CCP 2008 Filière PC. Mathématiques 1
Corrigé par Md Chehabi

Partie I

I.1 Soient $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$ des réels positifs distincts ou non, on a $S = diag(\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres λ_1, $\lambda_2, ..., \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres, alors $(X-1)(X+1)$ divise son polynôme caractéristique P. Comme P est de degré 2 et de coefficient dominant $(-1)^2 = 1$, alors $P = X^2 - 1$.

b) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1.

I.3 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres -1, 0 et 1.

I.4 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité -1, -1, 1 et 1.

I.5 Supposons qu'il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité -1, -1 et 0. Alors son polynôme caractéristique est $\chi_S(X) = -X(X+1)^2 = -X^3 - 2X^2 - X$, d'autre part on sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_S(X) = (-1)^3X^3 + (-1)^2Tr(S)X^2 + aX + \det S$ donc $Tr(S) = -2$, ce qui est absurde car les éléments de la diagonale de S sont tous positifs .

I.6 a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $H = \begin{pmatrix} a & b & & \dots & b \\ b & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & b \\ b & \cdots & & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

⊙ Si $n = 1$ alors $H = (a)$ donc $Sp(H) = \{a\}$.
⊙ On suppose $n \geq 2$.

On a $H = (a-b)I_n + bJ_n$ où $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $rgJ_n = 1$ donc $\dim KerJ_n = n - 1$, alors 0 est une valeur propre de J_n d'ordre au moins $n - 1$.

On a $V_n = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n donc $SpJ_n = \{0, n\}$ avec 0 est une valeur propre de J_n d'ordre de multiplicité $n-1$ et n est une valeur propre simple de J_n.
On a $HV_n = (a + (n-1)b)V_n$ et pour tout $V \in KerJ_n \backslash \{0\}$, on a $HV = (a-b)V$
Ainsi $(a+(n-1)b)$ est une valeur propre simple de H et $(a-b)$ est une valeur propre de H d'ordre de multiplicité $n-1$.
Enfin les valeurs popres de H sont $(a+(n-1)b)$ et $(a-b)$.

Autre méthode
Pour $n \geq 2$.
Soit λ une valeur propre de H, alors il existe $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ non nul tel que $HX = \lambda X$, donc

$$\begin{cases} ax_1 + b\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n + b\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq n}}^{n} x_i = \lambda x_n \end{cases}$$

• Si $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ alors $\begin{cases} (a-b)x_1 = \lambda x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a-b)x_n = \lambda x_n \end{cases}$.
Comme il existe $i \in [[1, n]]$ tel que $x_i \neq 0$ alors $\lambda = a - b$.
• Si $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \neq 0$ posons $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ on a $\begin{cases} (a-b)x_1 + bu = \lambda x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a-b)x_n + bu = \lambda x_n \end{cases}$ donc $(a-b)u + nbu = \lambda u$ par suite $\lambda = a + (n-1)b$.
Donc $Sp(H) \subset \{a-b,\, a+(n-1)b\}$.
Réciproquement
Pour $X = (1, -1, 0, ..., 0)$, on a $HX = (a-b)X$ donc $a - b \in Sp(H)$.
Pour $X = (1, 1, ..., 1)$, on a $HX = (a+(n-1)b)X$ donc $a + (n-1)b \in Sp(H)$.
Ainsi $Sp(H) = \{a-b,\, a+(n-1)b\}$.

b) On prend la même matrice H de I.6 a) avec $n \geq 2$, $a = 1$ et $b = \dfrac{-1}{2(n-1)}$.
On a d'après I.6 a) $Sp(H) = \left\{\dfrac{2n-1}{2(n-1)}, \dfrac{1}{2}\right\}$.
H est une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives mais H n'est pas positive .

Partie II

II.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Posons $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a $(X \mid Y)_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY = {}^tYX$.

b) D'après a) et du fait que S est symétrique on a
$(X \mid SY)_n = {}^tXSY = {}^tX{}^tSY = {}^t(SX)Y = (SX \mid Y)_n$.
c) On a $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tPP = I_n$.

$\|PX\|_n^2 = {}^t(PX)PX = {}^tX{}^tPPX = {}^tXX = \|X\|_n^2$ par suite $\|PX\|_n = \|X\|_n$.

