Corrigé CCP PC maths 2 2006

Partie I

I.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \dfrac{(m+n)!}{m!}$.
Ce résultat est encore vrai si $n = 0$.

I.2
Remarquons tout d'abord que, comme α n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha) \neq 0$.

Soit α fixé et $x \in \mathbb{R}$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\, n! P_n(\alpha)}$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |\, P_n(\alpha)\,| = +\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{2n} = +\infty$,
$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{x^{2n}}{n!}\right)$.
La série de terme général $\left(\dfrac{x^{2n}}{n!}\right)$ est une série à termes positifs, convergente de somme $\operatorname{ch} x$.
La série de terme général u_n est donc absolument convergente et $f_\alpha(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$

I.3
I.3.1 f_α est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et à ce titre est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n}\, n!\, P_n(\alpha)}.$$
$$f_\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n-1)!\, P_n(\alpha)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{2k+1}\, k!\, P_{k+1}(\alpha)}\,. \qquad (\textit{avec le changement d'indice } k = n-1).$$
$$f_\alpha''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) x^{2n-2}}{2^{2n-1}\,(n-1)!\, P_n(\alpha)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)x^{2k}}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)} \qquad (\textit{avec le changement d'indice } k = n-1).$$
puis
$$x f_\alpha''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! P_{k+1}(\alpha)}.$$
On en déduit que pour tout réel x,
$$x^2 f_\alpha''(x) + (2\alpha+1) f_\alpha'(x) + x f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{2k+1} \text{ avec}$$
$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k &= \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k+1}\, k!\, P_{k+1}(\alpha)} + \frac{(-1)^{k+1}(2\alpha+1)}{2^{2k+1}\, k!\, P_{k+1}(\alpha)} + \frac{(-1)^k}{2^{2k}\, k!\, P_k(\alpha)}\\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\, k!\, P_{k+1}(\alpha)}\left(-(2k+1) - (2\alpha+1) + 2(\alpha+k+1)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 f_\alpha''(x) + (2\alpha+1) f_\alpha'(x) + x f_\alpha(x) = 0}$$

I.3.2 Réciproquement, soit y,une solution à valeurs réelles de (E_α), paire et développable en série entière sur $]-R, R[$ où $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

$\forall x \in]-R,R[,\quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\in\mathbb{R}$.
On a alors pour tout $x\in]-R,R[$,
$xy(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$
$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1}=\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)a_{k+1}x^{2k+1}$ (*changement d'indice* $k=n-1$)
$y''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2}$ et $xy''(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)(2k+1)a_{k+1}x^{2k+1}$
(*changement d'indice* $k=n-1$)
Soit finalement, comme y est solution de (E_α),
$\forall x\in]-R,R[$

$$xy''(x)+(2\alpha+1)y'(x)+xy(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}[(2k+2)(2k+1)a_{k+1}+(2\alpha+1)(2k+2)a_{k+1}+a_k]x^{2k+1}=0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle,

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad (2k+2)(2k+1)a_{k+1}+(2\alpha+1)(2k+2)a_{k+1}+a_k=0$$

On a donc $\forall k\in\mathbb{N},\quad 4(k+1)(k+1+\alpha)a_{k+1}=-a_k$, puis comme pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k+1+\alpha\neq 0$ (car $\alpha\notin\mathbb{Z}_-^*$),

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad a_{k+1}=-\frac{1}{(4(k+1)(k+1+\alpha)}\,a_k$$

puis,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{-1}{4k(k+\alpha)}\right)a_0$$

Soit

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\frac{(-1)^n}{4^n(n!)P_n(\alpha)}.a_0$$

On en déduit que $y=a_0f_\alpha$ et que $R=+\infty$.

I.4 Remarquons que puisque $\alpha\notin\mathbb{Z}$, Les résultats des questions précédentes sont valables pour α et pour $-\alpha$.
En particulier $f_{-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par théorèmes d'opérations, g_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
I.4.1
Pour tout $x\in]0,+\infty[$,
$g_\alpha(x)=x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x)$
$g'_\alpha(x)=-2\alpha x^{-2\alpha-1}f_{-\alpha}(x)+x^{-2\alpha}f'_{-\alpha}(x)$.
$g''_\alpha(x)=2\alpha(\alpha+1)x^{-2\alpha-2}f_{-\alpha}(x)-4\alpha x^{-2\alpha-1}f'_{-\alpha}(x)+x^{-2\alpha}f''_{-\alpha}(x)$.
Puis, comme $f_{-\alpha}$ est solution sur $\mathbb{R}_*^+$ de $E_{-\alpha}$,

$$xg''_\alpha(x)+(2\alpha+1)g'_\alpha(x)+g_\alpha(x)=x^{-2\alpha}\left(xf_{-\alpha}(x)+(1-2\alpha)f'_{-\alpha}(x)+f_{-\alpha}(x)\right)=0$$

g_α est donc solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_*^+$.

