

CCP 2003 - Math 2 PC

Titre : Produits infinis et fonction Gamma.

PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0, 1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

- Pour tout $t \in [-\pi, \pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,
- La fonction φ_u est périodique de période 2π .

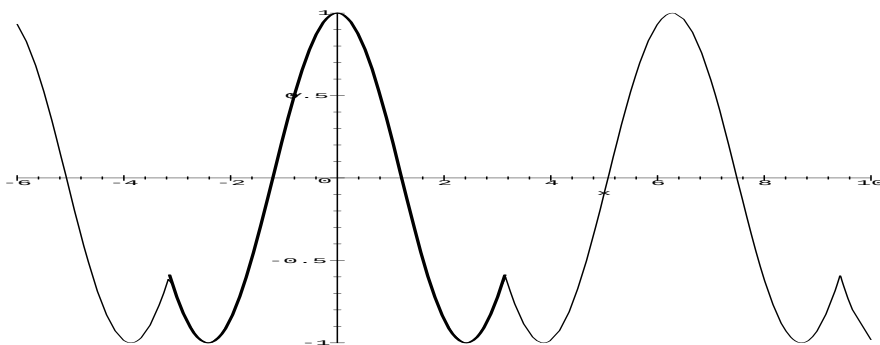


FIG. 1 – graphe de $\varphi(u)$ pour $u = 1.3$

I.1 La fonction φ_u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en π pour en déduire, par 2π -périodicité, la continuité de φ_u sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in [\pi, 3\pi[$, on a $\varphi_u(t) = \varphi_u(t - 2\pi) = \cos u(t - 2\pi)$ et $\lim_{t \rightarrow \pi+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$ qui est égal à $\lim_{t \rightarrow \pi-} \varphi_u(t)$. cqfd

La continuité en π permet d'écrire $\varphi_u(t) = \cos ut$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

Etablissons maintenant la parité de φ_u sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [(2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi[$. On a donc $\varphi_u(t) = \varphi_u(t - 2n\pi)$.

φ_u est clairement paire sur $[\pi, \pi]$ donc $\varphi_u(t - 2n\pi) = \varphi_u(2n\pi - t)$.

Enfin $\varphi_u(-t + 2n\pi) = \varphi_u(-t)$ car $-t \in](-2n - 1)\pi, (-2n + 1)\pi]$. cqfd

Il en résulte que

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_u(t) \cos nt \, dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ut \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u - n)t + \cos(u + n)t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(u - n)t}{u - n} + \frac{\sin(u + n)t}{u + n} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n 2u \sin u\pi}{\pi(u^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

La fonction φ_u est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_u . Comme φ_u est paire, on a $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2u \sin u\pi}{\pi(u^2 - n^2)} \cos nt.$$

I.2 Pour $t = \pi$ le calcul de la somme de la série de Fourier de φ_u donne, après division par $\sin \pi u \neq 0$:

$$\forall u \in]0, 1[, \quad \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

I.3 On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, on a $u_n(x)$ défini, négatif et équivalent à $-\frac{x^2}{n^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1[$.

La fonction u_n est de classe C^1 sur $[0, 1[$ avec $u'_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Pour tout $x \in [0, a]$ avec $[0, a] \subset [0, 1[$, on a $|u'_n(x)| \leq \frac{2a}{n^2 - a^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[0, a]$.

Il en résulte, d'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \stackrel{I.2}{=} \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

Ainsi pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \int_0^x \frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} du + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)}_{=0} = \left[\ln \frac{\sin \pi u}{u} \right]_0^x = \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

I.4 Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \quad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Pour tout $n \geq |x|$, on a $|s_n(x)| \leq |s_{n-1}(x)|$ et $s_n(x)$ de même signe que $s_{n-1}(x)$.

La suite $(|s_n(x)|)_{n \geq |x|}$ est décroissante et positive, donc convergente.

Comme la suite $(s_n(x))_{n \geq |x|}$ est de signe constant, elle est donc égale, au signe près, à la suite convergente $(|s_n(x)|)_{n \geq |x|}$.

Ainsi, la suite de fonctions $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction s .

I.4.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ avec $n \neq x$ (*non précisé dans l'énoncé*).

