X-ENS 2021 : épreuve C

Question préliminaire

1. On prouve le résultat par récurrence sur n. L'hypothèse au rang n est

$$\boxed{\forall g \in C^\infty(I,\mathbb{R}),\ |Z(g)| \geq n \implies (\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ |Z(g^{(i)}| \geq n-i))}$$

- Le résultat au rang 2 est conséquence du théorème de Rolle.
- Supposons le résultat vrai aux rangs $2, \dots, n$. Soit g de classe C^∞ s'annulant au moins $n+1$ fois. Par théorème de Rolle, g' s'annule au moins n fois. Le résultat au rang n pour g' permet alors de finir de prouver le résultat au rang $n+1$.

1 Intersections atypiques et fractions rationnelles

Fractions rationnelles et rationalité

2. (a) $\dim(K[X]_p \times K[X]_q) = p+q+2 > \dim(K^d)$ et donc

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$$

(b) La question précédente sonne un élément $(U,V) \neq (0,0)$ dans le noyau de φ et on a donc $\forall i \in\ [\![1,d]\!],\ U(x_i) = F(x_i)V(x_i)$. Ainsi

$$\boxed{\exists (U,V) \neq (0,0),\ \forall i \in\ [\![1,d]\!],\ Q(x_i)U(x_i) = P(x_i)V(x_i) \text{ avec } U \in K[X]_p \text{ et } V \in\ K[X]_q}$$

PV et QU sont de degré $\leq p+q$ et égaux en au moins $d = p+q+1$ points distincts. Ces polynpomes sont égaux et $F = \frac{P}{Q} = \frac{U}{V}$. Ainsi

$$\boxed{F \in K(X)}$$

(c) $F(K \setminus \mathcal{P}(F)) \cap K$ est infini et on peut donc trouver $x_1, \dots, x_d$ dans K tels que les $f(x_i)$ soient distincts. Ce qui entraîne que les x_i le sont. On se retrouve dans la situation de la question précédente et

$$\boxed{F \in K(X)}$$

Intersections avec le cercle unité

3. (a) Soit $z \in U$. On a donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
Si $F(z) \in \mathbb{U}$ alors $F(z)\overline{F(z)} = 1$ c'est à dire $F(z)\overline{F}(\overline{z}) = 1$ ou encore $F(z)G(z) = 1$.
La réciproque est identique.

$$\boxed{F(z) \in \mathbb{U} \iff F(z)G(z) = 1}$$

(b) Si F est spéciale, il y a une infinité de $z \in \mathbb{U}$ tels que $F(z)G(z) = 1$. Ecrivons $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{P_1}{Q_1}$. $PP_1 - QQ_1$ admet alors une infinité de racine et est donc le polynôme nul. Ainsi $FG = 1$.
Si $FG = 1$ alors tout élément z de $\mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$ vérifie $F(z) \in\ \mathbb{U}$ et il y en a une infinité. F est donc spéciale.

$$\boxed{F \text{ est spéciale si et seulement si } FG = 1}$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a $|e^{i\theta} - \alpha| = |e^{-i\theta} - \overline{\alpha}| = |1 - \overline{\alpha}e^{i\theta}|$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{U} \setminus \{\alpha\}$ a son image par B_α dans $\mathbb{U}$. Il y une infinité de tels éléments et

$$\boxed{B_\alpha \text{ est spéciale}}$$

On a immédiatement

$$\boxed{B_0(X) = 1 \text{ et } B_{e^{i\theta}}(X) = -e^{i\theta}}$$

5. Comme F est spéciale, on a $F(X)G(X) = 1$.
   (a) Si $F(\alpha) = 0$ alors $\alpha \in \mathcal{P}(G)$ (sinon on n'a pas $FG = 1$) et donc $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{P}(\overline{F})$ ou encore $\frac{1}{\overline{\alpha}} \in \mathcal{P}(F)$. La réciproque est identique.

   $$\boxed{F(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{\overline{\alpha}} \in \mathcal{P}(F)}$$

   (b) On suppose que $F \in \mathbb{C}[X]$ et on a donc $\mathcal{P}(F) = \emptyset$. La question précédente montre que 0 est la seule racine possible pour F. Tout polynôme dans $\mathbb{C}$ étant scindé, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F = cX^d$.
   Mais comme F est spéciale, on a $FG = 1$ et donc $c\overline{c} = 1$ ce qui signifie que $c \in \mathbb{U}$.

