

X-ENS MP 2022 Corrigé de Mathématiques A

m.laamoum@gmail.com

- PARTIE I -

Soient V et V' deux sous espaces de E de dimension $p \geq 1$.

- (1) (a) L'ensemble $A = \{(a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1\} = S_V(0, 1) \times S_{V'}(0, 1)$ le produit des deux sphères unité de V et V' , c'est un fermé borné donc compact de $E \times E$, muni de la topologie produit, de plus l'application $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est bilinéaire en dimensions finies donc elle est continue et elle est bornée sur A et atteint ses bornes, d'où l'existence de $u_1 \in V$ et $u'_1 \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup \{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1 \}$$

- (b) Le cas $k = 1$ est démontré dans la question (a), supposons le résultat pour $2 \leq k \leq p - 1$, on a donc une famille $u = (u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de V et une famille $u' = (u'_1, \dots, u'_k)$ de vecteurs de V' telles que u et u' soient orthonormées et vérifient les deux conditions i) et ii)

L'ensemble $B = \left(S_V(0, 1) \cap [Vect(\{u_1, \dots, u_k\})]^\perp \right) \times \left(S_{V'}(0, 1) \cap [Vect(\{u'_1, \dots, u'_k\})]^\perp \right)$ est un compact non vide de $E \times E$, φ est bornée sur B et atteint ses bornes, donc ils existent $u_{k+1} \in V$ et $u'_{k+1} \in V'$ de norme 1 et vérifient les deux conditions i) et ii). Ce qui prouve le résultat pour $k + 1$.

Si $k = p$ alors B est vide et le procédé s'arrête. Ainsi on a prouvé le résultat.

- (2) Supposons $\dim(V \cap V') \geq 1$, soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormée $V \cap V'$, on prend $u_k = u'_k = e_k$, ils vérifient i) et ii), car $\langle u_k, u'_k \rangle = 1$ et pour tout $(a, a') \in V \cap V'$, $\|a\| = \|a'\| = 1$, par l'inégalité de Cauchy Schwartz on a $|\langle a, a' \rangle| \leq 1$. Réciproquement si $(a, a') \in V \cap V'$, $\|a\| = \|a'\| = 1$ et $\langle a, a' \rangle = 1$, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwartz donc ils sont colinéaires, par suite ils sont égaux.

- (3) (a) u a p éléments et elle est orthonormée, donc libre, ainsi u est une base orthonormée de V .

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Posons $u_k(t) = \frac{u_k + tu_\ell}{\|u_k + tu_\ell\|}$ pour $\ell \in \llbracket k+1, p \rrbracket$ et tous $t \in \mathbb{R}$, elle est bien définie car u_k et u_ℓ sont non colinéaires. Elle est de plus $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.

De plus, comme (u_k, u_ℓ) est orthonormée, on a $\|u_k + tu_\ell\| = \sqrt{1 + t^2}$.

On pose $g : t \mapsto \langle u_k(t), u'_k \rangle$, remarque que $\forall t \in \mathbb{R}, \|u_k(t)\| = 1, u_k(0) = u_k$ et si $r \leq k-1$, alors $\langle u_r, u_k(t) \rangle = 0$.

Ainsi g admet un maximum en $t = 0$ et $g'(0) = 0$. On a $g'(t) = \left\langle \frac{d}{dt} u_k(t), u'_k \right\rangle$, de plus

$$\frac{d}{dt} u_k(t) = -\frac{t}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} u_k + \frac{1}{(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} u_\ell \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} u_k(0) = u_\ell$$

donc $g'(0) = \langle u_\ell, u'_k \rangle = 0$, ce qui donne $u'_k \in Vect(u_{k+1}, \dots, u_p)^\perp$.

- (c) Soit k dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, d'après (a) et (b) on a

$$u_{k+1} \in Vect(u_1, \dots, u_k)^\perp \cap Vect(u'_1, \dots, u'_k)^\perp = (Vect(u_1, \dots, u_k) + Vect(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$$

- (d) Soit $k, h \in \llbracket 1, p \rrbracket$, avec $k < h$; on a

$$Vect(u_k, u'_k) \subset Vect(u_1, \dots, u_{h-1}) + Vect(u'_1, \dots, u'_{h-1})$$

donc

$$u_h \in (Vect(u_1, \dots, u_{h-1}) + Vect(u'_1, \dots, u'_{h-1}))^\perp \subset Vect(u_k, u'_k)^\perp$$

Les familles u et u' jouent un rôle symétrique, donc

$$u'_h \in (Vect(u_1, \dots, u_{h-1}) + Vect(u'_1, \dots, u'_{h-1}))^\perp \subset Vect(u_k, u'_k)^\perp$$

d'où V_k et V_h sont orthogonaux.

