Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

C.C.P. 2006, filière PC, première épreuve

• Partie I

1. La base $\mathscr{B}$ étant orthonormale, on sait par le cours que $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, où $n = \dim E$ et où les x_i et les y_i sont les coordonnées de x et y dans $\mathscr{B}$. Sous forme matricielle, cela s'écrit $(x \mid y) = {}^t XY = {}^t YX$.

2. a) D'après le cours, $p(z) = \sum_{i=1}^{k} (e_i \mid z)\, e_i$.

   b) i) Sous forme matricielle, l'égalité du a) devient $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} {}^t E_i Z\, E_i$, mais ${}^t E_i Z$ peut-être vu aussi bien comme un scalaire que comme une matrice de taille (1,1), ce qui permet d'écrire ${}^t E_i Z\, E_i = E_i {}^t E_i\, Z$, d'où le résultat.

   ii) Étant valable pour tout Z, l'égalité précédente signifie précisément que $M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i$.

   c) Par définition de p, les vecteurs $p(z)$ et $z - p(z)$ sont orthogonaux, donc $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geqslant \|p(z)\|^2$.

3. a) Posons $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$.
   Soient E_1 et E_2 les matrices de e_1 et e_2 dans la base canonique.
   Les vecteurs e_1 et e_2 sont unitaires et orthogonaux et on vérifie immédiatement que $M = E_1 {}^t E_1 + E_2 {}^t E_2$.
   On en déduit d'après 2., que M est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal π sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

   b) On sait déjà que (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}\,\pi$. Posons $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$ et $e_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$.
   Il est immédiat que (e_3, e_4) est une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\,\pi)^\perp$, c'est-à-dire de $\mathrm{Ker}\,\pi$.

4. a) $u = \dfrac{1}{\lambda}\, p\big(r(u)\big) \in \mathrm{Im}\, p = H$, d'où $p\big(r(u) - \lambda u\big) = (p \circ r)(u) - \lambda p(u) = \lambda u - \lambda u = 0$, donc $r(u) - \lambda u \in H^\perp$.

   b) Selon a), $0 = \big(u \mid r(u) - \lambda u\big) = \big(u \mid r(u)\big) - \lambda \|u\|^2$.
   Mais $r(u) \in K$ et $u - r(u) \in K^\perp$, donc $\big(u \mid r(u)\big) = \big(r(u) \mid r(u)\big) = \|r(u)\|^2$, donc $\|r(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.

   c) Compte tenu du 2.c), le b) montre que les valeurs propres non nulles de $p \circ r$ sont dans $]0, 1]$, d'où le résultat.

5. a) D'une part, $(p \circ r)^2 = p \circ r \circ p \circ r = p \circ p \circ r \circ r = p \circ r$; d'autre part, p et r étant symétriques, pour $(x, y) \in F^2$:
   $$\big((p \circ r)(x) \mid y\big) = \big(r(x) \mid p(y)\big) = \big(x \mid (r \circ p)(y)\big) = \big(x \mid (p \circ r)(y)\big).$$
   Ainsi, $p \circ r$ est un projecteur symétrique, c'est-à-dire un projecteur orthogonal.

   b) Évidemment $\mathrm{Sp}(p \circ r) = \{0, 1\}$ puisque $p \circ r$ est un projecteur non nul distinct de Id_F ($\mathrm{Im}(p \circ r) \subset \mathrm{Im}\, p = H$).

   c) - $\mathrm{Ker}(p \circ r) = \mathrm{Ker}(r \circ p)$ contient évidemment $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, r$, donc contient aussi $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, r$.
   Si $u \in \mathrm{Ker}(p \circ r)$, alors $r(u) \in \mathrm{Ker}\, p$ et $u - r(u) \in \mathrm{Ker}\, r$, donc $u \in \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, r$.
   - $\mathrm{Im}(p \circ r) = \mathrm{Im}(r \circ p)$ est évidemment inclus dans $\mathrm{Im}\, p$ et dans $\mathrm{Im}(r)$, donc aussi dans $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, r$.
   Si $u \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, r$, alors $u = p(u) = p\big(r(u)\big)$, donc $u \in \mathrm{Im}(p \circ r)$.