   $$\boxed{\text{Un polynôme spécial est du type } cX^d \text{ avec } c \in \mathbb{U}}$$

   (c) On prouve le résultat demandé par récurrence sur le nombre de racines de la fraction.
   - Supposons la fraction sans racine. On a donc $F = \frac{1}{Q}$. Comme F est spéciale, il vient immédiatement que Q l'est et s'écrit donc cX^d avec $c \in \mathbb{U}$. Ainsi $F = X^{-d}B_{-\overline{c}}$ est du type voulu.
   - Supposons le résultat vrai quand F admet moins de n racines. Supposons alors que $F = \frac{P}{Q}$ avec p admettant $n+1$ racines. On note z l'une d'entre elles. $F(z) = 0$ entraîne que $1/\overline{z}$ est racine de Q et il existe des polynômes P_1, Q_1 tels que

   $$F(X) = \frac{X - z}{X - \frac{1}{\overline{z}}} \frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = -\overline{z} B_z(X) \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

   F et B_z étant spéciales, $-\overline{z}\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ l'est aussi et P_1 admet n racines. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure.

   $$\boxed{\exists d \in \mathbb{Z},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C},\ F(X) = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(X)}$$

Racines de l'unité

6. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F(\zeta_{n_j}) \in \mathbb{U}_n$. Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont ceux qui s'écrivent $\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ et on les a tous en prenant k entiers consécutifs. On peut donc prendre k tel que $\lfloor 1 - \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On a alors $\frac{k}{n} \in]-1/2, 1/2]$. On a donc l'existence de $q_j \in]-1/2, 1/2]$ tel que $F(\zeta_{n_j}) = \exp(2i\pi q_j)$.

   Supposons que deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ conviennent. On a alors $2\pi\frac{a}{b} = 2\pi\frac{c}{d}[2\pi]$ et donc $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$. Comme cette quantité est aussi dans $]-1, 1[$, elle est nulle et les rationnels sont égaux.

   $$\boxed{\forall j \geq 1,\ \exists! q_i \in \mathbb{Q} \cap] - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],\ F(\zeta_{n_j}) = \exp(2i\pi q_j)}$$

7. (q_j) étant à valeurs dans le compact $[-1/2, 1/2]$, pour montrer qu'elle est de limite nulle il suffit de montrer que 0 est sa seule valeur d'adhérence.
   Supposons donc avoir une extractrice φ telle que $q_{\varphi(j)} \to \ell$. Comme $n_{\varphi(j)} \to 0$, on a $\zeta_{n_{\varphi(j)}} \to 1$. En passant à la limite dans la relation vérifiée par la suite $(q_{\varphi(j)})$, on obtient $F(1) = e^{2i\pi\ell}$ et donc $1 = e^{2i\pi\ell}$. De plus $\ell \in [-1/2, 1/2]$ et donc $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{j\to+\infty} q_j = 0}$$

8. (a) Comme $P(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-1)Q$. On a alors

$$nP(\zeta_n) = n(\exp(\frac{2i\pi}{n}) - 1)Q(\zeta_n) \to 2i\pi Q(1)$$

Or, $P' = Q + (X-1)Q'$ et donc $Q(1) = P'(1)$. Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nP(\zeta_n) = 2i\pi P'(1)}$$

(b) On a

$$n_j(F(\zeta_{n_j}) - 1) = n_j \frac{P(\zeta_{n_j}) - Q(\zeta_{n_j})}{Q(\zeta_{n_j})} \to \frac{2i\pi(P-Q)'(1)}{Q(1)}$$

Or, $F' = \frac{P'}{Q} - F\frac{Q'}{Q}$ et donc $F'(1) = \frac{P'(1)}{Q(1)} - \frac{Q'(1)}{Q(1)}$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{j\to+\infty} n_j(F(\zeta_{n_j}) - 1) = 2i\pi F'(1)}$$