(4) (a) On a pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$|\langle u_k, u'_k \rangle| \leq \|u_k\| \cdot \|u'_k\| = 1$$

donc il existe θ_k telle que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$; la relation ii) de la question 1 montre que la suite

$$(\langle u_k, u'_k \rangle)_{1 \leq k \leq p} = (\cos(\theta_k))_{1 \leq k \leq p}$$

est croissante et positive les θ_k sont toutes dans $[0, \pi/2]$ ou dans $[-\pi/2, 0]$, $\cos$ est paire, on prend donc les θ_k dans $[0, \pi/2]$ et elles vérifient donc $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p \leq \pi/2$.

(b) On a si $i \neq j$ alors $\langle u_i, u'_j \rangle = 0$ donc la matrice $\text{Gram}(u, u')$ est diagonale et

$$\det(\text{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^p \langle u_k, u'_k \rangle = \prod_{k=1}^p \cos(\theta_k)$$

(c) On a

$$\det(\text{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^p \cos(\theta_k) \text{ et } 0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p \leq \pi/2$$

donc $\det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1$.

On a égalité si et seulement si $\theta_1 = \dots = \theta_p = 0$, ce qui donne pour tout

$$k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle u_k, u'_k \rangle = \|u_k\| \cdot \|u'_k\| = 1$$

ce qui donne $u_k = u'_k$, par suite $V = V'$.

- PARTIE II -

(5) (a) On vérifie que le déterminant est alterné. Soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$:

$$[x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(p)}] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma \circ \varphi(i), i} = \prod_{\sigma'' = \sigma' \circ \sigma} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma'') \prod_{i=1}^n x_{\sigma''(i), i} = \varepsilon(\sigma) [x_1, \dots, x_p]$$

l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ \varphi$ est une bijection sur $\mathfrak{S}_p$ d'application réciproque $\sigma \mapsto \sigma \circ \varphi^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} [x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(p)}] &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma \circ \varphi^{-1}) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i} \\ &= \varepsilon(\varphi^{-1}) [x_1, \dots, x_p] \\ &= \varepsilon(\varphi) [x_1, \dots, x_p] \end{aligned}$$

Ainsi l'application $(x_1, \dots, x_p) \mapsto [x_1, \dots, x_p]$ appartient à $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

(b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned} g(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) &= [f(u_{\sigma(1)}), \dots, f(u_{\sigma(p)})] \\ &= \varepsilon(\sigma) [f(u_1), \dots, f(u_p)] \end{aligned}$$

donc $g \in \mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})$.

(6) (a) Soit $e \in E^p$, on remarque que

$$\Omega_p(e)(u) = [f_e(u_1), \dots, f_e(u_p)] \quad \text{avec} \quad f_e : x \in E \mapsto (\langle e_1, x \rangle, \dots, \langle e_p, x \rangle) \in \mathbb{R}^p.$$

Par la question précédente, on a bien $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Soit $(e, u) \in E^p \times E^p$, la matrice de Gram est symétrique, par symétrie du produit scalaire on a

$$\begin{aligned}\Omega(e)(u) &= \det(\text{Gram}(e, u)) \\ &= \det(\text{Gram}(u, e)) \\ &= \Omega(u)(e)\end{aligned}$$

(c) Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\Omega(e \cdot \sigma)(u) &= \Omega_p(u)(e \cdot \sigma) \\ &= \varepsilon(\sigma) \Omega_p(u)(e) \quad (\Omega_p(u) \text{ est alternée}) \\ &= \varepsilon(\sigma) \Omega_p(e)(u)\end{aligned}$$

d'où $\Omega_p \in \mathcal{A}(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))$.

