CCP - PC – 2005 - math 2

Corrigé par Sylvie Darrieu-Bonnet

I.1 Les équations E_λ et $E_{-\lambda-1}$ sont égales, ce qui autorise à restreindre l'étude à $\lambda \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

I.2 On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$, dont la somme S soit solution de E_λ sur $]-R,R[$.

S est de classe C^2 sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme à tout ordre sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[,\ \ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ ,S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n x^{n-1}\ \text{ et }\ S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\ .$$

S est solution de E_λ sur $]-R,R[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left([n(n+1)-\lambda(\lambda+1)]a_n+(n+1)^2 a_{n+1}\right)x^n=0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur $]-R,R[$, ces assertions sont équivalentes à : $\forall n \in IN,\ a_{n+1}=\dfrac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n$

I.3.1 Une solution polynomiale de degré d est développable en série entière, ses coefficients sont nuls à partir du rang $d+1$ et son coefficient d'indice d est non nul. D'après la question précédente, une condition nécessaire pour que E_λ admette des solutions polynomiales de degré d est $(\lambda+d+1)(\lambda-d)=0$ et $a_d\neq 0$.

On montre que cette condition est suffisante (par récurrence sur $n\geq d$, « $a_n=0$ » et par récurrence sur $n\leq d$, « $a_n\neq 0$ »).

Le rayon de convergence d'une telle série entière est infini, ce qui achève de prouver que E_λ admet des solutions polynomiales de degré d si et seulement si $\boxed{\lambda=d}$.

En effet, le terme $\lambda+d+1$ ne peut pas s'annuler pour $d\in IN$ et $\lambda \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

I.3.2 Lorsque $\lambda=d$, les solutions développables en série entière sont les fonctions polynomiales déterminées par $\forall x\in]-\infty,\infty[,\ P(x)=\sum_{n=0}^{d} a_n x^n$ avec

$\forall n\leq d-1,\ a_{n+1}=\dfrac{(d+n+1)(d-n)}{(n+1)^2}a_n$.

Pour que $P(0)=1$, il faut et il suffit que $a_0=1$.

On montre alors par récurrence sur $n\leq d$ que $\forall n\leq d,\ a_n=\begin{pmatrix}n+d\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ n\end{pmatrix}$.

Il existe donc une unique solution polynomiale de degré d telle que $P(0)=1$. Il s'agit de φ_d définie par $\boxed{\forall x\in]-\infty,\infty[,\ \varphi_d(x)=\sum_{n=0}^{d}\begin{pmatrix}n+d\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ n\end{pmatrix}x^n}$

I.3.3 En particulier $\boxed{\forall x\in IR,\ \varphi_1(x)=1+2x}$.

I.3.4 $\dfrac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{2x+1}$ et $\dfrac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(2x+1)^2}$

φ_1 est une solution de E_1 qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. On peut donc chercher les solutions de E_1 sous la forme : $y = z\varphi_1$.
On trouve que les solutions de E_1 sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions
$\boxed{x \to k_1\left(2+(2x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)+k_2(2x+1)}$, où k_1 et k_2 sont des constantes réelles arbitraires.
I.4.1 Il faut comprendre que *y* est une solution développable en série entière de E_λ, non identiquement nulle, et donc que ses coefficients vérifient la condition établie en **I.2** . Après avoir montré par récurrence sur *n* que les coefficients de la série entière sont non nuls dès que $a_0 \neq 0$, on peut appliquer à cette série entière la règle de d'Alembert. Son rayon de convergence est égal à 1. Il est donc strictement positif, et ceci achève de prouver que E_λ admet des solutions développables en série entière auvoisinage de zéro.
I.4.2 D'après **I.4.1** et **I.2** , les solutions développables en série entière de E_λ sont les fonctions déterminées par $\forall x \in]-1,1[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $\forall n \in IN$, $a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n$.
Pour qu'une telle fonction prenne la valeur 1 en 0, il faut et il suffit que $a_0 = 1$.
Il existe donc une unique solution de E_λ développable en série entière telle que $y(0)=1$, et c'est la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in IN,\ a_n = \frac{1}{(n!)^2}\prod_{k=-(n-1)}^{n}(\lambda+k)$.

