ENS 2023 - Épreuve C

Maxime Bourrigan et Jean Nougayrède

19 mars 2024

1 Partie I

Les calculs ne seront pas détaillés.

1. (a) On a

$$\varphi_0'(0) = ay_{init} \ln \frac{\theta}{y_{init}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{y_{init}} > 1$$

et φ_0 est de classe C^1 donc pour un certain $\varepsilon > 0$, on a

$$\forall t \in [0, \varepsilon], \varphi_0'(t) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{\varphi_0(t)} > 1.$$

Par stricte croissance, il vient

$$\forall t \in]0, \varepsilon], \varphi_0(t) > y_{init},$$

ce qui conclut.

(b) Après calculs, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, z_0'(t) = -az_0(t)$$

donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, z_0(t) = Ce^{-at}.$$

Après calculs, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi_0(t) = \theta \left(\frac{y_{init}}{\theta}\right)^{e^{-at}}.$$

(c) La stricte croissance de φ_0 découle directement d'une dérivation. Par ailleurs, on a

$$\varphi_0(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \theta$$

et donc

$$\forall t \in]0, +\infty[, y_{init} < \varphi_0(t) < \theta.$$

2. Après calculs, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, z'_\mu(t) = -az_\mu(t) + \frac{a}{\theta^\mu}$$

et donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, z_\mu(t) = \frac{1}{\theta^\mu} + Ce^{-at}.$$

Avec la condition initiale, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ln \varphi_\mu(t) = -\frac{1}{\mu} \ln\Big(y_{init}^{-\mu} e^{-at} + \frac{1}{\theta^\mu}(1 - e^{-at})\Big).$$

3. (a) Par l'équivalent simple

$$1 - \exp(\mu \ln(y/\theta)) \underset{\mu\to 0}{\sim} -\mu \ln \frac{y}{\theta},$$

on obtient directement la convergence simple de F_μ vers F_0 sur $]0, +\infty[$ quand μ tend vers 0.

(b) Après calculs (des DL à l'ordre 1), on a l'équivalent simple

$$\ln\Big(y_{init}^{-\mu} e^{-at} + \theta^{-\mu}(1 - e^{-at})\Big) \underset{\mu\to 0}{\sim} -\mu\Big(e^{-at} \ln y_{init} + (1 - e^{-at}) \ln \theta\Big),$$

et l'on conclut par continuité de la fonction exponentielle.

2 Partie II : théorème d'Arzelà-Ascoli

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in K$ et $r = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Soit $f \in B$ et $y \in B(x, r) \cap K$.

Alors on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut.

2. **Sens direct.** Soit A une partie relativement compacte. Fixons A' une partie compacte telle que $A \subset A'$. Alors toute suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite du compact A' et donc possède une sous-suite convergente dans A', donc une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction de $A' \subset C(K, \mathbb{R}^d)$ ($C(K, \mathbb{R}^d)$ est muni de la norme de la convergence uniforme).

Sens réciproque. Supposons que toute suite d'éléments de A possède une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction de $C(K, \mathbb{R}^d)$. Notons $\overline{A}$ l'adhérence de A dans $C(K, \mathbb{R}^d)$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\overline{A}$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on peut fixer $g_n \in A$ tel que

$$\|f_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par hypothèse, on peut fixer $g \in C(K, \mathbb{R}^d)$ et φ une extraction tels que

$$g_{\varphi(n)} \to g.$$

Par opérations, on a aussi

$$f_{\varphi(n)} \to g.$$

Enfin, par caractérisation séquentielle, on a $g \in \overline{A}$ et donc la suite (f_n) possède une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$.

Cela montre la compacité de $\overline{A}$. Le compact $\overline{A}$ contient A donc A est relativement compacte.