(7) (a) Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ dans E^p vérifiant $e'_i = \sum_{j=1}^p M_{i,j} e_j$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Pour tout u dans E^p on a

$$\begin{aligned}\text{Gram}(e', u) &= (\langle e'_i, u_j \rangle)_{i,j} \\ &= \left(\left\langle \sum_{k=1}^p M_{i,k} e_k, u_j \right\rangle \right)_{i,j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^p M_{i,k} \langle e_k, u_j \rangle \right)_{i,j} \\ &= (M \cdot \text{Gram}(e, u))_{i,j} \\ &= M \cdot \text{Gram}(e, u)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Omega_p(e')(u) &= \det(\text{Gram}(e', u)) \\ &= \det(M \cdot \text{Gram}(e, u)) \\ &= \det(M) \cdot \det(\text{Gram}(e, u))\end{aligned}$$

Ainsi $\Omega_p(e') = \det(M) \Omega_p(e)$.

(b) Soit $e \in E^p$ une famille liée, il existe un e_i qui est combinaison de $(e_k)_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}}$, par linéarité du produit scalaire la i ème colonne $\text{Gram}(e, e)$ est combinaison des autres colonnes, donc $\Omega_p(e) = 0$.

Réciproquement si $\Omega_p(e) = 0$, alors il existe un vecteur non nul $X = {}^t(x_1, \dots, x_p)$ tel que $\text{Gram}(e, e)X = 0$, on a

$$\begin{aligned}\text{Gram}(e, e)X &= {}^t \left(\sum_{j=1}^p \langle e_1, e_j x_j \rangle, \dots, \sum_{j=1}^p \langle e_p, e_j x_j \rangle \right) \\ &= {}^t \left(\left\langle e_1, \sum_{j=1}^p e_j x_j \right\rangle, \dots, \left\langle e_p, \sum_{j=1}^p e_j x_j \right\rangle \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}{}^t X \text{Gram}(e, e)X &= \sum_{i=1}^p x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^p e_j x_j \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{j=1}^p e_j x_j \right\|^2 \quad (*)\end{aligned}$$

donc $\sum_{j=1}^p e_j x_j = 0$ et $(x_1, \dots, x_p) \neq (0, \dots, 0)$ donc e est liée.

Ainsi $\Omega_p(e) \neq 0$ si et seulement si e est une famille libre.

- (c) $\text{Gram}(e, e)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, si λ une valeur propre de $\text{Gram}(e, e)$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_p)$ un vecteur propre associé, la relation (*) donne

$$\begin{aligned} {}^tX \text{Gram}(e, e)X &= \lambda \cdot {}^tX \cdot X \\ &= \lambda \cdot \|X\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^p e_j x_j \right\|^2 \end{aligned}$$

$$X \neq 0, \text{ donc } \lambda \geq 0 \text{ à suite } \Omega_p(e)(e) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(\text{Gram}(e, e))} \lambda \geq 0.$$

- (8) (a) Si $b = (b_1, \dots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E , alors $\text{Gram}(e, e) = I_p$ donc $\text{vol}_p(b) = 1$.
(b) On suppose $p \geq 2$. Soit $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$. On a pr la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \dots, e_p)$ donc

$$e_1 - \text{pr}(e_1) = \sum_{j=2}^p \alpha_j e_j \in \text{vect}(e_2, \dots, e_p)$$

posons $e' = (\text{pr}(e_1), e_2, \dots, e_p)$ et $\text{Gram}(e, e) = (C_1 | C_2 | \dots | C_p)$, alors par bilinéarité du produit scalaire on a $\text{Gram}(e', e') = (C_1 - \sum_{j=2}^p \alpha_j C_j | C_2 | \dots | C_p)$ ainsi $\Omega_p(e')(e') = \Omega_p(e)(e)$.

Comme $\text{pr}(e_1) \in (e_2^p)^\perp$ alors

$$\begin{aligned} \Omega_p(e')(e') &= \begin{vmatrix} \|\text{pr}(e_1)\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{Gram}(e_2^p, e_2^p) & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\ &= \|\text{pr}(e_1)\|^2 \Omega_p(e)(e) \end{aligned}$$

d'où $\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$.