Or, $n_j(F(\zeta_{n_j}) - 1) = n_j(e^{2i\pi q_j} - 1) \sim 2i\pi q_j \ (j \to +\infty)$ et donc

$$\boxed{\lim_{j\to+\infty} n_j q_j = F'(1)}$$

9. La suite $(cn_jq_j)_{j\geq 1}$ est convergente et à valeurs entières. Elle est donc stationnaire à partir d'un certain rang :

$$\exists j_0 \geq 1,\ \exists m \in \mathbb{Z},\ \forall j \geq j_0,\ cn_jq_j = m$$

On a alors

$$\forall j \geq j_0,\ F(e^{\frac{2i\pi}{n_j}}) = e^{2i\pi q_j} = \left(e^{\frac{2i\pi}{cn_j}}\right)^m$$

On a donc une infinité de $z \in \mathbb{U}$ tels que $F(z^c) = z^m$ (les $z = e^{\frac{2i\pi}{cn_j}}$). Ecrivons $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$. On a alors $z^m Q(z^c) = P(z^c)$ pour une infinité de z.
Si $m \geq 0$, on a $Q(z^c)$ qui divise $P(z^c)$. Or $P(X^c)$ et $Q(X^c)$ sont premiers entre eux (utiliser une identité de Bézout pour P et Q) et donc $Q(X^c)$ est un polynôme constant et Q aussi. F est donc un polynôme. Or, F est spéciale (une infinité d'éléments de $\mathbb{U}$ est envoyé sur $\mathbb{U}$) et 5(b) indique que F est un monôme. Comme $F(1) = 1$, il existe d tel que $F(X) = X^d$.
Si $m < 0$ alors on a cette fois, de façon similaire, P qui est constant. $F = \frac{1}{Q}$ est spéciale et Q l'est donc aussi et comme ci dessus est un monôme unitaire.
Dans les deux cas

$$\boxed{\exists d \in \mathbb{Z},\ F(X) = X^d}$$

10. Les $x_j = \zeta_{n_j}$ ne sont pas pôles de F. Avec les notations de la question 2 ($d = p+q+1$ où P est de degré $\leq p$ et Q de degré $\leq q$), on pose

$$p = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_d)$$

Tous les x_j sont alors des puissances de ζ_p et donc dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ et de même les $F(x_j)$ sont tous dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. la question 2(b) s'applique et indique que

$$\boxed{F \in \mathbb{Q}(\zeta_p)(X)}$$

11. (a) l désigne le ppcm de N et de v. Notons δ le pgcd de N et v en sorte que $l\delta = Nv$. Par théorème de Bézout, il existe des entiers α, β tels que $\alpha N + \beta v = \delta = \frac{Nv}{l}$ et ainsi

$$\frac{1}{l} = \frac{\alpha}{v} + \frac{\beta}{N}$$

et on en déduit que

$$\zeta_l = \zeta_N^{\beta} e^{2i\pi\alpha/v}$$

Par ailleurs, $u \wedge v = 1$ et il existe des entiers α', β' tels que $\alpha' u + \beta' v = 1$ et donc $\frac{\alpha}{v} = \alpha\alpha'\frac{u}{v} + \alpha\beta'$. On en déduit que

$$e^{2i\pi\alpha/v} = e^{2i\pi\alpha\beta'} e^{2i\pi\alpha\alpha' u/v} = e^{2i\pi\alpha\alpha' q} = \zeta^{\alpha\alpha'}$$

En combinant nos deux relations, on montre donc que

$$\boxed{\exists a, b \in \mathbb{Z},\ \zeta_l = \zeta^a \zeta_N^b}$$

(b) On a $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$ et avec (a), on en déduit que $\zeta_l \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$ et donc que $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subset \mathbb{Q}(\zeta_N)$. En passant aux $\mathbb{Q}$-dimensions, le théorème admis donne

$$\boxed{\varphi(l) \leq \varphi(N)}$$

Utilisons alors les décompositions en produit de facteurs premiers. Comme l est multiple de N, elles s'écrivent

$$N = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i} \quad \text{et} \quad l = \prod_{i=1}^{s} p_i^{l_i}$$

avec $s \geq r$ et $l_i \geq n_i$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Avec l'expression de φ rappelée par l'énoncé, on a donc

$$\prod_{i=1}^{s} p_i^{l_i - 1}(p_i - 1) \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i - 1}(p_i - 1)$$