I.4.3 En particulier, $\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in IN$, $\boxed{a_n = \frac{1}{(n!)^2}\prod_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$.On peut aussi écrire $\forall n \in IN$, $\boxed{a_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\right)^2}$

Et $\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\boxed{\forall n \in IN, a_n = \frac{1}{(n!)^2}\prod_{k=-n+1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)}$. On peut aussi écrire $\boxed{\forall n \in IN, a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2}$.

II.1 $\psi(x)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.
La fonction $g : \begin{cases} [-1,+\infty[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to IR \\ (x,t) \to \sqrt{1+x\sin^2 t} \end{cases}$ est continue. Pour tout $b \in [-1,+\infty[$, on a l'<u>hypothèse de domination</u> :
$\forall (x,t) \in [-1,b]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad 0 \le \sqrt{1+x\sin^2(t)} \le \sqrt{1+b\sin^2(t)}$
La fonction $t \to \sqrt{1+b\sin^2 t}$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction ψ est donc continue sur tout segment $[-1,b] \subset [-1,+\infty[$, donc continue sur $[-1,+\infty[$.

II.2 La fonction g est de classe C^{∞} sur $\left[-1,+\infty\right[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $k\in IN^*$

$\forall(x,t)\in\left[-1,+\infty\right[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}g(x,t)=(-1)^{k-1}\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(2j-1)}{2^k}.\frac{\sin^{2k}(t)}{\left(1+x\sin^2(t)\right)^{k-\frac{1}{2}}}$. (démonstration par récurrence sur k).

$\forall(a,b)\in\left[-1,+\infty\right[\times\left[-1,+\infty\right[$ tels que $a<b$, on a l'hypothèse de domination :

$\forall(x,t)\in[a,b]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(x,t)\right|\leq\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(2j-1)}{2^k}.\frac{\sin^{2k}(t)}{\left(1+a\sin^2(t)\right)^{k-\frac{1}{2}}}$ par une fonction continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On montre ensuite par récurrence sur $k\in IN^*$, en appliquant le théorème de Leibniz à g pour vérifier (HR_1), puis à $\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(x,t)$ grâce à l'hypothèse de domination ci-dessus :

(HR_k) La fonction ψ est de classe C^k sur tout segment $[a,b]\subset\left]-1,+\infty\right[$ et

$\forall t\in[a,b],\ \psi^{(k)}(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(x,t)dt$.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est donc de classe } C^{\infty} \text{ sur } \left]-1,+\infty\right[.}$

II.3.1 Question de cours : DSE de $(1+u)^{\alpha}$ avec $\alpha=\frac{1}{2}$.

II.3.2 Pour $x\in\left]-1,1\right[$, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $1+x\sin^2 t\in\left]-1,1\right[$.

Donc : $\sqrt{1+x\sin^2 t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\sin^{2n}(t)$. C'est la somme d'une série trigonométrique, dont on montre qu'elle est <u>normalement convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.</u> En effet,

$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\sin^{2n}(t)\right|\leq\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$.

Et la série $\sum\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$ est absolument convergente, car c'est la série entière dont la somme est $-\sqrt{1-x}$ et que $x\in\left]-1,1\right[$.

Donc $t\to\sqrt{1+x\sin^2(t)}$ est intégrable terme à terme sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Finalement, $\forall x\in\left]-1,1\right[$, $\psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(t)dt\right)x^n$.

II.3.3 Calcul classique des intégrales de Wallis. $\forall n\in IN\ ,\ \ I_n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \psi(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2x^n$

II.3.4 $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leq 1$ car c'est un produit de termes compris entre 0 et 1.

II.3.5 Pour $x\in\left]-1,1\right[$, pour $n\in IN$, on pose $v_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2x^n$.

Pour $n\in IN$, v_n est intégrable sur $\left]-1,1\right[$, car prolongeable par continuité sur $[-1,1]$.
La série $\sum v_n$ converge simplement sur $\left]-1,1\right[$, et sa somme ψ est continue sur $\left]-1,1\right[$.

Pour $n\geq 1$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}|v_n(x)|dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2|x|^n\,dx=\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2\frac{1}{2n-1}\frac{2}{n+1}$.

