$\boxed{\text{CCP Maths 2 – PC 2004 –}}$

Partie I –

1 Si z = 0, la série converge.

Si $z \neq 0$ $\forall\, n \geq 1$ $u_n = \left|n^{-z}z^n\right| \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-s}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$ On peut alors appliquer la règle de d'Alembert :

a Si $|z| < 1$, la série converge : $R \geq 1$.

b Si $|z| > 1$, la série diverge et $R \leq 1$.

Conclusion : $\boxed{R = 1.}$

2 Etude sur le cercle de convergence :

a Si $s > 1$ $\left|n^{-z}z^n\right| = n^{-s}$ et ($\Sigma\, n^{-s}$) est une série à termes positifs, convergente car s > 1 (règle de Riemann) : ($\Sigma\, n^{-s}\, z^n$) converge absolument, donc converge.

Si $s \leq 0$ $\left|n^{-s}z^n\right| = n^{-s} \geq 1$. La suite ($n^{-s}\, z^n$) ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

b Pour z = 1, ($\Sigma\, n^{-s}$) diverge car s < 1 (règle de Riemann)

c S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$: $S_n = z\dfrac{1-z^n}{1-z}$. Ce qui donne :

$|S_n| \leq 1.\dfrac{1+1^n}{|1-z|}$; or $1\text{-}z = (1\text{-}\cos(\vartheta)) - i\sin(\vartheta)$ et $|1\text{-}z|^2 = (1\text{-}\cos(\vartheta))^2 + \sin^2(\vartheta) = 2 - 2\cos(\vartheta)$

$= 4\sin^2(\vartheta/2)$. Conclusion : $|S_n| \leq \dfrac{1}{2|\sin(\vartheta/2)|}$

<u>2° méthode</u> : $z^n = \exp(in\vartheta)$; on factorise alors $\exp(in\vartheta/2)$ au numérateur, $\exp(i\vartheta/2)$ au dénominateur ; $S_n = z\dfrac{e^{in\vartheta/2}}{e^{i\vartheta/2}}\dfrac{e^{-in\vartheta/2}-e^{in\vartheta/2}}{e^{-i\vartheta/2}-e^{i\vartheta/2}} = ze^{i(n-1)\vartheta/2}\dfrac{-2i\sin(n\vartheta/2)}{-2i\sin(\vartheta/2)}$; ainsi

$|S_n| = \left|\dfrac{\sin(n\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}\right| \leq \dfrac{1}{|\sin(\vartheta/2)|}$

$S_k - S_{k-1} = z^k$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}S_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{-s}S_k$ en prenant k-1 pour nouvel indice dans la 2° somme, et en utilisant $S_0 = 0$. On regroupe alors les termes de même indice : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z^k = \sum_{k=1}^{n}\left(k^{-s}-(k+1)^{-s}\right)S_k + n^{-s}S_n$.

La suite (S_n) est bornée et s > 0 : $\lim n^{-s}\, S_n = 0$.

$\forall\, k \geq 1$ $\left|[\, k^{-s} - (k+1)^{-s}]\, S_n\right| \leq (\, k^{-s} - (k+1)^{-s})\ 2/\sin(\vartheta/2)$ et Σ ($k^{-s} - (k+1)^{-s}$) est une série convergente car la SUITE (k^{-s}) converge. Conséquence : (Σ ($k^{-s} - (k+1)^{-s}$) S_k) est une série absolument convergente, donc convergente et la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-s}z^k\right)$ converge. $\boxed{(\,\Sigma\, k^{-s}\, z^k)\text{ converge}}$.

3 Expression de φ à l'aide d'une intégrale :

a Le rayon de convergence de la série ($\Sigma\, n^{-z}\, z^n$) étant R = 1 : $\forall\, t \in\,]-1, 1[$ $\varphi(t, s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}t^n$ et pour $t \neq 0$ $\dfrac{\varphi(t,s)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}t^{n-1}$. La formule est encore valable pour t = 0 (prolongement par continuité en 0). Or la somme d'une série entière de rayon R = 1 converge normalement, donc uniformément sur [0, x] lorsque $x \in\,]-R, R[\, = \,]-1, 1[$. Comme les fonctions $t \to n^{-s}t^{n-1}$ sont continues sur le segment [0, x], on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s-1}x^n = \varphi(x,s+1)$$

<u>2° méthode :</u> on utilise directement les résultats sur les séries entières.

La fonction f : $t \to \dfrac{\varphi(t,s)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}t^{n-1}$ a un développement en série entière de rayon 1 ; donc toute primitive F de f un développement en série entière de rayon 1 : F(x) = F(0) + $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}\dfrac{t^n}{n}$.