et on en déduit d'une part que si $i \in [\![1, r]\!]$, on a $n_i = l_i$ et d'autre part que si $i \in [\![r+1, s]\!]$, on a $p_i^{l_i-1}(p_i - 1) = 1$. Ainsi $s = r$ ou $s = r+1$ avec $p_{r+1} = 2$ et $l_{r+1} = 1$ ou encore $l = N$ ou $l = 2N$. Dans les deux cas,

$$\boxed{l \mid 2N}$$

Enfin, l est un multiple de v donc lq est entier donc

$$\boxed{2Nq \in \mathbb{Z}}$$

12. Pour tout j, on a $e^{2i\pi q_j} = F(\zeta_{n_j})$ avec F à coefficients dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. On en déduit que $e^{2i\pi q_j}$ va s'écrire comme somme produit et quotient de termes qui sont tous multiples de ζ_{pn_j} et donc

$$e^{2i\pi q_j} \in \mathbb{Q}(\zeta_{pn_j})$$

La question 11 (avec $N = pn_j$ et q_j) indique alors que $2pn_jq_j \in \mathbb{Z}$. Comme $2p$ ne dépend pas de j,

$$\boxed{\exists c,\ \forall j,\ cn_jq_j \in \mathbb{Z}}$$

On est alors dans le cadre de la question 9 et

$$\boxed{\exists d \in \mathbb{Z},\ F(x) = X^d}$$

13. Supposons F convenable.

    Si $1 \notin \mathcal{P}(F)$ alors en travaillant avec $\frac{F}{F(1)}$, ce qui est possible car $F(1) \in \Lambda$ et est non nul, on se ramène au cas $F(1) = 1$.
    Comme F n'a qu'un nombre fini de pôles, on peut construire une suite (n_j) convenable pour appliquer les questions 6 à 12.
    Dans ce cas, il existe $z_0 \in \Lambda$ (c'est $F(1)$) et $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = z_0 X^d$.

    Sinon, on peut trouver $z_0 \in \Lambda$ tel que $z_0 \notin \mathcal{P}(F)$ et en travaillant avec $F_1(X) = F(z_0 X) = \frac{P(z_0 X)}{Q(z_0 X)}$, on a $1 \notin \mathcal{P}(F_1)$ car 1 n'est pas racine de $Q(z_0 X)$. On est alors ramenés au cas précédent et F_1 puis F ont même forme.

    La réciproque est immédiate.

    $$\boxed{\text{Les fractions telle que } F(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda \text{ sont celles du type } z_0 X^d \text{ avec } z_0 \in \Lambda \text{ et } d \in \mathbb{Z}}$$

2 Intersections atypiques : le cas transcendant

14. On sait qu'une série entière et toutes ses séries dérivées ont même rayon de convergence et que sur l'intervalle ouvert de convergence, les dérivées succesives de f s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et la nullité des dérivées en 0 équivaut à la nullité de f.

    $$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et est plate en 0 ssi tous les } a_n \text{ sont nuls}}$$

    A ce niveau du problème, il ne me semble pas que l'on attende une preuve de ces résultats de cours.

15.
    (a) P_n étant non nul, on peut considérer son degré d et son coefficient dominant c. Pour $x > 0$, on a
    $$\frac{f(x)}{x^d e^{\alpha_n x}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(x)}{x^d} e^{(\alpha_i - \alpha_n)x}$$
    Comme $\alpha_i < \alpha_n$ pour $i \leq n-1$, les $n-1$ premiers termes de la somme sont de limite nulle en $+\infty$ par croissances comparées.
    Le terme pour $i = n$ vaut $\frac{P_n(x)}{x^d}$ et est de limite c en $+\infty$.
    On a donc $\frac{f(x)}{x^d e^{\alpha_n x}} \to c \neq 0$ quand $x \to +\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^d e^{\alpha_n x}}$ n'est pas nulle. A fortiori
    $$\boxed{f \text{ n'est pas la fonction nulle}}$$

    (b) f est DSE de rayon infini comme produit et somme de telles fonctions. Comme $f \neq 0$, la question 14 indique que f n'est pas plate en 0.
    Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $g : x \mapsto f(x_0 + x)$ peut aussi s'écrire comme une somme de fonctions polynôme fois exponentielle et, quitte à regrouper des termes (avec les mêmes exponentielles) s'écrit
    $$g(x) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(x) e^{\alpha_i x} \quad \text{avec} \quad Q_i \in \mathbb{R}[X]$$
    g (comme f) n'étant pas la fonction nulle, les Q_i ne sont pas tous nuls. Quitte à supprimer les termes nuls, g est du même type que f. g et donc non plate en 0 ce qui revient à dire que f est non plate en x_0.

