

PARTIE I

I.1 l'application $\phi : (x, t) \mapsto \cos(nt - x \sin t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$; cela garantit l'existence de l'intégrale ordinaire $\int_0^\pi \phi(x, t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour démontrer la continuité de ϕ , il suffit d'utiliser la structure d'algèbre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et le théorème de composition : $(x, t) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (projection), $(x, t) \mapsto t$ de même, donc aussi $(x, t) \mapsto \sin(t)$ par composition et donc $(x, t) \mapsto x \sin(t)$ par produit, puis $(x, t) \mapsto nt - x \sin(t)$ par combinaison linéaire et enfin $(x, t) \mapsto \cos(nt - x \sin t)$ par composition à nouveau. Par restriction à $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, on obtient la continuité de ϕ .

L'ensemble de définition de J_n est $\mathbb{R}$ donc est symétrique par rapport à 0 et si $x \in \mathbb{R}$, on a, via le cdv affine (donc admissible) $u = \pi - t$:

$$J_n(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt + x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi - nu + x \sin u) du = (-1)^n J_n(x)$$

donc J_n a la parité de n .

I.2 On a $J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-nt - x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt + x \sin t) dt = J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ d'après le I.1.

I.3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$; ϕ possède une dérivée partielle $\frac{\partial^p \phi}{\partial x^p}(x, t) = (-\sin t)^p \cos(nt - x \sin t + n \frac{\pi}{2})$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Avec la continuité de ϕ , cela suffit à fournir le caractère $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ de J_n ; p étant arbitraire, cela montre son caractère $\mathcal{C}^\infty$.

I.4 Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, J_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin t \cdot \sin(nt - x \sin t) dt$; une i.p.p.

avec $\begin{cases} u'(t) = -\sin t \text{ si } u(t) = \cos t \\ v(t) = \sin(nt - x \sin t) \text{ donc } v'(t) = (n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t) \end{cases}$ valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donne alors :

$$J'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \left\{ [\cos t \cdot \sin(nt - x \sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos t \cdot [(n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t)] dt \right\}$$

Le terme tout intégré étant nul, on obtient le résultat voulu.

On a dans la foulée : $J''_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \cos(nt - x \sin t) dt$.

Et donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) \{ -x^2 \sin^2 t + x(n - x \cos t) \cos t + (x^2 - n^2) \} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n \cos(nt - x \sin t) (x \cos t - n) dt = -\frac{n}{\pi} [\sin(nt - x \sin t)]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

PARTIE II

II.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2pt - x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(2pt) \cos(x \sin t) - \sin(2pt) \sin(x \sin t)) dt$$

Le cdv affine $t = \pi - u$ permet de montrer que $\int_0^\pi \sin(2pt) \sin(x \sin t) dt = - \int_0^\pi \sin(2pu) \sin(x \sin u) du$ et donc que $\int_0^\pi \sin(2pt) \sin(x \sin t) dt = 0$. D'où l'égalité demandée.

Le même procédé fournit l'égalité $J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin(x \sin t) dt$.

II.2 Traitons le cas $n = 2p$; on sait que $\cos u = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!}$ avec un rayon de convergence infini. Donc pour tout $t \in [0, \pi]$

et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x \sin t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!}$.

À x fixé, la convergence de la série $\sum (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!}$ est normal en t sur $[0, \pi]$ puisque $\left| (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ et $\sum \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ converge vers $\cosh |x|$. La convergence est donc uniforme sur $[0, \pi]$ et on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^\pi \cos(2p t) \sin^{2k} t \, dt$$

avec convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$; c'est le DSE de J_{2p} valide sur $\mathbb{R}$.

On obtient exactement de la même façon :

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin^{2k+1} t \, dt$$

II.3.1 Les formules d'Euler $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, $\cos(2ht) = \frac{e^{2hit} + e^{-2hit}}{2}$ et la formule de Newton $(a-b)^{2k} = \sum_{h=0}^{2k} \binom{2k}{h} (-1)^h a^{2k-h} b^h$

permettent d'écrire $\sin^{2k} t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k} = \sum_{h=0}^k \alpha_{k,h} \cos(2ht)$.