- (c) Avec les notations précédentes, on a $\|\text{pr}(e_1)\| \leq \|e_1\|$ (par la relation de Pythagore), donc

$$\text{vol}_p(e) \leq \|e_1\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p).$$

Par récurrence on obtient $\text{vol}_p(e) \leq \prod_{i=1}^p \|e_i\|$.

Si $\text{vol}_p(e) = \prod_{i=1}^p \|e_i\|$ alors on a

$$\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p), \quad \|\text{pr}(e_1)\| \leq \|e_1\| \quad \text{et} \quad \text{vol}_p(e_2^p) \leq \prod_{i=2}^p \|e_i\|$$

donc forcément on a $\|\text{pr}(e_1)\| = \|e_1\|$ et $\text{vol}_{p-1}(e_2^p) = \prod_{i=2}^p \|e_i\|$, ce qui donne $e_1 \in (e_2^p)^\perp$.

Par récurrence on a e est une famille orthogonale. La réciproque découle du fait que e est une famille orthogonale et

$$\text{Gram}(e, e) = \text{diag}(\|e_1\|^2, \dots, \|e_p\|^2).$$

- (9) (a) On a $e_j = \sum_{i=1}^p (P_b^e)_{ij} b_i$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, d'après 7.(a).,

$$\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e)^2 \Omega_p(b)(b) = \det(P_b^e)^2$$

de plus $\Omega_p(b)(b) = 1$ (car b est orthonormée), donc

$$\Omega_p(e)(e) = \det(P_b^e)^2$$

et

$$\text{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = |\det(P_b^e)|$$

- (b) Si l'une des famille e ou e' est liée, alors on a $\Omega_p(e)(e') = \Omega_p(e')(e) = 0$, l'inégalité est vérifiée.
Si e et e' sont libres, soit $V = \text{vect}(e)$ et $V' = \text{vect}(e')$, il sont de dimension p , on utilise les deux bases orthonormée u et u' construites dans la question 1.b).

La question 7.a) donne

$$\Omega_p(e)(e') = \det(P_u^e) \det(P_{u'}^{e'}) \Omega_p(u)(u')$$

donc

$$|\Omega_p(e)(e')| = \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e') |\Omega_p(u)(u')|$$

d'après 4.c) on a $|\Omega_p(u)(u')| \leq 1$ ce qui donne

$$|\Omega_p(e)(e')| \leq \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e')$$

- PARTIE III -

- (10) (a) Soit $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et $u = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ avec $x_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j} e_j$ pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

L'application ω est p linéaire donc

$$\omega(u) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq d} \left(\prod_{i=1}^p a_{i,j_i} \right) \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

Si on a $j_k = j_\ell$, alors comme ω est alterné, on a $\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq d \\ \sigma \in \mathfrak{S}_p}} \left(\prod_{i=1}^p a_{i,\sigma(j_i)} \right) \omega(e_{\sigma(j_1)}, \dots, e_{\sigma(j_p)}) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq d \\ \sigma \in \mathfrak{S}_p}} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i=1}^p a_{i,\sigma(j_i)} \right) \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p a_{i,\sigma(j_i)} \end{aligned}$$

e est une base orthonormée de E donc $a_{i,j} = \langle x_i, e_j \rangle$ et

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p \langle x_i, e_{\sigma(j_i)} \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)(u) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$.

- (b) Il est clair que l'application $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\alpha)$ est bilinéaire et symétrique.

De plus, on a

$$\langle \omega, \omega \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha)^2 \geq 0$$

et $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ si, et seulement si, $\forall \alpha \in \mathcal{I}_p, \omega(e_\alpha) = 0$, or $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$, donc $\omega = 0$.

Ainsi $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_p$, alors

$$\langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) \Omega_p(e_\beta)(e_\gamma)$$

Si $\alpha = \gamma$ alors $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) = 1$ et si $\alpha \neq \gamma$ alors $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) = 0$ car une ligne de Gram(e_α, e_γ) est nulle, donc $\Omega_p(e_\alpha)(e_\gamma) = \delta_{\alpha,\gamma}$, par suite

$$\langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_p} \delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\beta}$$

Ainsi la famille $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est orthonormée.

(c) $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est orthonormée donc elle est libre, de plus elle est génératrice d'après 10.a).

Ainsi $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est une base orthonormée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. On a $\dim(\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})) = \text{Card}(\mathcal{I}_p) = \binom{p}{d}$.