Puisque F(0) = 0, on retrouve le résultat précédent.

b $\varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}0 = 0$; $\varphi(x, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

4 On suppose s > 1.

a La fonction f_n est définie et continue sur [0, +∞[(car s-1 > 0), telle que $f_n(t) =_{+\infty} O(1/t^2)$ (car n > 0) ; or $t \to 1/t^2$ est positive, intégrable sur [1, +∞[(car 2 > 1 ; règle de Riemann) ; on applique la règle de domination : f_n est intégrable sur [1, +∞[, continue sur [0, 1], donc intégrable sur [0, +∞[. On effectue alors le changement de variables affine (donc de classe C^1) : u = nt, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{s-1}\frac{du}{n} = \boxed{\frac{1}{n^s}\Gamma(s)}$$

b On note $u_n(t) = z^n f_n(t)$.

i Pour tout n, u_n est continue (donc continue par morceaux) sur [0, +∞[et y est intégrable puisque $|u_n| = |f_n z^n| \le |f_n|$.

ii $u_n(t) = (ze^{-t})^n t^{s-1}$: suite géométrique de raison $r = ze^{-t}$ telle que $|r| \le e^{-t} < 1$ sur]0, +∞[donc (Σ u_n) converge simplement sur]0, +∞[vers la fonction g définie sur]0, +∞[par

$$g(t) = ze^{-t}t^{s-1}\frac{1}{1-ze^{-t}}$$

iii g est continue, donc continue par morceaux, sur]0, +∞[.

iv Pour tout n ≥1 $\int_0^{+\infty} |u_n| = |z|^n \int_0^{+\infty} f_n \le \dfrac{\Gamma(s)}{n^s}$ et $\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$ converge (car s > 1 ; règle de Riemann).

On peut alors utiliser le théorème de permutation série-intégrale : la fonction g est intégrable sur]0, +∞[et $\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt$ soit $z\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\dfrac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\varphi(z,s)$. En multipliant numérateur et dénominateur par e^t dans l'intégrale, on obtient la formule demandée :

$$\boxed{\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t - z}dt}$$

Remarque : Γ(s) > 0 car c'est l'intégrale sur [0, +∞[d'une fonction continue, positive, et non nulle.

Partie II –

1 On pose $u_n(s) = n^{-s} = \exp(-s.\ln(n))$

a Pour tout n ≥ 1 : u_n est de classe C^∞ sur]1, +∞[et ∀ p ≥ 0 $u_n^{(p)}(s) = (-\ln(n))^p n^{-s}$

b Pour montrer la convergence uniforme, l'intervalle]1, +∞[ne convient pas ; on se limite à l'intervalle [a, +∞[, avec a > 1. Alors $\| u_n^{(p)} \|_\infty \le \ln^p(n)\, n^{-a} = v_n$ (car la fonction $s \to n^{-s}$ est décroissante sur [a, +∞[). Puisque $\ln(n) =_{+\infty} O(1/n^b)$ pour tout b > 0, on compare v_n à la suite de terme général $t_n = n^{-(1+a)/2}$. $\frac{v_n}{t_n} = \ln^p(n) n^{-a+(1+a)/2} = \ln^p(n) n^{\frac{1-a}{2}}$; puisque 1-a < 0, la limite du quotient v_n/t_n est nulle et $\| u_n^{(p)} \|_\infty = O(n^{-(1+a)/2})$. Or $(\Sigma (n^{-(1+a)/2})$ converge (car (1+a)/2 > 1, règle de Riemann) ; on applique la règle de domination : $(\Sigma \| u_n^{(p)} \|_\infty)$ converge normalement, donc uniformément et simplement sur [a, +∞[. En particulier,

i Pour $0 \leq k < p$ $((\Sigma \| u_n^{(k)} \|_\infty)$ converge simplement sur [a, +∞[.

ii Et $(\Sigma \| u_n^{(p)} \|_\infty)$ converge uniformément sur [a, +∞[.

Conclusion : pour tout naturel p, la fonction somme : ζ, est de classe C^p sur [a, +∞[; ainsi ζ est une fonction de classe C^∞ sur [a, +∞[, ceci pour tout a > 1. On peut enfin conclure :

$\boxed{\zeta \in C^\infty(]1, +\infty[).}$

2 Et pour s>1 $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(s) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\underbrace{n^s}_{>0}} < 0$: la fonction ζ est strictement décroissante sur]1, +∞[.

3 Méthode utilisée : comparaison série-intégrale.

La fonction $t \to 1/t^s$ (s > 0) étant décroissante sur [n, n+1] ($n \in \mathbb{N}^*$) : $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$; en additionnant ces inégalités de 1 à p : $\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(n+1)^s} = \sum_{n=2}^{p+1} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{p+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^s}$; la fonction $t \to t^{-s}$ est intégrable sur [1 , +∞[car s > 1 (règle de Riemann).

