Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notations

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Si n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ appartenant à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(A)$ est le noyau de A défini par : $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad AX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(A)$ est l'image de A définie par : $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), Y = AX\}$.

$\mathbb{R}$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$ et on identifiera selon l'usage $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

Une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geqslant 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre n et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n.

PARTIE I

I.1 Soit M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Ker}\left({}^tM\right)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les noyaux $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Ker}\left({}^tM\right)$?

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}\left({}^tM\right)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les images $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}\left({}^tM\right)$?

I.2 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\left({}^tAA\right) = \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}\left(A{}^tA\right) = \mathrm{Ker}({}^tA)$.

b) Montrer que $\mathrm{rg}\left({}^tAA\right) = \mathrm{rg}\left(A{}^tA\right) = \mathrm{rg}(A)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}\left({}^tAA\right) = \mathrm{Im}({}^tA)$ et $\mathrm{Im}\left(A{}^tA\right) = \mathrm{Im}(A)$.

I.3 Soit q un entier naturel non nul et $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \cdots, x_q)$ un système de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On note F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$, $r = \dim F$ et $G = (g_{i,j})$ la matrice de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ définie par $g_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_q^2$. Le déterminant de G est appelé déterminant de Gram du système $\mathcal{S}$ et sera noté $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ une base orthonormale de F, on note pour tout j de $\mathbb{N}_q$, $x_j = \sum\limits_{i=1}^{r} b_{i,j} e_i$ et B la matrice de $\mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$.

a) Montrer que $G = {}^tBB$ et en déduire $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(\mathcal{S})$.

b) Montrer que G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.

c) En déduire que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \geqslant 0$ et que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ est liée.

d) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec sa condition nécessaire et suffisante d'égalité est un cas particulier de ce résultat.

I.4 Montrer que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ reste invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

I.5 Dans cette question q est supérieur ou égal à 2.

a) On note L le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L, puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$. Montrer que :
$$\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \cdots, x_q).$$

b) En déduire successivement :

i) $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ avec égalité si et seulement si x_1 est orthogonal à L.

ii) $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2)\cdots\gamma(x_q)$ avec égalité si et seulement si les vecteurs x_1, x_2, ..., x_q sont deux à deux orthogonaux.

I.6 Soit $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ et c_1, c_2, ..., c_n ses vecteurs colonnes.

a) Montrer que :
$$|\det A| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|$$
avec égalité si et seulement si les vecteurs c_1, ..., c_n sont deux à deux orthogonaux.

b) On suppose de plus : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, |a_{i,j}| \leqslant 1$. Montrer que :
$$|\det A| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$$
avec égalité si et seulement si A est une matrice à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

PARTIE II

On note :

- $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{-1, +1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.
- $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients diagonaux dans $\{-1, +1\}$.
- E l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\mathcal{H}_n$ est non vide.

II.1 Déterminer explicitement toutes les matrices éléments de $\mathcal{H}_2$.

II.2 **a)** Montrer que toute matrice A de $\mathcal{H}_n$ vérifie ${}^tAA = nI_n$.

b) Réciproquement toute matrice carrée A vérifiant ${}^tAA = nI_n$ est-elle dans $\mathcal{H}_n$?

c) Montrer que si A est à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et vérifie ${}^tAA = nI_n$, alors A est dans $\mathcal{H}_n$.

II.3 On appelle permutation σ de $\mathbb{N}_n$ toute bijection de $\mathbb{N}_n$ sur lui-même et matrice de permutation $P^{(\sigma)}$ associée à la permutation σ, la matrice d'éléments $P_{i,j}^{(\sigma)}$ donnés par :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, P_{i,j}^{(\sigma)} = \delta_{i,\sigma(j)}$$
où $\delta_{k,l}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = l \\ 0 & \text{si} \quad k \neq l \end{cases}$

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Donner le terme général de la matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$. Comment obtient-on cette matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$ à partir de A ?

b) Donner le terme général de la matrice $AP^{(\sigma)}$. Comment obtient-on cette matrice $AP^{(\sigma)}$ à partir de A ?

c) Montrer que si A appartient à $\mathcal{H}_n$, il en est de même de ${}^tA$, des matrices ${}^tP^{(\sigma)}A$ et $AP^{(\sigma)}$ pour toute permutation σ ainsi que des matrices $A\Delta$ et ΔA pour toute matrice Δ de $\mathcal{D}_n$.

II.4 Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit direct de A et B par :
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que si $A \in \mathcal{H}_2$ et $B \in \mathcal{H}_n$, alors $A \otimes B \in \mathcal{H}_{2n}$.

b) En déduire que E contient toutes les puissances de 2.

c) Montrer que l'ensemble $\{A \otimes B \quad (A, B) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2\}$ est strictement inclus dans $\mathcal{H}_4$.

II.5 Soit $n \in E$, $n > 2$.

a) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1. Déduire alors de l'orthogonalité des vecteurs colonnes 1 et 2 d'une telle matrice que n est pair. On pose $n = 2m$.

b) Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1 et dont la deuxième colonne est constituée de m coefficients égaux à 1 suivis de m coefficients égaux à -1. Déduire alors de l'orthogonalité du troisième vecteur colonne avec les vecteurs colonnes 1 et 2 que n est un multiple de 4.

PARTIE III

III.1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.2 Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $M = RS$.

a) Montrer que la matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive.

b) En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = S^2$.

c) Montrer que S est inversible et que MS^{-1} est orthogonale.

d) Conclure. Dans toute la suite du problème on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

III.3 Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n ses valeurs propres non nécessairement distinctes, D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\operatorname{tr}(\Sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que $\operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(Q_1 D)$ et en déduire :

$$\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{tr}(\Sigma).$$

c) Montrer que $\sup\limits_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |\operatorname{tr}(Q\Sigma)| = \operatorname{tr}(\Sigma)$.

III.4 Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{H}_n$, on pose :

$$f(A) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right).$$

a) Montrer que l'application f ainsi définie de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure que l'on notera α_n.

b) Soit $T = (t_{i,j})$ la matrice triangulaire inférieure d'ordre n définie par $t_{i,j} = 1$ si $i \geqslant j$ et $t_{i,j} = 0$ si $i < j$. Montrer que $f(A) = \operatorname{tr}(AT)$.

c) D'après la question **III.2**, on sait que $T = RS$ avec R orthogonale et S symétrique définie positive. Montrer alors que $f(A) \leqslant \sqrt{n}\operatorname{tr}(S)$, puis que $\alpha_n \leqslant \sqrt{n}\operatorname{tr}(S)$.

d) Lorsque $n = 2$, évaluer α_2 et $\sqrt{2}\operatorname{tr}(S)$.

Fin de l'énoncé