(d) Soit $\alpha \in \mathcal{I}_{d-1}$, on note $i_\alpha = \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$. Soit f l'application linéaire de $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$ vers E telle que $f(\Omega_{d-1}(e_\alpha)) = e_{i_\alpha}$. Comme f transforme une base orthonormée en une base orthonormée, donc c'est une isométrie entre $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$ et E .

(11) Soit $u, v \in E^p$, d'après 10.a), appliquée à $\omega = \Omega_p(u)$, on a :

$$\begin{aligned} \Omega_p(u)(v) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)(v) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \Omega_p(u)(e_\alpha) \Omega_p(v)(e_\alpha) \\ &= \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle \end{aligned}$$

(12) Soit e et e' sont deux bases orthonormées de E , alors $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ et $(\Omega_p(e'_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ sont deux bases orthonormées de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, donc on a

$$\begin{aligned} \langle \omega, \omega' \rangle &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \langle \omega, \Omega_p(e_\alpha) \rangle \langle \omega', \Omega_p(e_\alpha) \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \langle \omega, \Omega_p(e'_\alpha) \rangle \langle \omega', \Omega_p(e'_\alpha) \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \omega, \omega' \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

- PARTIE IV -

(13) (a) On note $V = \text{Vect}(e)$ et $V' = \text{Vect}(e')$.

Si $V = V'$, alors on a

$$\Omega_p(e') = \det(P_e^{e'}) \Omega_p(e)$$

donc, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires.

Réciproquement, si $\Omega_p(e) = \lambda \Omega_p(e')$.

Soit u et u' les familles de la question 1.b) qui sont des bases orthonormées de V et V' .

Donc

$$\begin{aligned} \Omega_p(u)(u') &= \det(P_e^u) \Omega_p(e)(u') \\ &= \lambda \det(P_e^u) \Omega_p(e')(u') \\ &= \lambda \det(P_e^u) \det(P_{u'}^{e'}) \Omega_p(u')(u') \\ &= \lambda \det(P_e^u) \det(P_{u'}^{e'}) \quad (\text{car } u' \text{ est orthonormée}) \end{aligned}$$

de même ,

$$\begin{aligned}
\Omega_p(u')(u) &= \det(P_{e'}^{u'}) \Omega_p(e')(u) \\
&= \frac{1}{\lambda} \det(P_{e'}^{u'}) \Omega_p(e, u) \\
&= \frac{1}{\lambda} \det(P_{e'}^{u'}) \det(P_u^e) \Omega_p(u, u) \\
&= \left(\lambda \det(P_{u'}^{e'}) \det(P_e^u) \right)^{-1} \\
&= \Omega_p(u')(u)^{-1} = \Omega_p(u)(u')^{-1}
\end{aligned}$$

ainsi $\Omega_p(u)(u') = 1$ d'après 4.c) on a $V = V'$.

- (b) Soit (V, C) un sous espace orienté et $e \in C$, soit b la base orthonormée obtenue par l'orthonormalisation de Schmidt, la matrice de passage de e à b est triangulaire supérieure de diagonale strictement positive, donc b est de même orientation que e , elle est directe.

On a

$$\text{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)| = \det(P_b^e)$$

donc

$$\Omega_p(e) = \det(P_b^e) \Omega_p(b) = \text{vol}_p(e) \Omega_p(b)$$

Si $e' \in C$ et b' la base orthonormée de Schmidt associée, alors b et b' sont dans C , donc

$$\det P_b^{b'} > 0$$

$P_b^{b'}$ est une matrice orthogonale donc $\det P_b^{b'} = 1$ et $\Omega_p(b) = \Omega_p(b')$.

Posons $\Psi(V, C) = \Omega_p(b)$ qui ne dépend pas de e et $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Pour l'unicité on prend e orthonormée.

- (14) (a) Soit b une base orthonormée directe de V , on la complète en une base, B , orthonormée de E , on a $\Psi(V, C) = \Omega_p(b)$, la famille $(\Omega_p(B_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$ est orthonormée ($\exists \alpha \in \mathcal{I}_p$ telle que $b = B_\alpha$) donc $\Psi(V, C)$ est dans la sphère de rayon 1 de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Soit (V, C) et (V', C') dans $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$, on suppose que $\Psi(V, C) = \Psi(V', C')$. Considérons des bases e et e' de V et V' , donc

$$\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Psi(V, C) = \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e')^{-1} \Omega_p(e')$$

Ainsi, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires et par 13.a), on a $V = V'$.