6. a) Un calcul par blocs donne $R^2 = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{pmatrix}$ et ${}^t R = \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix}$.
   Mais $R^2 = R$ car r est un projecteur et ${}^t R = R$ car r est autoadjoint et la base considérée est orthonormale.
   L'identification des blocs donne alors les six égalités demandées.

   b) Deux multiplications par blocs donnent $PR = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $RP = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

   i) $\Longrightarrow$ ii) : A est symétrique d'après a), donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$; de plus l'expression de PR montre que le spectre de A est inclus dans le spectre réel de PR, qui est le spectre de $p \circ r$, et est donc inclus dans $\{0, 1\}$.
   Il en résulte que $A^2 = A$ puis, d'après les égalités du a), que $BC = {}^t CC = 0$.

   ii) $\Longrightarrow$ iii) : la somme des carrés des coefficients de C est la trace de ${}^t CC$, qui est nulle, donc $C = 0$.

   iii) $\Longrightarrow$ iv) : $C = 0$ implique $B = 0$ d'après a). Le résultat est alors évident sur les expressions de PR et RP.

   iv) $\Longrightarrow$ i) : a été vu au 5.

- **Partie II**

1. $f(x)$ décrit $\operatorname{Im} f$ quand x décrit E et on sait que le vecteur de $\operatorname{Im} f$ le plus proche de v est le projeté orthogonal v' de v sur $\operatorname{Im} f$; les vecteurs x_0 satisfaisant à l'égalité demandée sont donc exactement les antécédents de v' par f.

2. Avec la notation du 1., lorsque f est injective, v' n'a qu'un antécédent, d'où le résultat.

3. x_0 est pseudo-solution de $(*)$ si et seulement si $f(x_0) = v'$, ce qui équivaut à $v - f(x_0) \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, ou encore à : $\forall x \in E,\ \big(f(x) \mid f(x_0) - v\big) = 0$.

4. $\big(f(x) \mid f(x_0) - v\big) = 0$ s'écrit matriciellement ${}^t(AX)(AX_0 - V) = 0$, ou encore ${}^tX{}^tAAX_0 = {}^tX{}^tAV$.
   Cette égalité est vérifiée pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (où $n = \dim E$) si et seulement si ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

5. On calcule ${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et ${}^tAV = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   La résolution du système ${}^tAAX = {}^tAV$ donne les pseudo-solutions cherchées : $x = (a, 1/2, a)$, a réel quelconque.

6. a) $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2 = \|f(\lambda,\mu) - c\|^2$, où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ est définie par $f(\lambda,\mu) = \lambda a + \mu b$.
   Le problème posé équivaut donc à la recherche des pseudo-solutions de l'équation $(*)$: $f(x) = c$.
   La matrice A de f dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$.

   b) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si (a,b) est une famille libre.

   c) On calcule ${}^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a \mid b) \\ (a \mid b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tAV = \begin{pmatrix} (a \mid c) \\ (b \mid c) \end{pmatrix}$.
   La résolution du système de Cramer $\begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a \mid b) \\ (a \mid b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \mid c) \\ (b \mid c) \end{pmatrix}$ conduit à la solution :
   $$\lambda = \frac{\|b\|^2\,(a \mid c) - (a \mid b)(b \mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a \mid b)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\|a\|^2\,(b \mid c) - (a \mid b)(a \mid c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a \mid b)^2}.$$
   Remarque : (a,b) étant supposée libre, on savait à l'avance par 2. et 6.b) que $(*)$ possèdait une pseudo-solution unique ; ce fait se retouve directement par la non-nullité du déterminant du système précédent, puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte pour deux vecteurs non colinéaires.