Lorsque $p \to +\infty$, on obtient : $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$.

De plus $\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq 0$, ce qui complète l'encadrement : $0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-s} t^{1-s} - \frac{1}{1-s}$, ce qui donne : $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + 1/(s-1) = s/(s-1)$. Lorsque $s \to +\infty$, les deux termes qui encadrent ont pour limite 1 : $\boxed{\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1}$.

De même, en multipliant par s-1 > 0 l'encadrement : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} + 1$, on obtient :

$1 \leq \zeta(s)(s-1) \leq s$; en utilisant le théorème d'encadrement : $\lim_1 \zeta(s)(s-1) = 1$ soit $\boxed{\zeta(s) \sim_1 1/(s-1)}$

Partie III –

1 Utilisation d'une série de Fourier :

a $\forall x \in [-\pi, 0[$ $x + 2\pi \in [0, 2\pi[$, $-x \in]0, \pi]$, ce qui permet d'écrire :

$g(x) = g(x + 2\pi) = \left(\frac{\pi - x - 2\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi + x}{2}\right)^2 = g(-x)$

Comme g est 2π-périodique et que sa restriction à [-π, π] est paire, g est paire.

La restriction de g à [0, 2π] est de classe C^∞, donc g est C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$, en particulier continue par morceaux ; ses coefficients de Fourier sont définies. g étant paire, les coefficients $b_n(g)$ sont nuls et $a_n(g) = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi g(t) \cos(nt) dt$. On effectue alors une triple intégration par parties, en posant $u(t) = (\pi - t)^2$, $v^{(3)}(t) = \cos(nt)$, ce qui entraîne :

$u'(t) = -2(\pi - t)$, $v''(t) = \sin(nt)/n$ (conséquence : n > 0)

$u''(t) = 2 \qquad v'(t) = -\cos(nt)/n^2$

$u^{(3)}(t) = 0 \qquad v(t) = -\sin(nt)/n^3$

Les fonctions u et v étant de classe C^3 sur le segment $[0, \pi]$, on obtient :

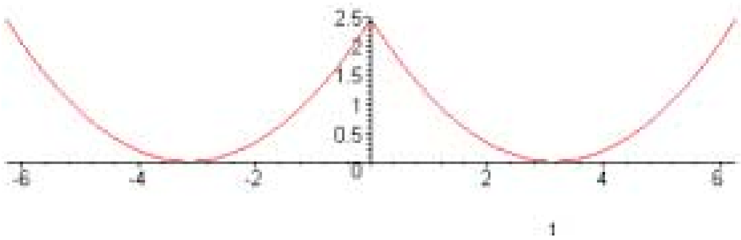
$a_n(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[(\pi-t)^2\frac{\sin(nt)}{n} - 2(\pi-t)\frac{\cos(nt)}{n^2} - 2\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 0.dt\right)$ soit, puisque $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$: $a_n(g) = \frac{1}{n^2}$ pour $n > 0$.

Il reste à calculer $a_0(g) = \frac{4}{2\pi}\int_0^\pi \frac{(\pi-t)^2}{4}dt = \frac{\pi^2}{6}$. Le tracé de sa courbe est :

```
> g:=t->(Pi-(t-floor(t/(2*Pi))*2*Pi))^2/4;
```

$$g := t \to \frac{1}{4}\left(\pi - t + 2\ \mathrm{floor}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{\pi}\right)\pi\right)^2$$

```
> plot(g(t),t=-2*Pi..2*Pi,scaling=constrained);
```



g est paire et sa restriction à $[0, \pi]$ est continue, donc la restriction de g à $[-\pi, \pi]$ est continue. De plus, par construction $\lim_{-\pi+} g = \lim_{\pi-} g$: g est continue sur R, de classe C^1 par morceaux. On peut alors appliquer le théorème de Dirichlet : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(nt)$ et en particulier :

$\forall\ t \in [0, 2\pi] \quad g(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nt) = \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2$

b En particulier pour t = 0 : $g(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ soit $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Pour le calcul de $\zeta(4)$, on utilise la formule de Parseval (g est 2π-périodique, continue par morceaux sur R) : $\left(\frac{a_0(g)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g^2(t)dt$ (car g est paire). En effectuant dans l'intégrale le changement de variable affine (donc de classe C^1) $u = \pi - t$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{12^2}+\frac{1}{2}\zeta(4)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{u^4}{16}du=\frac{\pi^4}{80} \text{ et } \boxed{\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}}$$