3. Soit A une partie relativement compacte de $C(K, \mathbb{R}^d)$. Supposons que A ne soit pas équicontinue et fixons $\varepsilon > 0$ ainsi que $x \in K$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n \in A, \exists y_n \in B\big(x, \frac{1}{2^n}\big) \cap K, \|f_n(x) - f_n(y_n)\| > \varepsilon.$$

Par la question précédente, fixons $g \in C(K, \mathbb{R}^d)$ et φ une extraction tels que

$$\|f_{\varphi(n)} - g\|_\infty \to 0.$$

Par encadrement et continuité de g en x, on a

$$y_{\varphi(n)} \to x \quad \text{donc} \quad g(y_{\varphi(n)}) \to g(x).$$

Par majoration et opérations, on en déduit que

$$f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)}) \to g(x).$$

On a aussi

$$f_{\varphi(n)}(x) \to g(x) \quad \text{donc} \quad \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \to 0,$$

ce qui est contradictoire avec la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon.$$

4. Supposons que A soit relativement compacte.

D'après la question précédente, A est équicontinue.

Soit $x \in K$. L'application

$$\varphi : \begin{cases} C(K, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \\ f \mapsto f(x) \end{cases}$$

est linéaire et

$$\forall f \in C(K, \mathbb{R}^d), \|\varphi(f)\| = \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty,$$

donc φ est continue.

Comme A est relativement compacte, son adhérence $\overline{A}$ est un fermé inclus dans un compact, donc un compact.

Ainsi, $\varphi(\overline{A})$ est un compact (de $\mathbb{R}^d$), donc une partie bornée. L'inclusion

$$A(x) \subset \varphi(\overline{A})$$

permet de conclure.

5. (a) La suite $(f_n(x_0))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension finie donc il existe une extraction φ_0 telle que $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))$ converge.

Suppsons les extractions $\varphi_0, \dots, \varphi_p$ construites telles que les suites $(f_{\varphi_0 \cdots \varphi_p(n)}(x_p))_n$ soient convergentes.

La suite $(f_{\varphi_0 \cdots \varphi_p(n)}(x_{p+1}))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$ donc il existe une extraction φ_{p+1} telle que $(f_{\varphi_0 \cdots \varphi_{p+1}(n)}(x_{p+1}))_n$ soit convergente.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\ell_p \in \mathbb{R}^d$ la limite de la suite $(f_{\varphi_0 \cdots \varphi_p(n)}(x_p))_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Les inégalités suivantes

$$\varphi_{p+1} \cdots \varphi_{n+1}(n+1) = \varphi_{p+1} \cdots \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) \geq \varphi_{p+1} \cdots \varphi_n(n+1) > \varphi_{p+1} \cdots \varphi_n(n)$$

montrent que $n \mapsto \varphi_{p+1} \cdots \varphi_n(n)$ est strictement croissante sur $[\![p+1, +\infty[\![$.

De la convergence de $(f_{\varphi_0 \cdots \varphi_p(n)}(x_p))_n$ on déduit par suite extraite que

$$f_{\varphi_0 \cdots \varphi_p \varphi_{p+1} \cdots \varphi_n(n)}(x_p) \to \ell_p,$$

ce qui conclut.

6. (a) Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on dispose d'une suite (x_p) telle que

$$\mathbb{Q} \cap K = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}.$$

D'après la question précédente, on dispose d'une suite $(\ell_p)_p \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, f_{\psi_n(n)}(x_p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_p.$$

Par vérification immédiate, $n \mapsto \psi_n(n)$ est strictement croissante et donc la suite définie par $g_n = f_{\psi_n(n)}$ convient.

(b) **Attention : l'énoncé est erroné.**

On rajoute une hypothèse manquante. On suppose que

$$\overline{\mathbb{Q} \cap K} = K,$$

ce qui est par exemple vérifié lorsque K est un segment.