On sait par ailleurs que la famille $(u \mapsto \cos(hu))_{h \geq 0}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(f | g) = \int_0^{2\pi} f(u)g(u) \, du$; le cdv affine $u = 2t$ fournit donc $\int_0^\pi \cos(2pt) \cos(2qt) \, dt = 0$ si $p \neq q$. Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a :

$$\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k} t \, dt = 0$$

et si $k \geq p$, on a :

$$\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k} t \, dt = \alpha_{k,p} \int_0^\pi \cos^2(2pt) \, dt = \alpha_{k,p} \frac{\pi}{2}$$

reste donc à calculer $\alpha_{k,p}$; or on a :

$$\sin^{2k} t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k} = \frac{1}{(2i)^{2k}} \left(\dots + (-1)^{k+p} \binom{2k}{k+p} e^{2ip t} + (-1)^{k-p} \binom{2k}{k-p} e^{-2ip t} + \dots \right) = \frac{(-1)^p}{4^k} \left(2 \binom{2k}{k+p} \cos(2pt) + \dots \right);$$

donc $\alpha_{k,p} = 2 \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k+p}$ et finalement :

$$\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k} t \, dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k+p} \pi$$

On en déduit aussitôt que :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k} t \, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k+p} \pi = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)! (k-p)!} x^{2k}$$

donc

$$\alpha_{2k}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)! (k-p)!} & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

II.3.1 Pour ceux qui aiment, on en remet une couche.

Les formules d'Euler $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, $\sin((2h+1)t) = \frac{e^{(2h+1)it} - e^{-(2h+1)it}}{2i}$ et la formule de Newton permettent d'écrire $\sin^{2k+1} t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k+1} = \sum_{h=0}^k \beta_{k,h} \sin((2h+1)t)$.

Par ailleurs, $\int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin((2q+1)t) \, dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t)] \, dt = 0$ si $p \neq q$.

Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a :

$$\int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1} t \, dt = 0$$

et si $k \geq p$, on a :

$$\int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1} t \, dt = \beta_{k,p} \int_0^\pi \sin^2((2p+1)t) \, dt = \beta_{k,p} \frac{\pi}{2}$$

reste donc à calculer $\beta_{k,p}$; or on a :

$$\begin{aligned}\sin^{2k+1} t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k+1} = \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \left(\cdots + (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{(2k+1-2h)it} + \cdots + (-1)^{2k+1-h} \binom{2k+1}{2k+1-h} e^{-(2k+1-2h)it} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}} \left(\cdots + 2 \binom{2k+1}{h} (-1)^h \sin((2k+1-2h)t) + \cdots \right)\end{aligned}$$

donc en prenant $h = k - p$ on a : $\beta_{k,p} = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p}$ et finalement :

$$\int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1} t \, dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit aussitôt que :

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1} t \, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

soit

$$J_{2p+1}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{2^k 4^k (k-p)!(k+1+p)!} x^{2k+1}$$

donc

$$\alpha_{2k+1}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{2^k 4^k (k-p)!(k+1+p)!} & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

II.4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$; les applications $u : t \mapsto \cos(x \sin t)$ et $v : t \mapsto \sin(x \sin t)$ sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc d'après un théorème de Dirichlet, elles sont développables en série de Fourier avec convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

- u est paire donc $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \, dt = 2J_0(x)$ et

$$a_n(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(nt+x \sin t) + \cos(nt-x \sin t)) \, dt = J_n(x) [(-1)^n + 1] = \begin{cases} 2J_n(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

- v est impaire donc $a_n(v) = 0$ pour tout n et

$$b_n(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t) \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(nt-x \sin t) - \cos(nt+x \sin t)) \, dt = J_n(x) [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 2J_n(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec CVU sur $\mathbb{R}$:

$$\cos(x \sin t) = J_0(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} 2J_{2p}(x) \cos(2pt) \quad \sin(x \sin t) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2J_{2p+1}(x) \sin[(2p+1)t]$$