II.2 Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $(U,V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$.

a) Posons $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$, $U = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ et $V = (v_i)_{1\leq i\leq p}$.
On a $(Z \mid T)_{n+p} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum\limits_{i=1}^{p} u_iv_i = (X \mid Y)_n + (U \mid V)_p$.

b) Si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U, V orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$ alors $(X \mid Y)_n = 0$ et $(U \mid V)_p = 0$, donc $(Z \mid T)_{n+p} = 0$ par suite Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) La réciproque est fausse.

On prend $X = (1,0,...,0)$ et $Y = (1,0,...,0)$ de $\mathbb{R}^n$ et $U = (-1,0,...,0)$ et $V = (1,0,...,0)$ de $\mathbb{R}^p$. On a $(X \mid Y)_n = 1$, $(U \mid V)_p = -1$ et $(Z \mid T)_{n+p} = 0$.
Donc Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$ alors que X et Y ne le sont pas.
Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et
$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S. On pose $\alpha = \max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$.

II.3 a) Soit $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on a
$(DY \mid Y)_n = {}^tY\,{}^tDY = {}^tY\,DY = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha y_i^2 = \alpha \|Y\|_n^2$.

b) Puisque $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec multiplicité, alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tPDP$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, on a
$(SX \mid X)_n = {}^tX{}^tSX = {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = (D(PX) \mid PX)_n \leq \alpha \|PX\|_n^2$
Comme $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors d'après II.1 c) $\|PX\|_n = \|X\|_n$ donc $(SX \mid X)_n \leq \alpha \|X\|_n^2$ et donc $\dfrac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

c) • Si X est un vecteur propre de S associé à α alors $SX = \alpha X$ et $X \neq 0$ donc $\dfrac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} = \dfrac{\alpha \|X\|_n^2}{\|X\|_n^2} = \alpha$.
• Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S telle que pour tout $i \in [[1,n]]$, X_i vecteur propre associé à la valeur propre de λ_i.
Soit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iX_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ où $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{(SX \mid X)_n}{\|X\|_n^2} = \alpha$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha - \lambda_i)x_i^2 = 0$. Comme $\alpha = \max\limits_{1\leq i\leq n} \lambda_i$ alors pour tout $i \in [[1,n]]$, $(\alpha - \lambda_i)x_i^2 = 0$.
Posons $I = \{\ i \in [[1,n]]\ ,\ x_i \neq 0\ \}$, on a $X = \sum\limits_{i\in I} x_iX_i$ et pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \alpha$ donc $SX = \sum\limits_{i\in I} x_i\lambda_iX_i = \alpha \sum\limits_{i\in I} x_iX_i = \alpha X$.
Ainsi X est un vecteur propre de S associé à la valeur propre α.

II. 4 Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geq 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\|_n = 1\}$ et $C = E \cap \Sigma$.

a) Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = (x_i^{(k)})_{1\leq i\leq n}$, on a $\|X_k - X\|_n \underset{k\longmapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc pour tout $i \in [[1, n]]$, $\left(x_i^{(k)} - x_i\right)^2 \underset{k\longmapsto+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $i \in [[1, n]]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_i^{(k)} \geq 0$ et $x_i^{(k)} \underset{k\longmapsto+\infty}{\longrightarrow} x_i$ donc $x_i \geq 0$ par suite $X \in E$.
Donc E est fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\|_n = 1\}$ est la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc Σ est un fermé, borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a $C = E \cap \Sigma$ est l'intesection de deux fermés de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc C est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$C \subset \Sigma$ et Σ est borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors C est borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi C est un fermé, borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) Posons $S = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $SX = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
où pour tout $i \in [[1, n]]$, $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k$.
donc $\varphi(X) = (SX \mid X)_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\ x_i x_k$
Ainsi $\varphi(X)$ est un polynôme en les coefficients de X, donc φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) On pose $\mu = \sup\limits_{X\in C} \varphi(X)$.
On a C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc C est un compact de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a φ est continue sur le compact C donc φ est bornée et atteint ses bornes sur C, alors $\mu = \sup\limits_{X\in C} \varphi(X)$ existe et il existe $X_0 \in C$ tel que $\mu = \varphi(X_0)$.

e) On a d'après II.3 b) $\forall X \in C$, $\varphi(X) = (SX \mid X)_n \leq \alpha \|X\|_n^2 = \alpha$, donc $\mu = \varphi(X_0) \leq \alpha$.