$$\boxed{f \text{ n'est plate en aucun point}}$$

16. Soient $P_1, \ldots, P_d$ des polynômes non tous nuls. On a alors, en posant $g(x) = f(x)\exp(\alpha x)$,

$$\sum_{i=0}^{d} P_i(x) g(x)^i = \sum_{i=0}^{d} P_i(x) P(x)^i \exp(i\alpha x)$$

Quitte à supprimer des termes (les i tels que $P_i = 0$), cette fonction est du type étudié en question 15 (avec $\alpha_i = i\alpha$ si $\alpha > 0$ et $\alpha_i = (d-i)\alpha$ si $\alpha < 0$) et n'est donc plate en aucun réel. La fonction g est donc transcendante sur $\mathbb{R}$. Elle l'est a fortiori sur tout intervalle non trivial.

$$\boxed{x \mapsto P(x)e^{\alpha x} \text{ est transcendante sur tout intervalle non trivial}}$$

17. Soit $g \in V$. Il existe des scalaires $a_{i,j}$ tels que

$$\forall x \in I,\ g(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq d-1} a_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1} = \sum_{j=0}^{d-1} P_j(x) f(x)^j \quad \text{avec} \quad P_j(x) = \sum_{i=1}^{d} a_{i,j+1} x^{i-1}$$

Les $a_{i,j}$ n'étant pas tous nuls, les P_j ne sont pas tous nuls et par définition de la transcendance (de f)

$$\boxed{g \in V \setminus \{0\} \text{ n'est plate en aucun point de } I}$$

18. C_r étant une d-courbe, elle est associée à une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$. Soit $(x_0, y_0) \in C_r \cap \Gamma_f$. On a alors $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ (appartenance au graphe) et (appartenance à C_r)

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x_0^{i-1} f(x_0)^{j-1} = 0$$

Ainsi, $g : x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1}$ s'annule en x_0. $g \in V$ et s'annule en moins r^2 fois (puisque $|C_r \cap \Gamma_f$ est de cardinal au moins r^2).
Si, par l'absurde, g était identiquement nulle alors on aurait

$$\forall x \in I,\ \sum_{j=1}^{d} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} \right)}_{=Q_i(x)} f(x)^{j-1} = 0$$

et comme les Q_i sont non tous nuls (puisque les $a_{i,j}$ ne le sont pas), ceci contredit la transcendance de f (la somme étant nulle est plate en tout point).

$$\boxed{\text{Il existe } g \in V \setminus \{0\} \text{ telle que } |Z(g)| \geq r^2}$$

Soit g une telle fonction. Posons $I_k = [\min I + \frac{k\ell(I)}{r}, \min I + \frac{(k+1)\ell(I)}{r}[$ pour $k \in [\![0, r-1]\!]$. Les I_k forment une partition de I et $|Z(g)| = \sum_{k=0}^{r-1} |Z(g|_{I_k})|$. Cette somme étant plus grande que r^2, l'un des termes est plus grand que r (en contraposant par exemple). Il existe donc k tel que g s'annule au moins r fois sur I_k. En considérant $K = \overline{I_k}$, on a montré que

$$\boxed{\text{il existe un segment } K \text{ de longueur } \frac{\ell(I)}{r} \text{ tel que } |Z(g) \cap K| \geq r}$$

19. Pour tout entier $r \geq 1$, la question 18 donne une fonction g_r et un segment K_r. $g_r \in V$ se décompose sur la base $(g_1, \ldots, g_n)$ et on note $\underline{b}_r$ le n-uplet de ses coordonnées. En posant $\underline{a}_r = \frac{1}{\|\underline{b}_r\|_1} \underline{b}_r$, on obtient un élément de S_n et $G_{\underline{a}}, G_{\underline{b}}$ ont les même zéros.

$$\boxed{\exists (\underline{a}_r) \in (S_n)^{\mathbb{N}^*},\ \forall r,\ \left|Z\left(G_{\underline{a}_r}\right) \cap K_r\right| \geq r \text{ et } \lim_{r\to+\infty} \ell(K_r) = 0}$$