Soit $e \in C$ et $e' \in C'$ orthonormées, alors

$$\Psi(V, C) = \Omega_p(e) = \Psi(V, C') = \Omega_p(e') = \det(P_e^{e'}) \Omega_p(e')$$

comme $\Omega_p(e') \neq 0$, on en déduit que $\det(P_e^{e'}) = 1 > 0$, donc $C = C'$.

- (b) Ψ est bornée sur $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ donc $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est borné.

Montrons que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est fermé : soit e une base de E et (ψ_n) une suite de $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ convergente dans $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ vers ψ , elle s'écrit $\psi_n = \Psi(V_n, C_n)$, soit b^n une base orthonormée directe de (V_n, C_n) .

On a

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} (\psi_n - \psi)^2(e_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$\psi_n(e_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(e_\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{I}_p$$

de plus $\psi_n(e_\alpha) = \Omega_p(b^n)(e_\alpha)$, comme les éléments de b^n sont unitaires donc on peut en extraire une sous suite convergente $b^{\varphi(n)}$, soit b sa limite, par continuité du produit scalaire b est orthonormée, posons $V = \text{vect}(b)$ et C l'orientation de b . On a

$$\Omega_p(b)(e_\alpha) = \Psi(V, C)(e_\alpha)$$

Ω_p est continue de E^p vers $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ donc

$$\Psi(V_{\varphi(n)}, C_{\varphi(n)})(e_\alpha) = \Omega_p(b^{\varphi(n)})(e_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Omega_p(b)(e_\alpha) = \Psi(V, C)(e_\alpha)$$

d'où

$$\Psi(V_{\varphi(n)}, C_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi(V, C) \text{ et } \Psi(V_n, C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Psi(V, C)$$

(ψ_n) converge dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$, qui est donc fermé.

$\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie donc $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est un compact.

(15) On suppose que $p \leq d-1$. Soit V, V' deux sous espaces de dimension p .

Si $V \neq V'$, soit u et u' les deux familles associées à V et V' définies dans 1.b). On rappelle que $W_k = \text{Vect}(u_k, u'_k)$ sont deux à deux orthogonaux. On note

$$e_k(t) = tu'_k + (1-t)u_k \in W_k \setminus \{0\} \quad , \quad f_k(t) = \frac{e_k(t)}{\|e_k(t)\|}$$

et $V_t = \text{Vect}(f_1(t), \dots, f_p(t))$ avec C_t l'orientation associée.

La famille $(f_k(t))_{1 \leq k \leq p}$ est une base orthonormée directe de (V_t, C_t) , posons $f : t \mapsto (f_1(t), \dots, f_p(t))$, on a

$$\Psi(V_t, C_t) = \Omega_p(f(t))$$

L'application $\varphi_{V, V'} : t \mapsto \Psi(V_t, C_t) = \Omega_p(f(t))$ est un chemin, continue dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$, tel que

$$\varphi_{V, V'}(0) = \Psi(V, C) \text{ et } \varphi_{V, V'}(1) = \Psi(V', C').$$

Si $V = V'$ et $C \neq C'$. Comme $p \leq d-1$ alors $V^\perp \neq \{0\}$, soit $v \in V^\perp$ de norme 1. On note $W = \text{vect}(e_1 + v, e_2, \dots, e_n)$, qui est différent de V , on définit les applications $\varphi_{V, W}$ et $\varphi_{W, V'}$ et posons

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E)) \\ t &\mapsto \begin{cases} \varphi_{V, W}(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_{W, V'}(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

φ est un chemin continue dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ reliant $\Psi(V, C)$ et $\Psi(V, C')$.

Ainsi $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est connexe par arcs.

Réciproquement, si $p = d$. Alors, on a deux orientations C et C' de E et alors $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E)) = \{\Psi(E, C), \Psi(E, C')\}$ et $\Psi(E, C) \neq \Psi(E, C')$ donc $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(d, E))$ n'est pas connexe par arcs.