II.5 On suppose dans cette question que $S \geq 0$.

a) Si $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α, on pose $W = (|x_i|)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

i) Il est clair que $W \in E$.
On a $\|W\|_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|_n^2 = 1$, donc $W \in \Sigma$ par suite $W \in C$.

ii) Posons $S = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a d'après II.4.c) $\varphi(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\ x_i x_k$,
donc $|\varphi(X)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k} x_i x_k| = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, |x_i|\, |x_k| = \varphi(W)$.

iii) On a d'après II.3 c) puisque X est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α alors $\varphi(X) = (SX \mid X)_n = \alpha \|X\|_n^2 = \alpha$ et d'après II.5 a) ii)
$|\varphi(X)| \leq \varphi(W)$, donc $|\alpha| \leq \varphi(W)$. Comme $W \in C$ alors $\varphi(W) \leq \mu$ et alors $|\alpha| \leq \mu$.

b) On a d'après II.4 e) et II.5 a) iii) $|\alpha| \leq \mu \leq \alpha$, donc $\alpha \geq 0$ et $\mu = \alpha$.
D'aprés II.4 d) il existe $X_0 \in C$ tel que $\mu = \varphi(X_0)$.
Posons $X_0 = (\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$ et $W_0 = (|\gamma_i|)_{1\leq i\leq n}$, on a $W_0 \geq 0$ et d'après II.5 a) $W_0 \in C$ et $\mu = |\varphi(X_0)| \leq \varphi(W_0) \leq \mu$ donc $\varphi(W_0) = \mu = \alpha$.
D'après II.3 c) W_0 est un vecteur propre positif de S associé à la valeur propre α.

c) Soit $i \in [[1, n]]$ et X_i un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre λ_i.
Posons $X_i = (\delta_j)_{1\leq j\leq n}$ et $W_i = (|\delta_j|)_{1\leq j\leq n}$, on a d'après II.5 a)
$W_i \in C$ et $|\varphi(X_i)| \leq \varphi(W_i)$.
Comme $\varphi(X_i) = \lambda_i \left\|X_i\right\|_n^2 = \lambda_i$ alors $|\lambda_i| = |\varphi(X_i)| \leq \varphi(W_i) \leq \mu = \alpha$.

Partie III

III.1 Soit $i \in [[2, n]]$, on a $M_s Z_i = \begin{pmatrix} AX_i \\ sY_1\,{}^tX_1X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_i Z_i$ car ${}^tX_1X_i = 0$.
Ainsi Z_i est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre α_i.
Soit $j \in [[2, p]]$, on a $M_s T_j = \begin{pmatrix} sX_1\,{}^tY_1Y_j \\ BY_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_j Y_j \end{pmatrix} = \beta_j T_j$ car ${}^tY_1Y_j = 0$.
Ainsi T_j est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre β_j.

III 2 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $V(\theta) = \begin{pmatrix} (\cos\theta)X_1 \\ (\sin(\theta)Y_1 \end{pmatrix}$.
a) On a d'après II.2 a)
$\left\|V(\theta)\right\|_{n+p}^2 = \left\|(\cos\theta)X_1\right\|_n^2 + \left\|(\sin(\theta)Y_1\right\|_p^2 = (\cos\theta)^2 \left\|X_1\right\|_n^2 + (\sin(\theta)^2 \left\|Y_1\right\|_p^2 = 1.$
Donc $V(\theta)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

b) On a $\chi_{M_0}(X) = \det(A - X\ I_n)\det(B - X\ I_p) = \chi_A(X).\chi_B(X)$.
Donc $Sp(M_0) = Sp(A) \cup Sp(B) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_p\}$ comptées avec multiplicité.

c) On suppose que $s \neq 0$. On note θ_1 l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que
$\tan\theta_1 = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$. On pose $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{2}$.

i) Raisonnons par absurde, supposons que $\theta_1 = 0$ alors
$\tan\theta_1 = 0$ donc $\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2} = 0$ par suite $s = 0$, ce qui est absurde.
Donc $\theta_1 \neq 0$.

ii) On a $\tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ donc $\tan\theta_1 \times \tan\theta_2 = -1$.

iii) On a $\tan\theta_1 = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2}}{2s}$
donc $\left(2s\tan\theta_1 - (\beta_1 - \alpha_1)\right)^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4s^2$
et puisque $\tan\theta_1 \neq 0$ alors $\alpha_1 + s\tan\theta_1 = \beta_1 + \dfrac{s}{\tan\theta_1}$.
D'autre part $\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$, donc $\alpha_1 + s\tan\theta_2 = \beta_1 + \dfrac{s}{\tan\theta_2}$.
Ainsi θ_1 et θ_2 vérifient l'équation : $\alpha_1 + s\tan\theta = \beta_1 + \dfrac{s}{\tan\theta}$.

