmapsto +\infty} \beta(n) = 0$.
β est décroissante sur $]-1,+\infty[$, donc $\forall x \in [2,+\infty[$ on a $\beta(E(x)+1) \leq \beta(x) \leq \beta(E(x))$
(où $E(x)$ désigne la partie entière de x).
Comme $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \beta(E(x)+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \beta(E(x)) = 0$ alors $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \beta(x) = 0$.

II.4.4. On a $\beta\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}dt=[\arcsin t]_0^1=\frac{\pi}{2}$.
(on peut aussi utiliser le changement de variable $t=\cos u$) .

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)=\frac{2n-1}{2n}\beta\left(-\frac{1}{2}+(n-1)\right)$.
On montre par récurrence que
$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \beta\left(-\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n-1)\times(2n-3)\times.....\times 3}{(2n)\times(2n-2)\times.....\times 2}\;\beta\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\;\frac{\pi}{2}$.

Partie III

Soient $\gamma>1$, $\gamma\notin\mathbb{N}$ et φ_γ la fonction 2π périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \varphi_\gamma(x)=|\cos x|^\gamma$$

On note $a_0(\gamma)+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n(\gamma)\cos nx+b_n(\gamma)\sin nx]$ la série de Fourier de φ_γ.

III.1.
III.1.1 On a φ_γ est continue, 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème de Dirichlet φ_γ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

III.1.2 On a φ_γ est paire sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*\ \ b_n(\gamma)=0$.
Soit $p\in\mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}a_{2p+1}(\gamma)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_\gamma(x)\cos(2p+1)x\ dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi_\gamma(x)\cos(2p+1)xdx+\int_0^{\pi}\varphi_\gamma(x)\cos(2p+1)xdx\right]\end{aligned}$$
On fait le changement de variable $u=x+\pi$, on a
$\int_{-\pi}^{0}\varphi_\gamma(x)\cos(2p+1)x\ dx=-\int_0^{\pi}\varphi_\gamma(u)\cos(2p+1)u\ du$
donc $a_{2p+1}(\gamma)=0$.

III.2. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.\cos 2px\ dx$.
III.2.1
$$\begin{aligned}\forall p\in\mathbb{N},\ I_p-I_{p+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.(\cos 2px-\cos(2p+2)x)\ dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.\sin x.\sin(2p+1)x\ dx.\end{aligned}$$

III.2.2 Une intégration par parties donne :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.\sin x.\sin(2p+1)x)\ dx=\left[-\frac{1}{\gamma+1}\sin(2p+1)x.\cos^{\gamma+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\gamma+1}x.\cos(2p+1)x\ dx.$$
Donc $I_p-I_{p+1}=2\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.\cos x.\cos(2p+1)x\ dx$.

III.2.3 On a
$$\begin{aligned}\forall p\in\mathbb{N},\ I_p+I_{p+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.(\cos 2px+\cos(2p+2)x)\ dx\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\gamma x.\cos x.\cos(2p+1)x)\ dx.\end{aligned}$$
En utilisant le résultat de la question III.2.2, on a $\forall p\in\mathbb{N},\ I_p-I_{p+1}=\frac{2p+1}{\gamma+1}\left(I_p+I_{p+1}\right)$.

III.2.4 On fait le changement de variable $t = \sin u$, on a

$$\beta(x) = \int_0^1 (1-t^2)^x.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^x.\cos u.du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2x+1} du$$

Donc $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma u.du = \beta(\gamma')$ où $\gamma' = \dfrac{\gamma-1}{2} > 0.$

III.2.5 En utilisant le résultat de la question III.2.3, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $I_{p+1} = \dfrac{\gamma - 2p}{\gamma + 2(p+1)} I_p$.

Donc par récurrence, on montre que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \dfrac{\gamma(\gamma-2)......(\gamma-2(p-1))}{(\gamma+2).........(\gamma+2p)}.I_0$.

On a $I_0 = \beta(\gamma')$, donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \dfrac{\gamma}{\gamma+2p}.A_p(\gamma).\beta(\gamma')$

où $A_p(\gamma) = \prod\limits_{k=1}^{p-1} \dfrac{\gamma-2k}{\gamma+2k} = \prod\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{\gamma-2k}{\gamma+2k}$.

III.3 On a $a_0(\gamma) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x|^\gamma \, dx = \dfrac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|^\gamma \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma \, dx \right]$.

On fait le changement de variable $u = \pi - x$, on a $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|^\gamma \, du$.

Donc $a_0(\gamma) = \dfrac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|^\gamma \, dx = \dfrac{4}{\pi} \, I_0 = \dfrac{4}{\pi}\beta(\gamma')$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p}(\gamma) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x|^\gamma \cos 2px \, dx = \dfrac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^\gamma \cos 2px \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|^\gamma \cos 2px \, dx \right]$.

On fait le changement de variable $u = \pi - x$, on a

$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x^\gamma| \cos 2px \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\pi-u)|^\gamma \cos 2p(\pi-u) \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^\gamma \cos 2pu \, du.$

Donc $a_{2p}(\gamma) = \dfrac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^\gamma \cos 2px \, dx = \dfrac{4}{\pi} \, I_p = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{\gamma}{\gamma+2p}.A_p(\gamma).\beta(\gamma')$.