2 Une nouvelle formule :

a $R\varphi(\vartheta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\vartheta}}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{in\vartheta})}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\vartheta)}{n^2}=\boxed{g(\vartheta)-\frac{\pi^2}{12}}$

b On utilise alors la formule de la question I4b : $R\varphi(\vartheta) = \mathrm{Re}(\ \varphi(e^{i\vartheta}, 2) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty}\frac{t^1}{e^t-e^{i\vartheta}}dt\right)$ (si une fonction est intégrable sur un intervalle, sa partie réelle (et sa partie imaginaire) le sont également) : $R\varphi(\vartheta) = \left(\frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(\frac{e^{i\vartheta}}{e^t-e^{i\vartheta}})tdt\right)$

$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$; en effectuant une double intégration par parties : $u(t) = t$, $v''(t) = e^{-t}$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = - e^{-t}$, $u''(t) = 0$ et $v(t) = e^{-t}$ (u et v de classe C^2 sur $\mathbb{R}$) : $\int te^{-t}dt=-(t+1)e^{-t}$: de limite 0 en $+\infty$. Ainsi $\boxed{\Gamma(2) = 1}$. On revient au calcul de la partie réelle : en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur:

$$\frac{te^{i\vartheta}}{e^t-e^{i\vartheta}}=\frac{te^{i\vartheta}}{e^t-e^{i\vartheta}}.\frac{e^t-e^{-i\vartheta}}{e^t-e^{-i\vartheta}}=\frac{t(e^{t+i\vartheta}-1)}{e^{2t}-2e^t\cos(\vartheta)+1} \text{ ; sa partie réelle est } \frac{t(e^t\cos(\vartheta)-1)}{e^{2t}-2e^t\cos(\vartheta)+1}.$$

Conclusion : $R\varphi(\vartheta) = \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t\cos(\vartheta)-1)}{e^{2t}-2e^t\cos(\vartheta)+1}dt=g(\vartheta)-\frac{\pi^2}{12}}$

c Pour $\cos(\vartheta) = 1$, et $\vartheta = 0$: $\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t-1)}{e^{2t}-2e^t+1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t-1)}{(e^t-1)^2}dt=\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\frac{\pi^2}{6}}$

Pour $\vartheta = \pi$: $-\int_0^{+\infty}\frac{t(e^t+1)}{e^{2t}+2e^t+1}dt=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}dt=-\frac{\pi^2}{12}$ et $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}dt=\frac{\pi^2}{12}}$

On remarque ensuite, pour $t > 0$: $\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{e^t+1}=\frac{2te^t}{e^{2t}-1}=\frac{t}{\mathrm{sh}(t)}$; ainsi $\boxed{I_3 = I_1 + I_2 = \pi^2/4.}$

3 On suppose $s > 0$, ainsi $s+1 > 0$.

a On prend $z = e^{i\vartheta}$, de module 1. On peut alors utiliser le résultat de la question I4b (pour s+1), en prenant la partie réelle des fonctions concernées :

$\mathrm{Re}(\ \varphi(e^{i\vartheta}), s+1) = \frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}t^s\frac{e^t\cos(\vartheta)-1}{e^{2t}-2e^t\cos(\vartheta)+1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{in\vartheta}}{n^{s+1}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\vartheta)}{n^{s+1}}$ puis la partie imaginaire : $\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty}t^s\frac{e^t\sin(\vartheta)}{e^{2t}-2e^t\cos(\vartheta)+1}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{in\vartheta}}{n^{s+1}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\vartheta)}{n^{s+1}}$

b Pour $\vartheta = \pi/2$, et la 2° formule : $\int_0^{+\infty}\frac{t^se^t}{e^{2t}+1}dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^{s+1}}$; lorsque n est pair, $\sin(n\pi/2) = 0$; il ne reste dans la somme que les termes correspondant à n impair : $n = 2p+1$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^s}{\mathrm{ch}(t)}dt=\Gamma(s+1)\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{s+1}} \text{ et } \boxed{I(s) = 2\,\Gamma(s+1).\,S_2(s).}$$

On utilise de nouveau, pour t>0 : $\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^t+1}=\frac{2e^t}{e^{2t}-1}=\frac{1}{sh(t)}$, ainsi que la 1° formule, pour $\vartheta = \pi$; ainsi : $-\int_0^{+\infty} t^s \frac{1}{e^t+1}dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{s+1}}$ et pour $\vartheta = 0$: $\int_0^{+\infty} t^s \frac{1}{e^t-1}dt=\Gamma(s+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s+1}}$; en faisant la différence : $\int_0^{+\infty} t^s \left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^t+1}\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^{s+1}}$ $1-(-1)^n$ est nul si n est pair, vaut 2 si n impair. Soit : $\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{sh(t)}dt=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^{s+1}}\,\Gamma(s+1)$ et $\boxed{J(s) = 2\,\Gamma(s+1)S_1(s)}$