Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

Début du sujet.

On note $\mathbb{C}[[z]]$ l'ensemble des séries entières complexes $f = \sum (f)_k z^k$. Un élément de $\mathbb{C}[[z]]$ est donc une suite complexe $(f)_k$, $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{C}[[z]]$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec les opérations

$$(f+g)_k := (f)_k + (g)_k \quad , \quad (af)_k := a(f)_k.$$

On le munit aussi du produit de Cauchy $f \cdot g$ donné par

$$(f \cdot g)_k := \sum_{i=0}^{k} (f)_i (g)_{k-i}$$

pour lequel c'est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}[[z]]$, on note $f(z)$ la valeur de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f)_k z^k$$

lorsque celle-ci converge. On note $\rho(f) \in [0, \infty]$ (c'est-à-dire l'ensemble des réels positifs auquel on ajoute l'élément $+\infty$) le rayon de convergence de la série f. Il est caractérisé par la propriété suivante : la série f converge en z si $|z| < \rho(f)$, et diverge si $|z| > \rho(f)$.

On note $O_k \subset \mathbb{C}[[z]]$ l'espace des séries entières dont les k premiers coefficients sont nuls, c'est-à-dire des séries de la forme $(f)_k z^k + (f)_{k+1} z^{k+1} + \cdots$. Pour $f \in \mathbb{C}[[z]]$ et $d \in \mathbb{N}$, on note

$$[f]_d := (f)_0 + (f)_1 z + \cdots + (f)_d z^d$$

le polynôme obtenu en tronquant f à l'ordre d. C'est un élément de $\mathbb{C}[[z]]$, et $f - [f]_d \in O_{d+1}$.

Lorsque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction développable en série entière au voisinage de 0, on note encore f la série entière correspondante. Par exemple, on note $1/(1-z)$ la série $1 + z + z^2 + \cdots$. On note I, ou z, l'application identité du plan complexe ainsi que la série entière associée.

Étant donné une série entière f, on note $\hat{f}$ la série entière dont les coefficients sont les modules des coefficients de f. Pour $r \in [0, \infty]$, la somme à termes positifs $\hat{f}(r) = \sum_{k \geqslant 0} |(f)_k| \, r^k$ a toujours une valeur dans $[0, \infty]$. On convient pour la définir sans ambiguïté que le terme $|(f)_k| \, r^k$ est nul si $|(f)_k| = 0$, même pour $r = +\infty$.

On définit sur $\mathbb{C}[[z]]$ la relation $\prec$ par

$$f \prec g \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \quad |(f)_k| \leqslant |(g)_k|) \, .$$

Lorsque $f \in O_1$ vérifie $(f)_1 \neq 0$, elle admet une série réciproque, qui sera définie et étudiée dans la question D, et qui sera ensuite notée $f^\dagger$.

Le problème comporte 29 questions, numérotées de 1 à 29, et regroupées par thèmes.

A Premières propriétés

(1) Soit f une série entière et z un complexe tel que $\hat{f}(|z|) < \infty$. Montrer alors que la série f converge en z et que $|f(z)| \leqslant \hat{f}(|z|)$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.

(2) Si f et g sont deux séries entières telles que $f \prec g$, montrer que $\rho(f) \geqslant \rho(g)$.

(3) Montrer, pour $r > 0$, que

$$r < \rho(f) \Rightarrow \exists a > 0 \text{ tel que } f \prec \frac{a}{r - z} \Rightarrow r \leqslant \rho(\hat{f}),$$

déduire en particulier que $\rho(\hat{f}) = \rho(f)$.

(4) Montrer que $\widehat{f \cdot g} \prec \hat{f} \cdot \hat{g}$, déduire que $\rho(f \cdot g) \geqslant \min(\rho(f), \rho(g))$.

B Composition

Si f est une série entière quelconque et g une série entière sans terme constant (c'est-à-dire $g \in O_1$), on définit la composée $f \circ g$ par

$$(f \circ g)_m = \sum_{k=0}^{m} (f)_k \left(g^k\right)_m ,$$

où $\left(g^k\right)_m$ est le coefficient de degré m du produit $g^k = g \cdot g \cdots g$ (k facteurs) pour $k \geqslant 1$, et $g^0 = 1$. On verra ci-dessous que $f \circ g(z) = f(g(z))$ sous les hypothèses appropriées, ce qui justifie la notation.

(5) Si $f \in O_n$,$n \geqslant 0$, $g \in O_1$, $h \in O_l$, $l \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$, montrer que $h^r \in O_{rl}$, que $f \circ h \in O_{nl}$ et $f \circ (g + h) - f \circ g \in O_{n+l-1}$.