Soit $x \in K$. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - g_p(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(x_q)\| + \|g_n(x_q) - \ell_q\| + \|\ell_q - g_p(x_q)\| \\ + \|g_p(x_q) - g_p(x)\|. \end{aligned}$$

On peut alors choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ et $p \geq N$, on ait

$$\|g_n(x) - g_p(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(x_q)\| + 2\varepsilon + \|g_p(x_q) - g_p(x)\|.$$

Par équicontinuité de A, on peut fixer $r > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall y \in B(x, r) \cap K, \|g_n(y) - g_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

Par densité de $\mathbb{Q} \cap K$ dans K, on peut choisir $q \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x_q\| < r$ et l'on a

$$\|g_n(x) - g_p(x)\| \leq 4\varepsilon.$$

Maintenant, fixons λ et μ deux valeurs d'adhérences que l'on suppose distinctes de la suite $(g_n(x))$ ainsi que φ et ψ des extractions associées. On prend $\varepsilon = \dfrac{\|\lambda - \mu\|}{8}$ et l'on a

$$\forall n \geq N, \|g_{\varphi(n)}(x) - g_{\psi(n)}(x)\| \leq \frac{\|\lambda - \mu\|}{2}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et l'on obtient

$$\|\lambda - \mu\| \leq \frac{\|\lambda - \mu\|}{2},$$

ce qui constitue une absurdité.

La suite $(g_n(x))$ est bornée, possède une unique valeur d'adhérence et $\mathbb{R}^d$ est de dimension finie, donc $(g_n(x))$ est une suite convergente, ce qui conclut.

7. (a) Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité, on peut fixer $r > 0$ tel que

$$\forall y \in B(x, r) \cap K, \forall n \in \mathbb{N}, \|g_n(x) - g_n(y)\| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit

$$\forall y \in B(x, r) \cap K, \|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut.

(b) Raisonnons par l'absurde et fixons $\varepsilon > 0$ ainsi que φ une extraction tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g_{\varphi(n)} - g\|_\infty > \varepsilon.$$

On peut alors fixer une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g_{\varphi(n)}(x_n) - g(x_n)\| > \varepsilon.$$

Par compacité, on peut fixer $\ell \in K$ et ψ une extraction tel que

$$x_{\psi(n)} \to \ell.$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|g_{\varphi\psi(n)}(x_{\psi(n)}) - g(x_{\psi(n)})\| > \varepsilon.$$

La suite $(x_{\psi(n)})$ converge vers ℓ donc, par équicontinuité, pour n assez grand, on a

$$\|g_{\varphi\psi(n)}(x_{\psi(n)}) - g_{\varphi\psi(n)}(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par convergence simple de la suite (g_n) sur K, on a aussi, pour n assez grand :

$$\|g_{\varphi\psi(n)}(\ell) - g(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin, par continuité de g en ℓ, toujours pour n assez grand, on a

$$\|g(\ell) - g(x_\psi(n))\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par somme et inégalité triangulaire, on en déduit une absurdité.

(c) On vient de montrer que toute suite (f_n) d'éléments de A possède une sous-suite qui converge uniformément vers une certaine fonction de $C(K, \mathbb{R}^d)$. Par la question 2, on en déduit que A est relativement compacte.

Partie III : théorème de Cauchy-Peano

1. On peut trouver $r > 0$ tel que $B_r \subset \Omega$. En effet,
   — si $\Omega = \mathbb{R}^d$, $r = 1$ convient ;
   — sinon, la distance entre y_{init} et le fermé non vide $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ est atteinte, et $r = \frac{1}{2} d\big(y_{\text{init}}, \mathbb{R}^d \setminus \Omega\big)$ convient.

   D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction continue $\|F\|$ admet un maximum M sur le compact B_r.

   Posons alors $T = \frac{r}{M+1}$.