II.4.2 Avec $t = \frac{\pi}{2}$ puis $x = 0$ dans la première, on a :

$$J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x) = 1$$

Puisque u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Parseval s'applique et donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x \sin t) \, dt = \frac{1}{4} a_0^2(u) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2(u) = J_0^2(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x)$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x \sin t) \, dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}^2(v) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

En ajoutant il vient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2(x \sin t) + \sin^2(x \sin t)) \, dt = J_0^2(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x) + 2 \sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

soit en regroupant les séries $1 = J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(x)$.

Le regroupement mérite un mot d'explication : si les séries numériques $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ sont convergentes, alors, $\sum u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$. Il suffit de considérer la somme partielle : $\sum_{n=0}^p u_n = \sum_{n=0}^{E(\frac{p}{2})} u_{2n} + \sum_{n=0}^{E(\frac{p-1}{2})} u_{2n+1}$ et de passer à la limite sur p .

PARTIE III

III.1.1 Posons $y(x) = x^\lambda z(x)$ et supposons z deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$; alors il en est de même de y et pour $x \in]0, +\infty[$:

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} z(x) + x^\lambda z'(x) \quad y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} z(x) + 2\lambda x^{\lambda-1} z'(x) + x^\lambda z''(x)$$

on en déduit que y est solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ ssi

$$x^{\lambda+1} (xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x)) = 0$$

et comme $x > 0$, ceci équivaut à

$$xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x) = 0$$

III.1.2 On suppose $\lambda = -\frac{1}{2}$; on a alors sur $]0, +\infty[$

$$z \text{ solution de } (B'_{-\frac{1}{2}}) \text{ ssi } z'' + z = 0 \text{ ssi il existe } A, B \in \mathbb{R} \mid \text{ pour tout } x, z(x) = A \cos x + B \sin x$$

et donc

$$y \text{ solution de } (B_{-\frac{1}{2}}) \text{ ssi il existe } A, B \in \mathbb{R} \mid \text{ pour tout } x, y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

III.1.3 En observant que $(B_{-\frac{1}{2}}) = (B_{\frac{1}{2}})$, on en déduit que la solution générale sur $]0, +\infty[$ de $(B_{\frac{1}{2}})$ est aussi $y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$ A, B décrivant $\mathbb{R}$; la solution générale sur $]0, +\infty[$ de $(B'_{\frac{1}{2}})$ est alors :

$$y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

III.2.1

Supposons que, $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ (avec un rayon de convergence $R > 0$) est solution de (B'_λ) ; comme la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et que l'on peut dériver terme à terme, on a, sur $] -R, R[$:

$$z'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \text{et} \quad z''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1}$$

et donc z est solution de (B'_λ) ssi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (2\lambda+1)(k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

soit encore, en posant $a_{-1} = 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [k(k+1) a_{k+1} + (2\lambda+1)(k+1) a_{k+1} + a_{k-1}] x^k = 0$$

L'unicité du DSE fournit alors : pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)(2\lambda+1+k) a_{k+1} + a_{k-1} = 0$$

III.2.2 Notons $a_k(\lambda) = a_k$; on cherche les solutions vérifiant $a_{2k+1}(\lambda) = 0$ pour tout k . Comme $-\lambda \notin \mathbb{N}$, on note que $\lambda+h \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.