Par définition, on a $s_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^n (k-x) \prod_{k=0}^n (k+x)$. Il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$\begin{aligned} s_n(x+1) &= \frac{1}{n!^2} \prod_{k=1}^n (k-x-1) \prod_{k=0}^n (k+x+1) = \frac{1}{n!^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-x) \prod_{k=1}^{n+1} (k+x) \\ &= \frac{1}{n!^2} \frac{-x}{n-x} \prod_{k=1}^n (k-x) \times (n+1+x) \prod_{k=1}^n (k+x) = -\frac{n+1+x}{n-x} s_n(x), \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'égalité $s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$ est valable pour tout $n > |x|$.

Le passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ donne $s(x+1) = -s(x)$.

I.4.3 La fonction s est nulle en 0, car $s_n(0) = 0$ pour tout n .

Pour $x \in]0, 1[$, on a $s_n(x) > 0$ et $\ln s_n(x) = \ln x + \sum_{k=1}^n u_k(x)$, ainsi, d'après I.3,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln s_n(x) = \ln x + \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = e^{\ln \frac{\sin \pi x}{\pi}}$, soit $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = \lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On a donc $s(x) = (-1)^n s(x-n)$ et $x-n \in [0, 1[$, ainsi $s(x) = (-1)^n \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi}$.

On obtient donc $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la littérature, ce résultat est appelé "développement eulérien de sinus".

PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1) \dots (x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq p+1$, on a $f_n(-p) = 0$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(-p) = 0$.

II.1.2 On suppose que $x \notin \mathbb{Z}^-$. On a donc $f_n(x) \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n > -x$, on a $f_{n+1}(x)$ de même signe que $f_n(x)$.

En posant $N_x = \max\{1, -\lfloor x \rfloor\}$, on obtient donc $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 0$ pour tout $n \geq N_x$.

Le calcul donne $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et

$$\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = -x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général $\ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir du rang N_x est convergente.

Pour tout $n \geq N_x$, un télescopage des termes donne $\sum_{k=N_x}^n \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)}$ ce

qui implique $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x) e^{S_n(x)}$ où $S_n(x) = \sum_{k=N_x}^n \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$ est le terme général

d'une suite convergente (vers $S(x)$).

Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f_{N_x}(x) e^{S(x)} \neq 0$.

On note f la fonction $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient, après calculs, $f_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$.

Le passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ donne alors $f(x) = x f(x+1)$.

On a $f_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f(1) = 1$. Avec la relation $f(x) = x f(x+1)$, on établit, par récurrence sur n , que $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Si $x \in \mathbb{Z}$, l'un des entiers x ou $1-x$ est négatif ou nul donc $f(x)f(1-x) = 0 = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $s_n(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, après calculs, on obtient

$\frac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)} = \frac{n}{n+x}$. Le passage à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ donne alors l'égalité demandée $f(x)f(1-x) = s(x)$, appelée "formule des compléments" dans la littérature.

II.4 On se propose d'établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$(1) \quad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

Nota : comme la relation (1) est trivialement vérifiée pour $p = 1$, on supposera désormais $p \geq 2$, ce qui rendra cohérent le produit écrit dans II.4.4

II.4.1 On suppose $px = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(px) = 0$ d'après II.1.1.

Une division euclidienne donne $n = pq + r$ avec $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in [0, p[$. Pour $k = r$, on a $x + \frac{k}{p} = -q$, ainsi $f\left(x + \frac{k}{p}\right) = 0$ d'après II.1.1, ce qui annule la partie droite de (1).

La relation (1) est donc vérifiée lorsque $px \in \mathbb{Z}^-$.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. On a

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1} n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1} (px + j).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{n^{-(x+\frac{k}{p})}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{p} + i\right) \right) \\ &= \frac{n^{-\left(px + \frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (px + k + ip) \right). \end{aligned}$$

Pour chaque $i \in [0, n[$ et k variant dans $[0, p[$, les entiers $ip + k$ décrivent l'ensemble $[ip, (i+1)p[$. La réunion donne l'ensemble $[0, np[$, ainsi

$$\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right) = \frac{n^{-(px+\frac{p-1}{2})} p^{-pn}}{[(n-1)!]^p} \prod_{j=0}^{pn-1} (px + j).$$

Il en résulte que $\frac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$ est égal à $p^{pn-1} n^{\frac{p-1}{2}} \frac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!}$ qui est strictement

positif et ne dépend pas de x .

Le terme de gauche admet une limite égale à $\frac{p^{px-1} f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right)}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Il en résulte que le terme de droite admet une limite, positive ou nulle et qui ne dépend que de p , lorsque $n \rightarrow +\infty$. On la note A_p . On obtient alors l'égalité demandée

$$f(px) = A_p p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.3 Pour $x = \frac{1}{p}$ la relation ci-dessus, donne $f(1) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{1+k}{p}\right)$.