I.4.2 Les fonctions f_α et $f_{-\alpha}$ sont continues en 0 et $f_\alpha(0)=f_{-\alpha}(0)=1$.

$g_\alpha(x) \underset{x\to 0+}{\sim} x^{-2\alpha}$ et comme $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$ et on a soit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_\alpha(x) = +\infty$ si $\alpha > 0$, soit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_\alpha(x) = 0$ si $\alpha < 0$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\alpha(x) = 1$, on en déduit que les fonctions f_α et g_α sont deux solutions indépendantes de (E_α) sur $]\,0,+\infty\,[$.
En effet si le système (f_α, g_α) était lié, comme la fonction f_α n'est pas la fonction nulle, il existerait $c \in \mathbb{R}$ tel que $g_\alpha = cf_\alpha$.
Remarquons également que $c \neq 0$ car $g_\alpha \neq 0$. On aurait alors :
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_\alpha(x) = c \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\alpha(x) = c \notin \{+\infty, 0\}$, ce qui est absurde.
Comme (E_α) est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et sans point singulier dans $]\,0,+\infty\,[$, l'ensemble S_α des solutions sur $]\,0,+\infty\,[$ de (E_α) est un espace vectoriel de dimension 2 dont on connait un système libre de cardinal 2 : (f_α, g_α) .
(f_α, g_α) est donc un système fondamental de solutions de $(E_\alpha$ sur $]\,0,+\infty\,[$ (*ou encore une base de* S_α) et les solutions de (E_α) sur $]\,0,+\infty\,[$ sont les fonctions $y\ :]\,0,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x > 0, \quad y(x) = Af_\alpha(x) + Bg_\alpha(x).$$

I.4.3 Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $]-\infty, 0\,[$ dans $\mathbb{R}$. Notons $z : \left|\begin{array}{ccc}]\,0,+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(-x) \end{array}\right.$.
z est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\forall x \in]\,0,+\infty\,[$, $z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$.
z est donc solution de (E_α) sur $]\,0,+\infty\,[$ si et seulement si

$$\forall x > 0, \qquad xy''(-x) - (2\alpha+1)y'(-x) + xy(-x) = 0 \qquad (1)$$

Comme l'application $x \mapsto -x$ établit une bijection de $]\,0,+\infty\,[$ sur $]-\infty, 0\,[$, (1) équivaut à

$$\forall t \in]-\infty, 0\,[\qquad -(ty''(t) + (2\alpha+1)y'(t) + ty(t)) = 0$$

Finalement, z est solution de (E_α) sur $]\,0,+\infty\,[$ si et seulement si y est solution de (E_α) sur $]-\infty, 0\,[$.
En utilisant la description de S_α établie en **1.4.3**, on en déduit que les solutions de (E_α) sur $]-\infty, 0\,[$ sont les fonctions $y\ :]-\infty,0\,[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t < 0, \quad y(t) = Af_\alpha(-t) + Bg_\alpha(-t).$$

I.5
I.5.1 j_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0,+\infty\,[$ par théorèmes d'opérations et pour tout $x \in]\,0,+\infty\,[$,
$j_\alpha(x) = x^\alpha f_\alpha(x)$
$j'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} f_\alpha(x) + x^\alpha f'_\alpha(x)$
$j''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} f_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} f'_\alpha(x) + x^\alpha f''_\alpha(x)$

$$\begin{aligned}
&x^2 j''_\alpha(x) + xj'_\alpha(x) + (x^2-\alpha^2)j_\alpha(x)\\
&= \quad x^{\alpha+1}[xf''_\alpha(x) + (2\alpha+1)f'_\alpha(x) + xf_\alpha(x)] + x^\alpha f_\alpha(x)\left(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \alpha^2\right)\\
&= \quad 0 \quad \text{car } f_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]\,0,+\infty\,[
\end{aligned}$$

On en déduit que j_α est solution de (B_α) sur $]\,0,+\infty\,[$.
$j_{-\alpha}$ est donc solution de $(B_{-\alpha}) = (B_\alpha)$ sur $]\,0,+\infty\,[$.

