Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x \mid y)$ et $||x||$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

PARTIE I

I.1 Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que : $(x \mid y) = {}^tXY = {}^tYX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur z de F, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^tE_i Z$.

ii) En déduire $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^tE_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $||p(z)|| \leqslant ||z||$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^\perp$.

b) Établir l'égalité : $\lambda||u||^2 = ||r(u)||^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

c) Montrer que : $\mathrm{Ker}\,(p \circ r) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, r$ et $\mathrm{Im}\,(p \circ r) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, r$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m-k$.

a) Montrer que les matrices A, B, C, D vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A \ , \ AB + BD = B \ , \ CB + D^2 = D \ , \ {}^tA = A \ , \ {}^tB = C \ , \ {}^tD = D$$

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
ii) ${}^tCC = 0$.
iii) $C = 0$.
iv) p et r commutent.

PARTIE II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$||f(x_0) - v|| = \min_{x \in E} ||f(x) - v||$$

Dans la suite x_0 sera appelée une *pseudo-solution* de l'équation :

$$f(x) = v \qquad (*)$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation $(*)$ admet une pseudo-solution unique.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si pour tout x appartenant à E : $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$. Ecrire sous forme matricielle l'équation $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si :

$${}^tAAX_0 = {}^tAV$$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $(*)$: $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

PARTIE III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1 a) Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y' \ , \ (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \times (\operatorname{Im} f)^\perp$$

b) Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.

c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f.

III.2 Déterminer le noyau et l'image de g.

III.3 a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

III.4 Premier exemple : On prend $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

III.5 Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g. (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).

c) En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E.

III.6 Deuxième exemple : On prend $E = F = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

Fin de l'énoncé