(6) Soit f et g des séries entières, avec $g \in O_1$. Montrer que $\widehat{f \circ g} \prec \hat{f} \circ \hat{g}$. Déduire que, si f et g ont un rayon de convergence strictement positif, alors $\rho(f \circ g) > 0$.

(7) Si f, g sont à coefficients réels positifs, $h, g \in O_1$, montrer que $h \prec g \Rightarrow f \circ h \prec f \circ g$.

(8) Montrer, si f et $g \in O_1$ sont à coefficients réels positifs et si $r \in [0, \infty]$, que $f \circ g(r) = f(g(r))$.

(9) Soit f et g des séries entières, avec $g \in O_1$. Pour tout z vérifiant $|z| < \rho(\hat{f} \circ \hat{g})$, montrer que la série f converge en $g(z)$ et que $f \circ g(z) = f(g(z))$.

(10) Soit f, g et h des séries entières, avec $g, h \in O_1$, montrer que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

C Série majorante

Dans cette partie, on considère une série entière $g \in O_1$ à coefficients réels positifs. On suppose qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que

$$g \prec a \left(I + \frac{g^2}{b - g} \right).$$

On se propose de montrer qu'alors $\rho(g) > 0$. On interprète ici $g^2/(b-g)$ comme la composition $f \circ g$ des séries entières $f(z) = z^2/(b-z)$ et g.

(11) Montrer qu'il existe $r > 0$ et une fonction $h :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$, développable en série entière en 0, vérifiant $h(0) = 0$ et telle que

$$h(x) = a\left(x + \frac{h(x)^2}{b - h(x)}\right)$$

pour tout $x \in]-r, r[$. On note encore h l'élément de O_1 associé à la fonction h.

(12) Montrer, par récurrence sur k, que $(g)_k \leqslant (h)_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, conclure.

D Série réciproque

On considère dans la suite du sujet une série entière $f = \lambda z + F$, $F \in O_2$, $\lambda = (f)_1 \neq 0$. On se propose de montrer qu'il existe une unique série $f^\dagger$, la série réciproque de f, telle que $f^\dagger \circ f = I = f \circ f^\dagger$. On montrera de plus dans cette partie que $f^\dagger$ a un rayon de convergence strictement positif si f a un rayon de convergence strictement positif.

(13) Montrer qu'il existe une unique série $h \in O_1$ telle que $h \circ f = I$, et que $(h)_1 = 1/\lambda$.

(14) Montrer qu'il existe une unique série $g \in O_1$ telle que $f \circ g = I$.

(15) Montrer que $g = h$.

(16) Montrer que $\hat{g} \prec (1/\lambda)(I + \hat{F} \circ \hat{g})$, conclure à l'aide de la partie **C** que $\rho(g) > 0$ si $\rho(f) > 0$.

On considère maintenant le cas particulier d'une série de la forme $f = I + F$, $F \in O_2$. On note $G := f^\dagger - I$, $G \in O_2$.

(17) Montrer que $[G]_{d+1} + F \circ (I + [G]_d) \in O_{d+2}$ pour tout $d \geqslant 1$ (la notation $[f]_d$ est définie dans l'introduction du sujet).

(18) On suppose qu'il existe $s > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\hat{F}(s) \leqslant \alpha s$. Montrer alors que pour tout $d \geqslant 2$, $\widehat{[G]}_d((1-\alpha)s) \leqslant \alpha s$. Conclure que

$$\hat{G}((1-\alpha)s) \leqslant \alpha s.$$

Toute la suite du sujet est consacrée au problème de linéarisation qui consiste, étant donné une série $f \in O_1$, à trouver une série $h \in O_1$ pour laquelle $h^\dagger \circ f \circ h = (f)_1 z$.

E Linéarisation formelle

On pose $\lambda = (f)_1$ et on note $f = \lambda z + F$, avec $F \in O_2$. On suppose que $\lambda \neq 0$ et que λ n'est pas une racine complexe de l'unité, c'est-à-dire que $\lambda^n \neq 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et on se propose de montrer qu'il existe une unique série entière de la forme $h = I + H$, $H \in O_2$ vérifiant $h^\dagger \circ f \circ h = \lambda z$. On étudiera le rayon de convergence de h dans les parties suivantes.

(19) Montrer qu'il existe une unique série $H \in O_2$ telle que $H \circ (\lambda I) - \lambda H = F \circ (I + H)$.

(20) Conclure.

F Linéarisation, cas hyperbolique

On suppose ici que $|\lambda| \notin \{0, 1\}$ et que $\rho(f) > 0$. On se propose de montrer sous ces hypothèses que les séries entières h et H de la partie précédente ont un rayon de convergence strictement positif.

(21) Montrer qu'il existe $\omega > 0$ tel que $|\lambda^m - \lambda| \geqslant \omega$ pour tout entier $m \geqslant 2$.