I.5.2
De plus, comme $\alpha \neq 0$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_\alpha(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_{-\alpha}(x)$,

si $\alpha > 0$, $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_\alpha(x) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_{-\alpha}(x) = +\infty \end{cases}$ et si $\alpha < 0$, c'est l'inverse : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_\alpha(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_{-\alpha}(x) = 0 \end{cases}$

Comme précédemment, les fonctions j_α et $j_{-\alpha}$ sont non nulles. Si le système $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ était lié, il existerait $b \in \mathbb{R}^*$ tel que $j_{-\alpha} = bj_\alpha$.

On aurait alors $\left|\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_{-\alpha}(x)\right| = \left|b\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} j_\alpha(x)\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$, ce qui est impossible.

On en déduit que $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est un système libre de deux solutions sur $]\,0, +\infty\,[$ de l'équation (B_α). Comme (B_α) est une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène et sans point singulier dans $]\,0, +\infty\,[$, l'ensemble des solutions sur $]\,0, +\infty\,[$ de (B_α) est un espace vectoriel de dimension 2 dont $(j_\alpha, j_{-\alpha})$ est un système libre donc une base.

Les solutions de (B_α) sur $]\,0, +\infty\,[$ sont donc les fonctions $y :]\,0, +\infty\,[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x > 0 \qquad y(x) = Aj_\alpha(x) + Bj_{-\alpha}(x)$$

Pour déterminer les solutions de (B_α) sur $]-\infty, 0\,[$, on peut procéder comme en **I.4.3**

A une fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ de $]-\infty, 0\,[$ dans $\mathbb{R}$, on associe la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0, +\infty\,[$: $z : x \mapsto y(-x)$.

y est solution de (B_α) sur $]-\infty, 0\,[$ si et seulement si

$\forall x < 0, \qquad x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0$, ce qui équivaut à :

$\forall x < 0, \qquad x^2z''(-x) - xz'(-x) + (x^2 - \alpha^2)z(-x) = 0$, ce qui équivaut encore à

$\forall t > 0, \qquad t^2z''(t) + tz'(t) + (t^2 - \alpha^2)z(t) = 0$

car $x \mapsto -x$ établit une bijection de $]-\infty, 0\,[$ sur $]\,0, +\infty\,[$.

On en déduit que y est solution de (B_α) sur $]-\infty, 0\,[$ si et seulement si z est solution de (B_α) sur $]\,0, +\infty\,[$ si et seulement si $z \in \mathrm{Vect}(j_\alpha, j_{-\alpha})$ et finalement

y est solution de (B_α) sur $]-\infty, 0\,[$ si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x < 0 \qquad y(x) = Aj_\alpha(-x) + Bj_\alpha(-x).$$

PARTIE II

α est un réel fixé strictement supérieur à $-1/2$.

Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1[$, $g(x, t) = (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ de sorte que

$$h_\alpha : x \mapsto \int_0^1 g(x, t)\mathrm{d}t$$

II.1. On vérifie que le théorème de dérivation sous le signe intégral du cours s'applique :

• Pout $t \in [0, 1[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De même $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -t^2(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, 1[$ et on a, car $\alpha - 1/2 > 0$, pour tout $t \in [0, 1[$: $|\, g(x, t)\,| = (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} |\cos(xt)\,| \leq (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot 1$.

Et $(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} = (1 + t)^{\alpha - \frac{1}{2}}(1 - t)^{\alpha - \frac{1}{2}} \underset{t \to 1^-}{\sim} 2^{\alpha - \frac{1}{2}}(1 - t)^{\alpha - \frac{1}{2}} = 2^{\alpha - \frac{1}{2}} \dfrac{1}{(1 - t)^{-\alpha + \frac{1}{2}}}$

Or $\alpha > -1/2$ donc $-\alpha + \frac{1}{2} < 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{(1 - t)^{-\alpha + \frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ (Riemann).