Donc $\forall n\geq 1,\ \displaystyle\int_{-1}^{1}|v_n(x)|dx\leq\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2.\frac{1}{2n-1}.\frac{2}{n+1}\leq\frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ d'après **II.3.4**.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ est convergente car à termes tous positifs et équivalente à la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, donc de même nature que cette dernière par théorème de comparaison des séries à termes tous positifs. La série $\displaystyle\sum\int_{-1}^{1}|v_n(x)|dx$ est donc convergente par théorème de comparaison des séries à termes tous positifs.
On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle de la somme d'une série de fonctions. On remarque que les termes d'indice impair sont nuls.

ψ est donc intégrable sur $\left]-1,1\right[$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1}\psi(x)dx=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2$.

II.4 D'après la question **I.4.3**, comme $\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{1}{2}\left((-1)\dfrac{2n-1}{2n-1}+\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$,

On en déduit : $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \ \psi(x)=\dfrac{1}{2}\left(\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)+\varphi_{\frac{1}{2}}(x)\right)$

II.5 Compte tenu des symétries de l'ellipse, $l=4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2\sin^2(t)+a^2\cos^2(t)}\,dt$.

Donc $l=4a\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2(t)}$ dt $=2a\pi\psi(-e^2)=a\pi\left[\varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2)+\varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2)\right]=\boxed{l}$

III.1 $f(t)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

La fonction $h:\begin{cases}[-1,1]\times IR \to IR \\ (x,t)\to \frac{1}{2}\sqrt{1+x\sin^2(t)}\end{cases}$ est continue. On a l'hypothèse de domination :

$\forall (x,t)\in[-1,1]\times IR,\quad 0\le \frac{1}{2}\sqrt{1+x\sin^2 t}\le \frac{1}{\sqrt{2}}$

La fonction $x\to \frac{1}{\sqrt{2}}$ est continue sur $[-1,1]$ donc intégrable sur $[-1,1]$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } IR \text{ et } 2\pi-\text{périodique car sin est } 2\pi-\text{périodique}}$.

III.2 La fonction h est également de classe C^1 sur $[-1,1]\times IR$.

$\forall (x,t)\in[-1,1]\times IR,\ \frac{\partial}{\partial t}h(x,t)=\frac{1}{2}\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin^2(t)}}$.

On a l'hypothèse de domination :

$\forall (x,t)\in[-1,1]\times IR,\ \left|\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)\right|\le \frac{1}{2}\frac{|x\sin(t)\cos(t)|}{\sqrt{1+x\sin^2(t)}}\le \frac{|\sin(t)\cos(t)|}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}=|\sin(t)|\le 1$.

La fonction $x\to 1$ est continue sur $[-1,1]$ donc intégrable sur $[-1,1]$.

La fonction f est donc de classe C^1 sur *IR*.

III.3 D'après le théorème de convergence normale des séries de Fourier, la fonction *f*, qui est $2\pi-$périodique et de classe C^1 sur *IR*, est égale à la somme de sa série de Fourier (qui converge normalement sur *IR*).

Or, la fonction *f* est également $\pi-$périodique, c'est-à-dire égale à sa translatée de π. Ses coefficients de Fourier vérifient donc : $c_n(f)=(-1)^n c_n(f)$ et donc ses coefficients de Fourier d'indices impairs sont nuls.

D'autre part, la fonction f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont nuls.

Finalement, $\forall x\in$ *IR*, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n}\cos(2nt)$, avec $\boxed{a_p=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(pt)\,\mathrm{dt}}$.

III.4 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt$**.** On remarque que $\forall t\in[0,\pi],\ f(\pi-t)=f(t)$**.**

Donc $a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x\sin^2(t)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{dt}$**.**

La fonction $(x,t)\to\sqrt{1+x\sin^2(t)}$ est continue sur le pavé $[-1,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Par théorème de Fubini, $a_0=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+x\sin^2(t)}\,\mathrm{dt}\right)\mathrm{d}x$, dans lequel on reconnaît l'intégrale de ψ sur $[-1,1]$.

Finalement, d'après **II.3.5**, $a_0=\int_{-1}^{1}\psi(x)dx=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2}\right)^2$

Fin du problème