- **Partie III**

1. a) D'abord, on peut écrire d'une manière unique $y = z + y'$, avec $z \in \operatorname{Im} f$ et $y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   Ensuite, $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ étant un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$, on sait que f induit un isomorphisme de $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ sur $\operatorname{Im} f$ et il existe par conséquent un unique $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ tel que $z = f(x)$.

   b) L'unicité du couple (x, y') a été démontrée au a) en même temps que son existence.

   c) Soient $(y_1, y_2) \in F^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de g, $y_1 = f\big(g(y_1)\big) + y_1'$ et $y_2 = f\big(g(y_2)\big) + y_2'$, avec $g(y_1)$ et $g(y_2)$ dans $(\operatorname{Ker} f)^\perp$, y_1' et y_2' dans $(\operatorname{Im} f)^\perp$.
   On en déduit $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = f\big(\alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2)\big) + (\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2')$. Comme $\alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2) \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, cette égalité montre que $g(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 g(y_1) + \alpha_2 g(y_2)$; g est bien linéaire.

2. - $0_E \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ donc $g(y) = 0_E$ si et seulement si y peut s'écrire $f(0_E) + y'$ avec $y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, ce qui équivaut à $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$. Ainsi, $\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   - Par définition de g, $\operatorname{Im} g \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Inversement, si $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, la décomposition triviale $f(x) = f(x) + 0_F$, où $0_F \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, montre que $g\big(f(x)\big) = x$, donc que $x \in \operatorname{Im} g$. Ainsi, $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

3. a) On a déjà remarqué au 2. que si $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, alors $(g \circ f)(x) = x$; d'autre part, si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $(g \circ f)(x) = 0$ de façon évidente. On en déduit que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ puisque ces deux endomorphismes de E coïncident sur deux sous-e.v. supplémentaires.

   b) On raisonne comme au a). Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $y' = 0$ (notation du 1.), donc $y = f\big(g(y)\big) + 0 = (f \circ g)(y)$.
   Si $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, $g(y) = 0$ d'après 2., donc $(f \circ g)(y) = 0$. $f \circ g$ est donc le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} f$.

4. Ici, f est surjective et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,-1,1)\big)$, donc $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est le plan vectoriel d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
Selon la définition de g, étant donné $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on recherche $x = (x_1, x_2, x_3) \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ tel que $f(x) = y$.
Cela conduit au système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \end{cases}$ puis à $x_1 = \dfrac{2y_1 - y_2}{3}$, $x_2 = \dfrac{y_1 + y_2}{3}$, $x_3 = \dfrac{-y_1 + 2y_2}{3}$.
La matrice de g dans les bases canoniques est donc $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. a) - $x \in \operatorname{Ker} f \iff \forall y \in E,\ \big(f(x) \mid y\big) = 0 \iff \forall y \in E,\ \big(x \mid f(y)\big) = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
- Ensuite, $\operatorname{Im} f = \big((\operatorname{Im} f)^\perp\big)^\perp = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

b) Soit (λ, x) un couple propre de f. Distinguons deux cas :
- si $\lambda = 0$, alors $x \in \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} g$, donc $g(x) = 0$.
- si $\lambda \neq 0$, alors $x = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$, donc $g(x) = \frac{x}{\lambda}$ par définition de g.

Dans les deux cas, x est bien vecteur propre de g.

c) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f ; d'après b), ceux-ci sont aussi des vecteurs propres de g. Ainsi, g est orthodiagonalisable, donc g est symétrique.

6. D'après la question précédente, toute base propre de f est aussi une base propre de g, avec conservation de la valeur propre 0 et remplacement des valeurs propres non nulles par leur inverse.
On trouve $\chi_A = X^3 - 9X^2 + 18X = X(X-3)(X-6)$. Le calcul des vecteurs propres conduit ensuite à :

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}{}^tP, \text{ avec } P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}).$$

On en déduit la matrice B de g relativement aux bases canoniques :

$$B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}{}^tP = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$