La relation du III.2.1 donne en substituant $2k-1$ à k , pour $k \in \mathbb{N}^*$: $(2k)(2\lambda+2k) a_{2k} + a_{2k-2} = 0$; on en déduit que

$$a_{2k}(\lambda) = \left\{ \frac{(-1)^k}{\prod_{h=1}^k 2h(2\lambda+2h)} \right\} a_0(\lambda) = \frac{(-1)^k}{4^k k! \prod_{1 \leq h \leq k} (\lambda+h)}$$

Donc SI il existe une solution de (B'_λ) de la forme $z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, avec $a_0(\lambda) = 1$ ALORS on a nécessairement, pour tout

$$p \in \mathbb{N}, a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda + h)}.$$

Réciproquement, la série entière $\sum \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda + h)} x^{2p}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$ puisque en utilisant la règle

de de d'Alembert, la limite

$$\frac{|a_{2p+2}(\lambda)x^{2p+2}|}{|a_{2p}(\lambda)x^{2p}|} = \frac{x^2}{4(p+1)|\lambda + p + 1|} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

montre que la série numérique $\sum \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda + h)} x^{2p}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Les équivalences du III.2.1 montrent alors que la somme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$ est $\mathbb{R}$ -solution, donc $]0, +\infty[$ -solution de (B'_λ) .

III.3.1 λ étant supposé non entier, ce qui précède s'applique à $-\lambda$ et $z_{\pm\lambda}$ est solution de $(B'_{\pm\lambda})$ donc $j_{\pm\lambda}$ est $]0, +\infty[$ -solution (non nulle) de l'équation $(B_{\pm\lambda}) = (B_\lambda)$.

Remarquons que z_λ et $z_{-\lambda}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc bornées au voisinage de 0. Si par exemple $\lambda > 0$, j_λ est bornée au voisinage de 0, alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} j_{-\lambda}(x) = +\infty$, donc $j_{-\lambda}$ est non bornée au voisinage de 0 et donc j_λ et $j_{-\lambda}$ sont non proportionnelles.

(B_λ) est linéaire, homogène, résolue en y'' , à coefficients continus sur $]0, +\infty[$; d'après le cours, l'ensemble des $]0, +\infty[$ -solutions est un espace vectoriel de dimension 2, $(j_\lambda, j_{-\lambda})$ étant une famille libre de cardinal 2 est donc une base de (B_λ) et la solution générale de (B_λ) est donc :

$$y(x) = A x^\lambda z_\lambda(x) + B x^{-\lambda} z_{-\lambda}(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

III.3.2 On a $j_n(x) = x^n z_n(x) = x^n \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(n)x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} n + h} x^{2p+n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p n!}{4^p p! (n+p)!} x^{2p+n}$.

Supposons par exemple, n pair : $n = 2q$; on a alors :

$$j_{2q}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2q)!}{4^p p! (q+p)!} x^{2p+2q}$$

Posons $k = p + q$; il vient $j_{2q}(x) = 4^q (2q)! \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-q}}{4^k (k-q)! (k+q)!} x^{2k}$.

On reconnaît le DSE(0) de $J_{2q}(x)$. Donc $j_{2q} = 4^q (2q)! J_{2q}$.

De même, si n est impair : $n = 2q + 1$; on a alors :

$$j_{2q+1}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p p!} \frac{(2q+1)!}{(2q+1+p)!} x^{2p+2q+1}$$

Posons $k = p + q$; il vient : $j_{2q+1}(x) = 4^q (2q+1)! \sum_{k=q}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-q}}{4^k (k-q)! (k+1+q)!} x^{2k+1}$.

On reconnaît le DSE(0) de J_{2q+1} ; donc $j_{2q+1} = 2 \cdot 4^q (2q+1)! J_{2q+1}$.

z_n est solution de (B'_n) et pour tout $x > 0$, on a : $z'_{-n}(x) = 2nx^{2n-1}z_n(x) + x^{2n}z'_n(x)$ puis $z''_{-n}(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}z_n(x) + 4nx^{2n-1}z'_n(x) + x^{2n}z''_n(x)$.

On en déduit que $xz''_{-n}(x) + (-2n+1)z'_{-n}(x) + xz_{-n}(x) = x^{2n}[xz''_n(x) + (2n+1)z'_n(x) + xz_n(x)] = 0$.

Ce qui démontre que z_{-n} est solution de (B'_{-n}) .