iv) Soit $i \in \{1,2\}$, on a $M_sV(\theta_i) = \begin{pmatrix} (\cos\theta_i)AX_1 + s(\sin\theta_i)X_1\ {}^tY_1Y_1 \\ s(\cos\theta_i)Y_1\ {}^tX_1X_1 + (\sin\theta_i)BY_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (\ \alpha_1 + s\tan\theta_i)(\cos\theta_i)X_1 \\ \left(\beta_1 + \dfrac{s}{\tan\theta_i}\right)(\sin\theta_i)Y_1 \end{pmatrix}$$

car ${}^tY_1Y_1 = {}^tX_1X_1 = 1$, $AX_1 = \alpha_1X_1$ et $BY_1 = \beta_1Y_1$.

D'après III.2 c) iii) on a $\alpha_1 + s\tan\theta_i = \beta_1 + \dfrac{s}{\tan\theta_i}$ donc $M_sV(\theta_i) = (\ \alpha_1 + s\tan\theta_i)V(\theta_i)$.

Comme $V(\theta_i) \neq 0$ alors $V(\theta_i)$ est un vecteur propre de M_s associé à la valeur propre $\mu_i = \alpha_1 + s\tan\theta_i$

On remplace $\tan\theta_i$ par sa valeur on trouve :

$\mu_1 = \dfrac{1}{2}\left(\beta_1 + \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + 4s^2}\right)$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{2}\left(\beta_1 + \alpha_1 - \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + 4s^2}\right)$.

v) On a

- $\forall (i,j) \in [[2,n]]^2 \quad (Z_i \mid Z_j)_{n+p} = (X_i \mid X_j)_n + (0 \mid 0)_p = \delta_{i,j}$.
- $\forall (i,j) \in [[2,p]]^2 \quad (T_i \mid T_j)_{n+p} = (0 \mid 0)_n + (Y_i \mid Y_j)_p = \delta_{i,j}$.
- $\forall (i,j) \in [[2,n]] \times [[2,p]] \quad (Z_i \mid T_j)_{n+p} = (X_i \mid 0)_n + (0 \mid Y_j)_p = 0$.
- Soit $k \in \{1,2\}$

$\forall i \in [[2,n]] \ \ (V(\theta_k)|\ Z_i))_{n+p} = ((\cos\theta_k)X_1\ |X_i)_n + ((\sin\theta_k)Y_1 \mid 0)_p = (\cos\theta_k)(X_1\ |X_i)_n = 0$.

$\forall j \in [[2,p]] \ \ (V(\theta_k)|\ T_j))_{n+p} = ((\cos\theta_k)X_1\ |0)_n + ((\sin\theta_k)Y_1 \mid Y_j)_p = (\sin\theta_k)(Y_1 \mid Y_j)_p = 0$.

$(V(\theta_k)|\ V(\theta_k))_{n+p} = ((\cos\theta_k)X_1 \mid (\cos\theta_k)X_1)_n + ((\sin\theta_k)Y_1 \mid (\sin\theta_k)Y_1)_p$

$\qquad = (\cos\theta_k)^2(X_1 \mid X_1)_n + (\sin\theta_k)^2(Y_1 \mid Y_1)_p = 1$

- $(V(\theta_1)|\ V(\theta_2))_{n+p} = ((\cos\theta_1)X_1 \mid (\cos\theta_2)X_1)_n + ((\sin\theta_1)Y_1 \mid (\sin\theta_2)Y_1)_p$

$= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos\theta_1\sin\theta_2\left(\dfrac{1}{\tan\theta_2} + \tan\theta_1\right) = 0$.

Ainsi $(V(\theta_1), V(\theta_2), Z_2, ..., Z_n, T_2, ..., T_p)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^{n+p}$ de cardinal $n+p$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^{n+p}$ formeé de vecteurs propres de M_s et les valeurs propres de M_s sont $\mu_1, \mu_2, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_2, ..., \beta_p$ comptées avec multiplicité.

vi) Si on prend $s = 0$ dans les formules de μ_1 et μ_2 on trouve :

$\mu_1 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_1 + |\alpha_1 - \beta_1|)$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_1 + -\alpha_1 - \beta_1)$.