20. S_n est fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application continue $\underline{a} \mapsto \sum_{i=1}^n |a_i|$. C'est aussi une partie bornée (c'est la sphère unité pour la norme 1...). Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie

$$\boxed{S_n \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n}$$

La suite $((\underline{a})_r, \min K_r)$ étant à valeur dans le compact $S_n \times I$ (un produit de compacts est un compact), on peut en extraite une sous suite $(\underline{a}_{\varphi(r)}, \min K_{\varphi(r)})_{r\geq 1}$ qui converge vers $(\underline{a}, x) \in S_n \times I$.

$$\boxed{\text{Il existe une extractrice } \varphi \text{ telle que } \underline{a}_{\varphi(r)} \to \underline{a} \in S_n \text{ et } \min K_{\varphi(r)} \to x \in I}$$

21. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $\varphi(r) \to +\infty$, il existe un rang r_0 tel que $\forall r \geq r_0,\ \varphi(r) \geq p+1$.
Pour $r \geq r_0$, $G_{\underline{a}_{\varphi(r)}}$ s'annule au moins $p+1$ fois sur $K_{\varphi(r)}$. Sa dérivée p-ième s'annule donc au moins une fois en un certain $b_r \in K_{\varphi(r)}$:

$$\forall r \geq r_0,\ 0 = \sum_{i=1}^n (\underline{a}_{\varphi(r)})_i g_i^{(p)}(b_r)$$

Comme $b_r \in K_{\varphi(r)} \subset [\min K_{\varphi(r)}, \min K_{\varphi(r)} + \frac{\ell(I)}{\varphi(r)}]$, $b_r \to x$. Le passage à la limite dans l'égalité précédente donne

$$0 = \sum_{i=1}^n \underline{a}_i g_i^{(p)}(x) = G_{\underline{a}}^{(p)}(x)$$

Toutes les dérivées de $G_{\underline{a}}$ s'annulent en x et $\boxed{G_{\underline{a}} \text{ est plate en } x}$. On obtient un élément de V qui est une fonction plate en $x \in I$ et ceci contredit la question 17.

$$\boxed{\text{Le théorème 2 est prouvé}}$$

Une inégalité

22. (a) On utilise les notations de l'énoncé.
La nullité des $f(x_i)$ pour $i \leq n-1$ donne celle des $g(x_i)$. Le choix de β donne $g(x_n) = 0$. La question 1 indique alors que $g^{(n-1)}$ s'annule sur I en un certain y. Or, la dérivée $(n-1)$-ième d'un polynôme unitaire de degré $n-1$ vaut $(n-1)!$ et ainsi, $g^{(n-1)}(y) = 0$ s'écrit aussi

$$\boxed{f(x_n) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\beta}$$

(b) Posons

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $1 \leq i,j \leq n-1$, $h(x_i) = f(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. On peut ainsi appliquer la question précédente avec $f - h$ et obtenir y tel que

$$f(x_n) - h(x_n) = \frac{(f-h)^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\beta$$

Comme $h \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $h^{(n-1)} = 0$ et ainsi

$$\boxed{f\left(x_n\right)-\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_i-x_j}=\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}\beta}$$

23. On peut appliquer la question précédente avec chaque f_i pour obtenir $y_1, \ldots, y_n$. En notant

$$\gamma_k=\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_k-x_j}$$

l'opération $C_n \leftarrow C_n-\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k C_k$ laisse le déterminant invariant et transforme la dernière colonne en

$$\frac{\beta}{(n-1)!}(f_1^{(n-1)}(y_1), \ldots, f_n^{(n)}(y_n))$$

Par linéairité du déterminant vis-à-vis de sa dernière colonne, on obtient donc

$$\boxed{\det A\left(x_1, \ldots, x_n\right)=\frac{\beta}{(n-1)!} \cdot \det\begin{pmatrix} f_1\left(x_1\right) & \ldots & f_1\left(x_{n-1}\right) & f_1^{(n-1)}\left(y_1\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n\left(x_1\right) & \ldots & f_n\left(x_{n-1}\right) & f_n^{(n-1)}\left(y_n\right)\end{pmatrix}}$$

24. On procède par récurrence sur n. $I=[a, b]$ est fixé. Le résultat au rang n dit que pour tout choix de n fonction de classe C^{∞}, il existe une constante c (qui peut dépendre des fonctions) telle que pour tout choix de x_i distincts dans I, on a l'inégalité voulue.