D'où $\boxed{\varphi : t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \text{ est intégrable sur } [0, 1[}$

$\boxed{\text{Par comparaison la fonction } t \mapsto g(x,t) \text{ est intégrable sur } [0,1[.}$

• (*domination*) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin(xt)$ est continue sur $[0,1[$ et on a pour tout $t \in [0,1[$: $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}|\sin(xt)| \leq 1 \cdot (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \varphi(t)$.
On a vu que $t \mapsto \varphi(t)$ est intégrable sur $[0,1[$.
Donc non seulement la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[0,1[$, mais de plus h_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
• Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt)$ est continue sur $[0,1[$ et on a la domination :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in [0,1[, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

et la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est bien intégrable sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto h_\alpha(x) \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.2.1. D'après la question précédente $h''_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt)\mathrm{d}t$ d'où par linéarité de l'intégrale :
$xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}x\cos(xt)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}x\cos(xt)\mathrm{d}t$

II.2.2. On se place sur $[0,b] \subset [0,1[$ et on réalise une intégration par parties :
$u(t) = (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}, u'(t) = -2t(\alpha+\frac{1}{2})(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ et $v'(t) = x\cos(xt), v(t) = 0 + \sin(xt)$:
$\displaystyle\int_0^b (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}x\cos(xt)\mathrm{d}t = (1-b^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\sin(xb) - 0 + (2\alpha+1)\int_0^b (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}t\sin(xt)\mathrm{d}t$
Puis en faisant tendre $b \to 1^-$, on obtient :
$xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = (2\alpha+1)\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}t\sin(xt)\mathrm{d}t$
$= -(2\alpha+1)\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -(2\alpha+1)h'_\alpha(x)$.

$$\boxed{\text{Donc } h_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}\text{ .}}$$

II.3. On sait que pour tout réel u, $\cos(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$. Avec $u = xt \in \mathbb{R}$, on obtient :
$h_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}t^{2n}\mathrm{d}t$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}t^{2n}$.
• Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1[$ et sont dominées par la fonction φ du 1i) donc intégrables sur $[0,1[$.
• La série de fonction $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ (vers $t \mapsto g(x,t)$ qui est continue sur $[0,1[$).
Remarque : en revanche il n'y a pas *a priori* convergence normale sur $[0,1[$.
• *Étude de la série des intégrales des modules.*
$\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$.
$I_0(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$ est une constante par rapport à n, et la série numérique $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (sa somme vaut $\mathrm{ch}(x)$) donc $\sum \displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on a en posant $I_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n} \mathrm{d}t$:

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}$$

II.4. h_α est une solution de (E_α), paire et développable en série entière à l'origine donc d'après I.3, on a $\boxed{h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha}$.

II.5. On a donc le développement pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_\alpha(0) \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} x^{2n}$.

Par unicité du développement en série entière, on a en remarquant $h_\alpha(0) = I_0(\alpha)$:

$I_0(\alpha) \dfrac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} = \dfrac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!}$, $\boxed{\text{donc } I_n(\alpha) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} I_0(\alpha)}$

PARTIE III

III.1. *Laplacien en polaire* $\widetilde{F}(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
En dérivant par rapport à r[1], on a en allégeant les écritures :
$\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial y}$.
En dérivant une deuxième fois par rapport à r :
$\dfrac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)$
$= \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} + \cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
F étant de classe $\mathcal{C}^2$, on obtient (par le théorème de Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

De même en dérivant par rapport à θ : $\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial y}$.
Puis : $\dfrac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial x} - r\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial y} + +r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} + r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
Le calcul donne alors :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot 1 + 0\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot 1 = \Delta F(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

III.2.1. Il existe r_0 tel que $f(r_0) \neq 0$ (car sinon F serait identiquement nulle). On a donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $g(\theta) = \widetilde{F}(r_0,\theta)/f(r_0)$ et donc $\boxed{g \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

III.2.2. On a ici $\dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial r} = f'(r)g(\theta)$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2} = f''(r)g(\theta)$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2} = f(r)g''(\theta)$ donc

$$0 = \Delta F + \omega^2 F = \frac{1}{r^2}\big(f(r)g''(\theta) + rf'(r)g(\theta) + r^2 f''(r)g(\theta) + r^2\omega^2 f(r)g(\theta)\big) \qquad (L)$$

En utilisant ceci avec $f(r_0) \neq 0$, on obtient un réel $\lambda = \dfrac{r_0 f'(r_0) + r_0^2 f''(r_0) + r_0^2\omega^2 f(r_0)}{f(r_0)}$ (indépendant de θ et de r) tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(ii) \qquad g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0$$

