

X-ENS MP 2022 Mathématiques A

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

- NOTATIONS ET RAPPELS -

- Dans tout le problème, p désigne un entier strictement positif.
- On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. Pour tous entiers a et b dans \mathbb{N} tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \leq b\}$. On note \mathfrak{S}_p le groupe des permutations de l'ensemble fini $\llbracket 1, p \rrbracket$ muni de la composition.
On note $\varepsilon : \mathfrak{S}_p \rightarrow \{-1, +1\}$ l'application signature, définie comme l'unique morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_p, 0)$ dans $(\{-1, +1\}, \times)$ qui vaut -1 sur toutes les transpositions.
- On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées de taille $p \times p$. Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^p$, on appelle produit mixte de (x_1, \dots, x_p) la quantité

$$[x_1 \dots, x_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p x_{\sigma(i), i}$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a noté $x_j = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$. En particulier, si on note $(x_1 | \dots | x_p)$ la matrice de taille $p \times p$ élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs x_1, \dots, x_p , on a donc l'égalité $[x_1, \dots, x_p] = \det((x_1 | \dots | x_p))$ où \det est le déterminant usuel.

- Si F et G sont deux \mathbb{R} -espaces vectoriels, on dit que $f : F^p \rightarrow G$ est p -linéaire alternée si pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in F^p$ et tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application

$$y \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

de F dans G est linéaire et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on a

$$f(u \cdot \sigma) = \varepsilon(\sigma) f(u)$$

où $u \cdot \sigma = (u_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq p}$.

On notera $\mathcal{A}_p(F, G)$ l'ensemble des applications p -linéaires alternées de F^p dans G .

- Dans tout le problème, on considère un espace euclidien E de dimension $d \geq 1$ muni de son produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. On note pour $x \in E$, $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ la norme associée.
- Pour tout entier q non nul, et toute famille $(u_1 \dots u_q)$ d'éléments de E . $Vect(u_1 \dots u_q)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1 \dots u_q$.
- Pour tous $u = (u_1 \dots u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ dans E^p , on note $\text{Gram}(u, v)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ par

$$\text{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle.$$

- PARTIE I -

Soient V et V' deux sous-espaces de E de dimension p (on rappelle que $p \geq 1$).

- (1) (a) Montrer qu'il existe $u_1 \in V$ et $u'_1 \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup \{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1 \}$$

- (b) Étendre ce résultat en montrant qu'il existe une famille $u = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de V et une famille $u' = (u'_1, \dots, u'_p)$ de vecteurs de V' telles que u et u' soient orthonormées et vérifient les deux conditions suivantes :

- i. Pour $k = 1$, on a

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup \{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1 \}$$

- ii. Pour $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \langle u_k, u'_k \rangle &= \sup \{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \\ &\quad \langle a, u_\ell \rangle = \langle a', u'_\ell \rangle = 0 \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \}. \end{aligned}$$

(Indication : On pourra construire les vecteurs u_k et u'_k par récurrence sur l'entier k .)

On fixe deux telles familles u et u' dans le reste de la partie I.

- (2) Montrer que si $\dim(V \cap V') \geq 1$, on a $u_k = u'_k$ pour tout $1 \leq k \leq \dim(V \cap V')$.
- (3) (a) Montrer que u est une base orthonormée de V .
- (b) Montrer que pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a $u'_k \in \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_p)^\perp$.
(Indication : On pourra considérer l'application $t \mapsto u_k(t) = \frac{u_k + tu_\ell}{\|u_k + tu_\ell\|}$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \llbracket k+1, p \rrbracket$ ainsi que sa dérivée.)
- (c) Montrer que $u_{k+1} \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$ pour tout k élément de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$.
- (d) En déduire que les sous-espaces $W_k = \text{Vect}(u_k, u'_k)$ pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont orthogonaux deux à deux.
- (4) (a) Montrer qu'il existe $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p \leq \pi/2$ tel que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
- (b) Calculer la valeur de $\det(\text{Gram}(u, u'))$ en fonction des $\cos(\theta_k)$.
- (c) En déduire que $\det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1$. Que dire sur V et V' dans le cas d'égalité ?