   - Pour $n=2$, on se donne f_1, f_2 de classe C^{∞} sur I. On a

   $$\begin{aligned}\det(A(x_1, x_2)) & = f_1(x_1) f_2(x_2)-f_1(x_2) f_2(x_1) \\ & = (f_1(x_1)-f_1(x_2)) f_2(x_2)+f_1(x_2)(f_2(x_2)-f_2(x_1))\end{aligned}$$

   Une fonction de classe C^1 sur un segment est lispchitzienne sur ce dernier de rapport la norme infinie de la dérivée et ainsi

   $$|\det(A(x_1, x_2))| \leq c|x_1-x_2| \quad \text{avec} \quad c=\|f_1'\|_{\infty}\|f_2\|_{\infty}+\|f_1\|_{\infty}\|f_2'\|_{\infty}$$

   et ceci prouve le résultat au rang 1.

   - Supposons le résultat acquis aux rang $2, \ldots, n-1$ avec $n-1 \geq 2$. On se donne des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de classe C^{∞}. On applique la question 23 pour obtenir des y_i. Un développement par rapport à la dernière colonne donne

   $$\det A\left(x_1, \ldots, x_n\right)=\sum_{i=1}^n(-1)^{n+i} f_i^{(n-1)}(y_i) \Delta_i$$

   où Δ_i est un déterminant de taille $n-1$ auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient une majoration du type

   $$|\det A\left(x_1, \ldots, x_n\right)|=\sum_{i=1}^n c_i \frac{\beta}{(n-1)!} \prod_{1 \leq i<j \leq n-1}|x_j-x_i|$$

   β s'incorpore au produit et on regoupe les autres constantes (au sens indépendantes des x_i) pour obtenir le résultat au rang n.

$$\boxed{\text{Le théorème 3 est prouvé}}$$

Intersections atypiques : le cas transcendant

25. Supposons qu'il existe une d-courbe contenant $P_1, \ldots, P_n$. Il lui est associé une famille $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ de scalaires non tous nuls. En notant $P_k = (x_k, y_k)$, on a donc

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x_k^{i-1} y_k^{j-1} = 0$$

et on a donc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls des lignes de $B(P_1, \ldots, P_n)$ qui est nulle. Le rang de la matrice, qui est entre autres le rang de la famille des lignes, est donc $< d^2$.
Réciproquement, si le rang de $B(P_1, \ldots, P_n)$ est $< d^2$, les d^2 lignes de la matrice forment une famille liée et il en existe une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls. Ces coefficients donnent alors une d-courbe contenant tous les P_i.

$$\boxed{\text{Il existe une } d\text{-courbe contenant les } P_i \text{ ssi } \operatorname{rang}\left(B\left(P_1, \ldots, P_n\right)\right) < d^2}$$

26. Si on pose $f_{i+dj+1}(x) = x^i f(x)^j$ alors, quand les $P_k = (x_k, y_k)$ sont dans Γ_f (et donc $y_k = f(x_k)$), on a

$$B(P_1, \ldots, P_{d^2}) = (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq d^2}$$

et on peut appliquer le théorème 3 quand les x_k sont distincts :

$$|\det(P_1, \ldots, P_{d^2})| \leq c_2 \prod_{1\leq i<j\leq d^2} |x_i - x_j|$$

où c_2 est une constante (indépendante du choix des x_i mais dépendant de f et de d). Dans le produit, il y a $\frac{d^2(d^2-1)}{2}$ termes tous plus petit que le maximum des $|x_i - x_j|$.
Par ailleurs, on peut, quitte à augment la constante, supposer $c_2 > 1$ et on a alors $c = c_2^{\frac{2}{d^2(d^2-1)}} > 1$ qui vérifie bien

$$\boxed{|\det B\left(P_1, \ldots, P_{d^2}\right)| \leq \left(c \cdot \max_{1\leq i<j\leq d^2} |x_i - x_j|\right)^{\frac{d^2\left(d^2-1\right)}{2}}}$$