   On montre alors par récurrence finie que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, il existe une liste $(y_0, y_1, \ldots, y_k) \in B_r^{k+1}$ telle que $y_0 = y_{\text{init}}$ et

   $$\forall j \in [\![0, k-1]\!], \begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{T}{N} F(y_j) \\ \|y_j - y_0\| \leq j \frac{TM}{N}. \end{cases}$$

   L'initialisation étant claire, fixons $k \in [\![0, N-1]\!]$ et une telle liste $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$, et vérifions qu'en prolongeant la liste par $y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} F(y_k)$, on obtient encore une liste qui convient. Les deux points à vérifier sont :
   — l'inégalité $\|y_{k+1} - y_0\| \leq (k+1)\frac{TM}{N}$, conséquence de l'inégalité triangulaire :

   $$\|y_{k+1} - y_0\| \leq \underbrace{\frac{T}{N}\, \|F(y_k)\|}_{\leq TM/N} + \|y_k - y_0\| \leq (k+1)\frac{TM}{N},$$

   — l'appartenance de y_{k+1} à B_r, conséquence immédiate de l'inégalité précédente et de la remarque $(k+1)\frac{TM}{N} \leq TM \leq r$.
2. Une fonction $[0, T] \to \mathbb{R}^d$, affine sur chacun des sous-intervalles donnés par l'énoncé est uniquement déterminée par ses valeurs aux « points de coupure » $n\frac{T}{N}$ ($n \in [\![0, N]\!]$), ce qui montre l'existence et l'unicité d'une telle fonction φ_N.

   Sa continuité est immédiate en tout point différent d'un point de coupure intérieur (en un voisinage duquel elle est affine), et guère plus compliquée en un point de coupure intérieur, car ses limites à gauche et à droite coïncident.

   Remarquons que la convexité de B_r entraîne que φ_N est même à valeurs dans B_r.
3. D'après le théorème 1 (d'Ascoli-Arzelà) et la question II-2, il suffit de montrer que l'ensemble $\Phi = \{\varphi_N \mid N \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinu et que, pour tout $x \in [0, T]$, l'ensemble $\Phi(x)$ est borné.

   Ce deuxième point est déjà clair car on a remarqué à la fin de la question précédente que $\forall x \in [0, T], \Phi(x) \subset B_r$.

   Pour le premier, on peut commencer par remarquer (par une petite disjonction de cas) que si $a < b < c$ sont trois réels et que $f : [a, c] \to \mathbb{R}^d$ est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ et k-lipschitzienne sur $[b, c]$, alors elle est k-lipschitzienne sur $[a, c]$.

   En appliquant récursivement cette remarque, on obtient que, pour tout

$N \in \mathbb{N}$, la fonction φ_N est k_N-lipschitzienne, où

$$k_N = \max_{n \in [\![0, N-1]\!]} \frac{\|y_{n+1} - y_n\|}{T/N} = \max_{n \in [\![0, N-1]\!]} \|F(y_n)\|$$

Or, on voit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, k_N est majoré par la norme uniforme de F sur le compact B_r, si bien que tous les éléments de Φ sont des fonctions $\|F\|_\infty^{B_r}$-lipschitziennes.

La question II-1 entraîne alors que Φ est équicontinu, ce qui conclut.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction ψ_N sur $[0, T] = \bigsqcup_{n \in [\![0, N-1]\!]} \left[n\frac{T}{N}, (n+1)\frac{T}{N}\right[\sqcup \{T\}$ en lui donnant la valeur $y_n = \varphi_N\left(n\frac{T}{N}\right)$ sur chaque sous-intervalle $I_n = \left[n\frac{T}{N}, (n+1)\frac{T}{N}\right[$ (pour $n < N$) et la valeur y_N en T. Il s'agit clairement d'une fonction en escalier.

   La fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) $t \mapsto F\big(\psi_N(t)\big)$ est alors elle-même constante sur les intervalles I_n, ce qui entraîne que la fonction $\widetilde{\varphi}_N : t \mapsto y_{\text{init}} + \int_0^t F\big(\psi_N(s)\big)\, ds$ est affine sur chaque segment $\overline{I}_n = I_n \cup \{\sup I_n\}$.