En injectant ceci dans l'équation (L), on obtient :
$\big(-\lambda f(r) + rf'(r) + r^2 f''(r) + r^2\omega^2 f(r)\big)\, g(\theta) = 0$ et en utilisant un θ_0 tel que $g(\theta_0) \neq 0$:

$$(i) \qquad \forall r > 0, \quad r^2 f''(r) + rf'(r) + (r^2\omega^2 - \lambda)f(r) = 0$$

III.2.3. D'après III.2.1. g est 2π-périodique et n'est pas la fonction nulle.
Si on avait $\lambda < 0$, les solutions (non nulles) de $y'' + \lambda y = 0$ ne seraient pas périodiques ($\theta \mapsto A\exp(\sqrt{-\lambda}\theta) + B\exp(-\sqrt{-\lambda}\theta)$).
Pour $\lambda = 0$. $\lambda = 0^2$.
Pour $\lambda > 0$, les solutions sont les fonctions de la forme $\theta \mapsto \alpha\cos\sqrt{\lambda}\theta + \beta\sin\sqrt{\lambda}\theta$. On peut les mettre sous la forme $A\cos(\sqrt{\lambda}\theta + \phi)$. Avec A non nul, les fonctions de ce type sont périodiques ET de période $T = 2\pi/\sqrt{\lambda}$. Il existe dont un entier naturel non nul p tel que $pT = 2\pi$ ce qui donne $\sqrt{\lambda} = p$ puis $\lambda = p^2$.

$$\boxed{\lambda \text{ est nécessairement de la forme } p^2 \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$$

[1] Les hypothèses du texte sont suffisantes pour pouvoir le faire...

III.2.4. $\boxed{\text{Pour } p \neq 0, \text{ la forme générale est } \theta \mapsto A\cos(p\theta) + B\sin(p\theta)...}$

Pour $p = 0$, $g'' = 0$ donc g est affine. Or g est périodique, donc g est constante (et toutes les constantes conviennent).

$$\boxed{\text{Pour } p = 0, \text{ les solutions pour } g \text{ sont les fonctions constantes.}}$$

III.3.1.$\omega = 0$ et $\lambda = 0$, (i) devient $r^2 f''(r) + r f'(r) = 0$. La résolution (sur $]0, +\infty[$) donne $f'(r) = C\mathrm{e}^{-\ln(r)} = \dfrac{C}{r}$ puis

$$\boxed{f : r \mapsto C\ln(r) + D \text{ où } C \text{ et } D \text{ sont des constantes.}}$$

III.3.2. $\omega = 0$ et $\lambda = p^2 \neq 0$, (i) devient $r^2 f''(r) + r f'(r) - p^2 f(r) = 0$.
On regarde les fonctions puissances $y : r \mapsto r^\alpha$: $r^2 y''(r) + r y'(r) - p^2 y(r) = r^\alpha(\alpha(\alpha-1) + \alpha - p^2)$.
$y : r \mapsto r^\alpha$ est solution de cette équation différentielle si, et seulement si, $\alpha^2 - p^2 = 0$.
Nous avons deux solutions $r \mapsto r^p$ et $r \mapsto r^{-p}$ de cette équation différentielle linéaire d'ordre deux (sans points singuliers sur $]0, +\infty[$), elles ne sont pas colinéaires donc les solutions sont les fonctions :

$$\boxed{f : r \mapsto C r^p + D r^{-p} \text{ où } C \text{ et } D \text{ sont des constantes.}}$$

III.4. On calcule sans peine $f_1'(r) = \dfrac{1}{\omega} f'\left(\dfrac{r}{\omega}\right)$, $f_1''(r) = \dfrac{1}{\omega^2} f''\left(\dfrac{r}{\omega}\right)$ puis

$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) + (r^2 - p^2) f_1(r) = \dfrac{r^2}{\omega^2} f''\left(\dfrac{r}{\omega}\right) + \dfrac{r}{\omega} f'\left(\dfrac{r}{\omega}\right) + (r^2 - p^2) f\left(\dfrac{r}{\omega}\right) = 0$ d'après l'équation (i) évaluée en $r/\omega \in]0, +\infty[$.

$$\boxed{f_1 \text{ est solution de l'équation } (B_p).} \text{ (étudiée à la partie I...)}$$