27. (a) Comme les nx_k et $nf(x_k)$ sont tous entiers, la ligne numéro $i + dj + 1$ de $B(P_1, \ldots, P_{d^2})$ vérifie

$$L_{i+dj+1} \in \frac{1}{n^{i+j}}\mathbb{Z}$$

On peut ainsi, par multilinéarité du déterminant factoriser la ligne et obenir un déterminant à coefficients entiers. Ainsi

$$\det(B(P_1, \ldots, P_{d^2})) \in \prod_{0\leq i,j\leq d-1} \frac{1}{n^{i+j}}\mathbb{Z} = \frac{1}{n^K}\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad K = \sum_{0\leq i,j\leq d-1} (i+j)$$

On constate que

$$K = d\sum_{i=0}^{d-1} i + d\sum_{j=0}^{d-1} j = d^2(d-1)$$

et on conclut que

$$\boxed{n^{d^2(d-1)} \cdot \det B\left(P_1, \ldots, P_{d^2}\right) \in \ \mathbb{Z}}$$

(b) Supposons que $P_1, \ldots, P_{d^2}$ n'appartiennent pas à une même d-courbe. Le rang de $B(P_1, \ldots, P_{d^2})$ est alors plus grand que d^2. Comme la matrice est carrée de taille d^2, son rang est en fait égal à d^2 et son déterminant est non nul et avec la question précédente

$$|\det B\,(P_1, \ldots, P_{d^2})\,| \geq \frac{1}{n^{d^2(d-1)}}$$

Avec la question 26

$$\frac{1}{n^{d^2(d-1)}} \leq \left(c \cdot \max_{1\leq i<j\leq d^2} |x_i - x_j|\right)^{\frac{d^2\left(d^2-1\right)}{2}}$$

et en élevant à la puissance $\frac{2}{d^2(d^2-1)}$ (opération croissante)

$$\boxed{\max_{1\leq i<j\leq d^2} |x_i - x_j| \geq c^{-1} n^{-\frac{2}{d+1}}}$$

28. Notons $m = |\Gamma(f|_J) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2|$ et $P_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots, P_m = (x_m, f(x_m))$ les éléments de l'ensemble.
   - Si $m < d^2$ alors $B(P_1, \ldots, P_m)$ est de rang $\leq m < d^2$ et la question 25 indique qu'il existe une d-courbe contenant tous les P_i.
   - Sinon, comme la longueur de J est strictement inférieure à $c^{-1}n^{-\frac{2}{d+1}}$ alors d^2 points parmi les P_i ne vérifient jamais l'inégalité de 27(b) et appartiennent donc à une même d-courbe. D'après la question 25, toute matrice extraite de taille d^2 de $B(P_1, \ldots, P_m)$ est de rang $< d^2$. On en déduit que la matrice est de rang $< d^2$ (le rang est le maximum des rangs des matrices extraites) et donc (toujours question 25), les P_i sont sur une d-courbe.

$$\boxed{\text{Si } \ell(J) < c^{-1}n^{-\frac{2}{d+1}}, \text{ il existe une } d\text{-courbe contenant les points de } \Gamma(f) \cap \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}^2}$$

29. Le théorème 2 nous donne une constante c_1.
Si on découpe le segment I en p segments équirépartis, chacun de ceux-ci a une longueur $\frac{\ell(I)}{p}$.
Pour $p > c\ell(I)n^{\frac{2}{d+1}}$, chaque segment vérifiera l'hypothèse de la question 28.
On choisit donc

$$p = \lfloor c\ell(I)n^{\frac{2}{d+1}} \rfloor + 1 \leq c\ell(I)n^{\frac{2}{d+1}} + 2$$

et on note $J_1, \ldots, J_p$ les petits segments obtenus. On a alors

$$\forall k,\ \ |\Gamma(f|_{J_k}) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2| \leq c_1$$

puisque tous les points de l'intersection sont une même d-courbe. On en déduit que

$$|\Gamma(f|_J) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2| \leq pc_1 = c_1 n^{\varepsilon}\left(c\ell(I)n^{\frac{2}{d+1}-\varepsilon} + 2n^{-\varepsilon}\right) \leq c_1 n^{\varepsilon}(c\ell(I) + 2)$$

$$\boxed{\text{Le théorème 4 est prouvé}}$$