   Par ailleurs, on montre facilement par récurrence finie (ou télescopage) que $\forall n \in [\![0, N]\!], \widetilde{\varphi}_N\left(n\frac{T}{N}\right) = y_n$, en utilisant la relation de Chasles et le calcul $\int_{n\frac{T}{N}}^{(n+1)\frac{T}{N}} F\big(\psi_N(s)\big)\, ds = \int_{I_n} F(y_n)\, ds = \frac{T}{N} F(y_n)$.

   L'unicité montrée à la question 2 (notons que l'on n'y a pas utilisé l'hypothèse de continuité) montre alors $\widetilde{\varphi}_N = \varphi_N$, ce qui conclut.

5. Notons une imprécision de l'énoncé : la suite de fonctions $(\psi_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas entièrement caractérisée par la propriété de l'énoncé, car on peut changer à loisir la valeur de ψ_N en un nombre fini de points (différents des points de coupure) sans que cela ait d'impact sur l'égalité de la question précédente. Si l'on s'amuse à ça (en posant par exemple $\psi_N(x_*) = N$ pour une valeur $x_* \in [0, T]$ telle que $x \notin T\mathbb{Q}$) , il est clair que la suite de fonctions $(\psi_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ n'a plus de raison d'avoir de sous-suite convergeant, même simplement.

   On travaillera donc dans la suite avec la suite de fonctions $(\psi_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ que l'on a nous même définie.

   Il suffit de montrer que $\|\psi_N - \varphi_N\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ pour que la question 3 entraîne $\psi_{\chi(m)} \xrightarrow[m \to +\infty]{\text{CU}} \varphi$, pour toute extractrice $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $\varphi_{\chi(m)} \xrightarrow[m \to +\infty]{\text{CU}} \varphi$.

   Rappelons que toutes les fonctions φ_N sont k-lipschitziennes, avec $k = \|F\|_\infty^{B_r}$. Notons σ_N la subdivision $\left(n\frac{T}{N}\right)_{n=0}^N$.

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, T]$. On peut trouver un point p de la subdivision σ_N tel que $x \geq p$ et $|x - p| \leq \frac{T}{N}$. On en déduit, car $\psi_N(x) = \psi_N(p) = \varphi_N(p)$, que

$$\|\varphi_N(x) - \psi_N(x)\| = \|\varphi_N(x) - \varphi_N(p)\| \leq k\ |x - p| \leq k\frac{T}{N},$$

   ce qui montre $\|\varphi_N - \psi_N\|_\infty \leq k\frac{T}{N}$, et conclut.

6. D'après le théorème de Heine, la fonction F est uniformément continue sur le compact B_r. La convergence uniforme $\psi_{\chi(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{\text{CU}} \varphi$ ne mettant en jeu que des fonctions à valeurs dans B_r, on en déduit sans difficulté la convergence uniforme $F \circ \psi_{\chi(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{\text{CU}} F \circ \varphi$.

   Le théorème d'intégration d'une limite uniforme sur un segment est énoncé dans le programme officiel pour une suite de fonctions continues, mais on vérifie sans peine que sa démonstration reste valable pour des fonctions (la limite et les éléments de la suite) continues par morceaux. On en déduit que la suite de fonctions $\left(t \mapsto \int_0^x F \circ \psi_{\chi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\left(t \mapsto \int_0^x F \circ \varphi\right)_{m\in\mathbb{N}}$. En ajoutant la constante y_{init}, on obtient même que $\left(\varphi_{\chi(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction

$$\widetilde{\varphi} : t \mapsto y_{\text{init}} + \int_0^t F\big(\varphi(s)\big)\, ds.$$

   Par unicité de la limite uniforme, cette fonction doit donc être φ elle-même.

   D'après le théorème fondamental, la fonction $\varphi = \widetilde{\varphi}$ est de classe C^1, et elle vérifie $\varphi(0) = y_{\text{init}}$ et $\varphi' = F \circ \varphi$, ce qui conclut.