- PARTIE II -

Pour tout $e \in E^p$, on considère $\Omega_p(e) : E^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E^p$ par

$$\Omega_p(e)(u) = \det(\text{Gram}(e, u)).$$

- (5) (a) Vérifier que l'application $(x_1, \dots, x_p) \mapsto [x_1, \dots, x_p]$ appartient à $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.
- (b) Vérifier que si F est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et si $f : F \rightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors $g : F^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $u = (u_1, \dots, u_p) \in F^p$ par $g(u) = [f(u_1), \dots, f(u_p)]$ est un élément de $\mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})$.
- (6) (a) Montrer que pour tout $e \in E^p$, on a $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
- (b) Vérifier que pour tout $(e, u) \in E^p \times E^p$, on a $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$.
- (c) Montrer que $\Omega_p \in \mathcal{A}_p(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))$.
- (7) (a) Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ dans E^p vérifiant $e'_i = \sum_{j=1}^p M_{i,j} e_j$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que $\Omega_p(e') = \det(M) \Omega_p(e)$.
- (b) Soit $e \in E^p$. Montrer que $\Omega_p(e) \neq 0$ si et seulement si e est une famille libre.
- (c) Vérifier que $\Omega_p(e)(e) \geq 0$ pour toute famille $e \in E^p$.

Dans la suite pour tout $e \in E^p$, on appelle p -volume de e la quantité

$$\text{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = (\det(\text{Gram}(e, e)))^{1/2}.$$

- (8) (a) Calculer $\text{vol}_p(b)$ lorsque $b = (b_1, \dots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E .
- (b) On suppose ici que $p \geq 2$. Soit $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$. On note pr la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \dots, e_p)$.
Montrer que $\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$.
- (c) Pour toute famille libre $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$, montrer que $\text{vol}_p(e) \leq \prod_{i=1}^p \|e_i\|$ avec égalité si et seulement si e est une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2.
- (9) (a) Montrer que si $e \in E^p$ est une famille libre et si $b \in E^p$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(e)$ alors $\text{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$ où P_b^e est la matrice de passage de b à e i.e $e_j = \sum_{i=1}^p (P_b^e)_{i,j} b_i$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
- (b) Montrer que pour tous $e, e' \in E^p$, on a $|\Omega_p(e)(e')| \leq \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e')$.

- PARTIE III -

Soient $e = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de E , p un entier tel que

$$1 \leq p \leq d \text{ et } \mathcal{I}_p = \{\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d\}.$$

Pour tout $\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p$, on note $e_\alpha = (e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \in E^p$ et pour tous ω et ω' éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$

$$(1) \quad \langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\alpha).$$

- (10) (a) Montrer que pour tout $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, on a $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$.
- (b) En déduire que $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ pour lequel $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et donner la dimension de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
- (c) Construire dans le cas $p = d - 1$ une isométrie entre $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et E .
- (11) On considère $u, v \in E^p$. Montrer que

$$\Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle.$$

- (12) Montrer que le produit scalaire $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ défini par (1) ne dépend que du produit scalaire sur E et non du choix de la base orthonormée e .

- PARTIE IV -

Soit $p \in \llbracket 1, d \rrbracket$. On définit une relation sur l'ensemble des bases d'un sous-espace V de dimension p de E par : e et e' sont en relation si $\det_e(e') > 0$ où $\det_e(e')$ est le déterminant de e' dans la base e . On admet que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de V pour laquelle il existe exactement deux classes d'équivalence appelées orientations de V . Un sous-espace orienté est un couple (V, C) où C est une orientation de V .

On note $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ l'ensemble des sous-espaces orientés de dimension p de E .

- (13) (a) Montrer que si e et e' sont deux familles libres de cardinal p de E alors $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires si et seulement si $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$.
- (b) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel orienté (V, C) de dimension p de E , il existe une unique $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ tel que pour tout $e \in C$ on a $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Psi(V, C)$.

- (14) On munit $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ du produit scalaire introduit dans la partie III.
- (a) Vérifier que $\Psi : (V, C) \mapsto \Psi(V, C)$ est une injection de $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ dans la sphère de rayon 1 de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
 - (b) Montrer que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est une partie compacte de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.
- (15) Montrer que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est une partie connexe par arcs de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ si et seulement si $p \leq d - 1$.
(Indication : On pourra utiliser la question 3d.)