Sachant que $f(1) = 1$, un décalage d'indices $k+1 \rightarrow k$ donne $A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = 1$.

Le changement de parcours des indices $k \rightarrow p - k$ donne l'autre égalité :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Avec le produit de deux et le résultat II.3, on obtient $A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{p}}{\pi} = 1$ ainsi

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p}}.$$

II.4.4 On a $(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) = x^p - 1$, ainsi le polynôme

$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ a pour zéros complexes, les $p - 1$ racines de l'unité $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ avec $k = 1, \dots, p - 1$.

Le polynôme $x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1$ a pour zéros complexes, les 2 racines de l'unité

$e^{\frac{2ik\pi}{p}} = z_k$ et $e^{-\frac{2ik\pi}{p}} = \overline{z_k} = z_{p-k}$. Ainsi le polynôme $\prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1\right)$, de degré $2p - 2$, a pour ensemble de zéros $\{z_k, z_{p-k}/k = 1, \dots, p - 1\}$.

Il coïncide avec l'ensemble des zéros de $(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2$ de même degré et même coefficient dominant, ainsi

$$(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{p} + 1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, on obtient

$$p^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{p}}_{4 \sin^2 \frac{k\pi}{p}} = 4^{p-1} \left(\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} \right)^2.$$

Il en résulte, connaissant le signe, que $\prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{p} = \frac{p}{2^{p-1}}$.

Avec le dernier résultat de II.4.3, sachant que $A_p \geq 0$, il vient $A_p = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$.

Combiné avec la relation établie en II.4.2, on obtient l'égalité (1) demandée, appelée "formule multiplicative de Gauss" dans la littérature.

PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

III.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $h_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

On a $h_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$, ainsi h_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

On a $h_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ainsi h_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x .

Il en résulte que la fonction Γ est définie sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

La fonction $h : (x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[^2$, ainsi que chacune de ses

dérivées partielles $\frac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x, t) \mapsto \ln^k t e^{-t} t^{x-1}$.

Pout tout segment $[a, b] \subset \mathcal{D}$ et tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, on a

$$|h(x, t)| \leq \phi_{[a,b]}(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \ln^k t \phi_{[a,b]}(t) \text{ où } \phi_{[a,b]}(t) = e^{-t} \max\{t^{a-1}, t^{b-1}\}.$$

Comme les fonctions $\phi_{[a,b]}$ et $\ln^k t \phi_{[a,b]}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

III.2.1 Soit $g_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.

Une intégration par parties, valide, donne pour $n \geq 1$:

$$g_n(x) = \underbrace{\left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1}_0 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du = \frac{n}{x} g_{n-1}(x+1).$$

Il en résulte que $g_n(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)} g_{n-k}(x+k)$ pour tout $k \in [1, n]$.

Après calculs, on obtient $g_0(x) = \frac{1}{x}$ et $g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = nu$ donne $g_n(x) = n^{-x} G_n(x)$.

En remplaçant par la valeur de $f_n(x)$, non nulle, on obtient $G_n(x) = \frac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 On vérifie aisément (étude directe ou convexité) que $e^x \geq 1+x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \frac{t}{n} \geq 0$ et $e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \geq 0$ pour tout $t \in [0, n]$.

En élevant à la puissance n , on obtient les inégalités demandées : $e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ et $e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$.

On en déduit que, pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

III.2.3 Soit $a \in [0, 1]$. L'inégalité $(1-a)^n \geq 1-na$ est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons-la vérifiée pour $n \geq 1$, alors

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n \geq (1-a)(1-na) = 1 - (n+1)a + na^2 \geq 1 - (n+1)a.$$

Il en résulte, par récurrence sur n , que l'on a $(1-a)^n \geq 1-na$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En combinant avec le dernier résultat de III.2.2, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - n \frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2 e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$0 \leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1} dt = \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt.$$

L'existence de $\Gamma(x)$ implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = 0$.

Par ailleurs, $\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$.

D'après III.2.1, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, ainsi $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$.

Cette expression de $\Gamma(x)$ est appelée “forme limite d'Euler” dans la littérature.

III.3 D'après III.1 et III.2.4, on a f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

Avec la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n , la classe C^∞ de f sur $] -n, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.