   Tout ce raisonnement ayant été mené avec une fonction F continue arbitraire, on a démontré le théorème 2 (de Cauchy-Peano).

7. La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, t^3 \end{cases}$ est manifestement positive, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, puis sur $\mathbb{R}$ (à la main, ou par le théorème de la limite de la dérivée), de dérivée $t \mapsto 3\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\, t^2 = 3f^{2/3} = 3\,|f|^{2/3}$.

   Cette fonction f est donc solution du problème de Cauchy de l'énoncé. Par dérivation des fonctions composées, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\tau : t \mapsto f(t-\tau)$ est encore solution de l'équation (autonome) $y' = 3\,|y|^{2/3}$. Or, pour tout $\tau \geq 0$, la fonction f_τ vérifie par ailleurs encore la condition initiale $f_\tau(0) = 0$.

   Ainsi, ce problème de Cauchy possède une infinité de solutions globales, à savoir (au moins) les fonctions $(f_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}_+}$. Notons que ces fonctions sont bien distinctes parce que, par exemple, $\forall \tau \in \mathbb{R}, f_\tau^{-1}\{1\} = \{\tau+1\}$.

Partie IV. Inclusions différentielles

1. Soit $X : [0, T[\to \mathbb{R}^d$ et $Y : [0, T_+[\to \mathbb{R}^d$ deux solutions maximales. Quitte à échanger leurs rôles, on suppose que $T \leq T_+$.

   En raffinant, on prend une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ adaptée aux deux solutions, c'est-à-dire vérifiant les propriétés (i) à (v) de l'énoncé.

   Par opérations, la fonction $\rho : t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|^2 = \langle X(t) - Y(t) | X(t) - Y(t)\rangle$ est continue sur $[0, T[$ et dérivable sur chaque composante ouverte de la subdivision : pour tout $i < N$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, on a par dérivation des fonctions composées et en utilisant l'hypothèse

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= 2\,\langle X'(t) - Y'(t) | X(t) - Y(t)\rangle \\ &\leq 2C_K\,\|X(t) - Y(t)\|^2 = 2C_K\,\rho(t).\end{aligned}$$

La fonction $\sigma : t \mapsto \rho(t)\,\exp(-2C_K\,t)$ est donc continue sur $[0, T[$, dérivable sur chaque composante ouverte de la subdivision ouverte, et de dérivée négative sur chacune de ces composantes. On en déduit qu'il s'agit d'une fonction (positive) décroissante (elle l'est sur chaque composante fermée de la subdivision et sur $[t_{N-1}, T[$, ce qui entraîne la décroissance globale).

Comme par ailleurs σ est positive et que $\sigma(0) = 0$, on en déduit que la fonction σ est nulle, ce qui montre que $X = Y$ sur $[0, T[$. Par maximalité de X, on en déduit $T = T_+$, d'où $X = Y$.

2. (a) Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Nous allons montrer que $C_K = 1$ convient.

   Soit $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in K$. Soit $v_x \in \mathcal{F}(x), v_y \in \mathcal{F}(y)$. On note ξ et η, respectivement, les abscisses de v_x et v_y, les ordonnées valant 2 dans tous les cas. Notons que $|\xi|, |\eta| \leq 1$.

   On a alors $\langle v_x - v_y | x - y\rangle = (\xi - \eta)(x_1 - y_1)$. Nous allons montrer que ce produit scalaire est toujours ≤ 0, ce qui entraînera l'inégalité.

   — Si $x_1 = y_1 = 0$, le produit scalaire est nul.
   — La même chose est vraie si x_1 et y_1 sont non nuls et de même signe car $\xi = \eta$ dans ce cas.
   — Si x_1 et y_1 sont non nuls et de signe opposé, la définition montre que $\xi - \eta = -2\mathrm{sgn}(x_1 - y_1)$ est du signe opposé à $x_1 - y_1$, donc le produit scalaire est < 0.
   — Enfin, si (quitte à les échanger, ce qui ne change pas la valeur du produit scalaire) $x_1 \neq 0$ et $y_1 = 0$, on a $\xi = -\mathrm{sgn}(x_1)$ et $|\eta| \leq 1$, donc $\xi - \eta$ est, au sens large, du signe opposé à x_1. Dans ce cas, le produit scalaire vaut $x_1(\xi - \eta) \leq 0$.