(22) Montrer que la série H vérifie $\hat{H} \prec \frac{1}{\omega} \hat{F} \circ (I + \hat{H})$.

(23) Conclure.

G Linéarisation, cas elliptique

On étudie maintenant le problème de linéarisation dans le cas $|\lambda| = 1$. On suppose de plus que λ n'est pas une racine de l'unité, de sorte que la suite

$$\omega_k := \left|\lambda^k - \lambda\right|, \ k \geq 2$$

est strictement positive. Contrairement au cas de la partie précédente, elle n'est toutefois pas minorée par un réel strictement positif (fait qui pourra être utilisé sans vérification dans la suite), ce qui nous amène à utiliser une méthode différente pour étudier le rayon de convergence de la série entière h de la partie **E**. On pose, pour $m \geqslant 1$,

$$\alpha_m := \min\left(1/5, \omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \ldots, \omega_{2m}\right), \quad \gamma_m := \alpha_m^{2/m},$$

de sorte que $\alpha_m \in]0, 1/5]$ et $\gamma_m \in]0, 1[$.

(24) On se donne une série $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$ telle que $\rho(F) > 0$. Montrer qu'il existe $r_0 \in]0, 1[$ tel que $\hat{F}(r) \leqslant r$ pour tout $r \in [0, r_0]$. Montrer alors, pour $\gamma \in]0, 1[$, que

$$\hat{F}(r) \leqslant \gamma^m r$$

pour tout $r \in [0, \gamma r_0]$.

(25) Toujours pour $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$, on pose

$$P := \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{(F)_k}{\lambda^k - \lambda} z^k \in O_{m+1} \quad , \quad R := (I + P)^\dagger - I.$$

Montrer que $P \circ (\lambda I) - \lambda P - F \in O_{2m+1}$ et que $R + P \in O_{2m+1}$. Montrer que $\hat{P}(r) \leqslant \alpha_m r$ pour tout $r \in [0, \gamma_m r_0]$, et que

$$\hat{R}(r) \leqslant \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} r$$

pour tout $r \in [0, (1 - \alpha_m)\, \gamma_m r_0]$.

(26) Pour $F \in O_{m+1}$, $m \geqslant 1$, montrer que

$$G := (I+P)^{\dagger} \circ (\lambda I + F) \circ (I+P) - \lambda I = (I+R) \circ (\lambda I + F) \circ (I+P) - \lambda I$$

vérifie $G \in O_{2m+1}$.

(27) Montrer que

$$\hat{G}(r) \leqslant \left(\alpha_m + (1+\alpha_m)\, \alpha_m^2 + \frac{\alpha_m (1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)}{1-\alpha_m} \right) r \leqslant r$$

pour tout r tel que

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{1-\alpha_m}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_m^2)} \gamma_m r_0.$$

(28) On considère une série entière $f = \lambda I + F$ avec $F \in O_2$, $\rho(F) > 0$. On suppose encore que λ est de module 1 et n'est pas une racine de l'unité. On considère le réel $r_0 > 0$ donné par la question (24) (appliquée pour $m = 1$) et la suite r_k définie par récurrence à partir de r_0 par la relation

$$r_{k+1} = (1 - \alpha_{2^k}) \left(1 + \alpha_{2^k}^2\right)^{-1} (1 + \alpha_{2^k})^{-1} \gamma_{2^k} r_k.$$

Montrer qu'il existe des suites F_k et P_k d'éléments de O_2, définies pour $k \geqslant 0$, telles que $F_0 = F$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\begin{array}{l} \lambda I + F_{k+1} = (I+P_k)^{\dagger} \circ (\lambda I + F_k) \circ (I + P_k) \\ F_k \in O_{1+2^k}, \quad P_k \in O_{1+2^k}, \\ \widehat{F_k}(r_k) \leqslant r_k, \quad \widehat{P_k}(r_{k+1}) \leqslant r_k - r_{k+1}. \end{array}$$

(29) On pose $r_\infty := \lim r_k$ et

$$h_k := (I + P_0) \circ (I + P_1) \circ \cdots \circ (I + P_{k-1}).$$

Expliquer pourquoi r_∞ est bien définie, et montrer que $\hat{h}_k(r_k) \leqslant r_0$ pour tout $k \geqslant 1$. Déduire que la série h de la partie **E** vérifie $\hat{h}(r_\infty) \leqslant r_0$, donc que $\rho(h) \geqslant r_\infty$.

Fin des questions.

Le nombre r_∞ / r_0 ne dépend que de λ. On peut montrer qu'il est strictement positif pour de nombreux complexes λ de module 1, on a alors $\rho(h) > 0$.

Fin du sujet.