Si $\beta_1 \leq \alpha_1$ alors $\mu_1 = \alpha_1$ et $\mu_2 = \beta_1$.

Si $\alpha_1 \leq \beta_1$ alors $\mu_1 = \beta_1$ et $\mu_2 = \alpha_1$.

On retrouve ainsi deux valeurs propres de M_0.

Partie IV

On considère la propriètè (P_n) suivante :

Si $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq ..... \geq \lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \geq 0$$

alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}+)$ tel que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

IV.1 Si λ_1 un élément de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 \geq 0$, prenons $A = (\lambda_1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On a $A \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}+)$ et λ_1 est la valeur propre de A, donc (P_1) est vraie .

IV.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (P_n) soit vraie et soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifient :
$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq ..... \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1}$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq 0$.
Posons $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1}$.

a) On a $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq -(\lambda_2 + ... + \lambda_n) \geq 0$ car pour tout $i \in [[2, n]]$ on a $\lambda_i \leq 0$.
On a $a \geq 0 \geq \lambda_2 \geq ..... \geq \lambda_n$ et $a + \lambda_2 + ... + \lambda_n \geq 0$
Puisque la propriété (P_n) est vraie, alors il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}+)$ tel que $a, \lambda_2, ..., \lambda_n$ soient les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
Dans la suite de la question IV.2, A désignera une telle matrice.

b) On a $a = \max(\{\lambda_i, i \in [[2, n]]\} \cup \{a\})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}+)$, donc d'après II.5 b), A admet un vecteur propre positif X associé à la valeur propre a.
On prend $X_1 = \dfrac{1}{\|X\|_n} X$, on a X_1 est un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre a.

c) Pour s réel, soit M_s la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s\,{}^tX_1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) M_s est bien de la forme (1) avec $p = 1$, $B = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y_1 = (1) \in \mathbb{R}$.
Car $sY_1\,{}^tX_1 = s\,{}^tX_1$ et $sX_1\,{}^tY_1 = sX_1$.

ii) On a le valeurs propres de A sont $a, \lambda_2, ..., \lambda_n$ et la seule valeur propre de B est $\beta_1 = 0$.
• Si $s = 0$, d'après III.2 b) (ou directement) les valeurs propres de M_s sont $0, a, \lambda_2, ..., \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
• Si $s \neq 0$,d'après III.2 c) v) on a puisque $\beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = a$ alors

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4s^2}\right) \text{ et } \mu_2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4s^2}\right)$$

et les valeurs propres de M_s sont $\mu_1, \mu_2, \lambda_2, ..., \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

iii) Supposons que $s = \sqrt{-\lambda_1 \lambda_{n+1}}$.
• Si $s = 0$ alors $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_{n+1} = 0$.
- Si $\lambda_1 = 0$ alors $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}$ et si $\lambda_{n+1} = 0$ alors $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} = \lambda_1$
Donc d'après IV.2 c) ii) les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.
• Si $s \neq 0$ on a

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4s^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_{n+1} + \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_{n+1})^2 - 4\lambda_1\lambda_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_{n+1} + |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|\right) = \lambda_1.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - |\lambda_1 - \lambda_{n+1}|\right) = \lambda_{n+1}.$$

Donc d'après IV.2 c) ii) les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.
Dans tous les cas les valeurs propres de M_s sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}$ comptées avec multiplicité.

De plus $M_s \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R}+)$.
Donc la propriété (P_{n+1}) est vraie .
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) est vraie.

IV. 3 Exemple.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $\chi_A(X) = -(X+1)(X-6)(X+3)$ donc $Sp(A) = \{-3, -1, 6\}$.

b) Posons $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.
On a $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \geq 0$.
Posons $a = \lambda_1 + \lambda_4 = 6$
On a les valeurs propres de la matrice A de la question IV. 3 a) sont a, λ_2et λ_3.
On applique IV. 3 .
Cherchons X_1 un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$AX = 6X \iff \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Donc $X_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ est un vecteur propre positif unitaire de A associé à la valeur propre $a = 6$.

Prenons $s = \sqrt{-\lambda_1\lambda_4} = 3\sqrt{3}$ et $B = M_s = \begin{pmatrix} A & sX_1 \\ s\,{}^tX_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

On a B est une matrice carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4, admettant pour valeurs propres $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$.