   (b) On vérifie sans difficulté que $t \mapsto (0, 2t)$ est une solution globale du problème.

   Étant globale, elle est maximale. La question précédente garantissant l'unicité d'une telle solution, il s'agit de la seule solution maximale du problème.

   (c) On vérifie sans difficulté que $t \mapsto \begin{cases}(1-t, 2t) & \text{si } t \leq 1\\ (0, 2t) & \text{si } t \geq 1\end{cases}$ est une solution globale (et donc maximale) du problème, les mêmes arguments que précédemment montrant qu'il s'agit de la seule.

3. Notons une erreur d'énoncé, les vecteurs v^- et v^+ ne vérifiant pas la convention $v_1^- \geq v_1^+$ pourtant promise avant la question 2. Cette erreur n'est pas mathématiquement gênante (la convention ne servant probablement qu'à écrire les segments « dans le bon sens » dans la définition de $\mathcal{F}(x)$) mais elle peut légitimement agacer le lecteur ayant dû digérer des notations un peu bourratives...

   (a) et (c) Pour tout $\tau \in [0, +\infty]$, on note $X_\tau : t \mapsto \begin{cases}(0, t) & \text{si } t \leq \tau\\ (t - \tau, t) & \text{si } t \geq \tau\end{cases}$.

On vérifie sans difficulté que toutes les fonctions X_τ sont des solutions globales (donc maximales) du problème.

En particulier, il n'y a pas unicité de la solution maximale, donc la question 1. entraîne que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas la condition (3).

Reste à montrer que toute solution maximale est de cette forme : soit $Y : [0, T[\to \mathbb{R}^2$ une solution maximale du problème (pour un certain $T \in]0, +\infty]$).

Notons $T : t \mapsto (f(t), g(t))$, et considérons une subdivision $(t_i)_{i=0}^N$ comme dans l'énoncé.

La fonction g est continue, dérivable sur chaque composante ouverte de la subdivision, et sa dérivée y vaut constamment 1 car l'ordonnée de tout vecteur de tout $\mathcal{F}(x)$ vaut 1. On en déduit que $g : t \mapsto t$ (par exemple en montrant, par récurrence sur i, que g coïncide avec $t \mapsto t$ sur $[0, t_i[$ puis sur $[0, t_i]$ par continuité...).

Le même type de raisonnement montre que f est croissante, car sa dérivée sur chaque composante ouverte de la subdivision est ≥ 0.

Considérons l'ensemble $Z = \{t \in [0, T[\mid f(t) = 0\}$, non vide car contenant 0. Par croissance et continuité de f, Z est un intervalle et un fermé relatif de $[0, T[$.

On en déduit que $Z = [0, T[$ ou qu'il existe $\tau < T$ tel que $Z = [0, \tau]$.

- Dans le premier cas, Y est une restriction de $X_\infty : t \mapsto (0, t)$, donc, par maximalité, $Y = X_\infty$.
- Dans le deuxième cas, on a $\forall t \leq \tau, f(t) = 0$ et $\forall t > \tau, t \notin \{t_i\} \implies f'(t) = 1$, donc $\forall t \geq \tau, f(t) = t - \tau$. La fonction Y coïncide donc avec X_τ, donc, par maximalité, $Y = X_\tau$.

(b) L'unique solution maximale est $X : t \mapsto (t + 1, t)$.

En effet, comme à la question précédente, on pourra écrire toute solution maximale sous la forme $t \mapsto (f(t), t)$, où f est croissante, donc ≥ 1, donc doit vérifier $f'(t) = 1$ (sur toute composante ouverte de la subdivision, et donc partout)...