

Corrigé X-ENS 2020, épreuve B, MP.

MUSTAPHA LAAMOUM
m.laamoum@gmail.com

Première partie :

1. On remarque que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\{-1, 1\} \subset X_k(\Omega)$ et pour tout $h \in X_k(\Omega) \setminus \{-1, 1\}$ on a $\mathbb{P}[X_k = h] = 0$ et $\mathbb{E}(X_k) = 0$.

Par le théorème de transfert on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda Z)] &= \sum_{z \in Z(\Omega)} e^{\lambda z} \mathbb{P}(Z = z) \\ &\geq \sum_{\substack{z \in Z(\Omega) \\ z \geq t}} e^{\lambda z} \mathbb{P}(Z = z) \\ &\geq e^{\lambda t} \sum_{\substack{z \in Z(\Omega) \\ z \geq t}} \mathbb{P}(Z = z) = e^{\lambda t} \mathbb{P}(Z \geq t)\end{aligned}$$

ce qui donne $\mathbb{P}(Z \geq t) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$.

2. On a $[S_n < 0] = \overline{[S_n \geq 0]}$, et $X_1 + \dots + X_n < 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}, X_i < 0$, donc $[S_n < 0] \subset [X_i < 0]$ et $\mathbb{P}[S_n < 0] \leq \mathbb{P}[X_i < 0]$, or $\mathbb{P}[X_i < 0] \in \{0, \frac{1}{2}\}$ donc $\mathbb{P}[S_n < 0] \leq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.

3. De la question 1. on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_n \geq t] &= \mathbb{P}[nS_n \geq nt] \\ &\leq \exp(-\lambda nt) \mathbb{E}[\exp(\lambda nS_n)]\end{aligned}$$

comme X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $\exp(\lambda X_1), \dots, \exp(\lambda X_n)$ le sont aussi donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda nS_n)] &= \mathbb{E}[\exp(\lambda(X_1 + \dots + X_n))] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\exp(\lambda X_k)]\end{aligned}$$

et par le théorème de transfert on a $\mathbb{E}[\exp(\lambda X_k)] = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$ ce qui donne :

$$\mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \exp(-\lambda nt) \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right)^n = \exp(n(\psi(\lambda) - \lambda t))$$

donc $\frac{1}{n} \log \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq (\psi(\lambda) - \lambda t)$ pour tout $\lambda \geq 0$, (éventuellement valable si $\mathbb{P}[S_n \geq t] = 0$), ce qui donne le résultat.

4. Soit $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}[X_1 \exp(\lambda X_1)] = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$ et $\mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)] = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$ donc $m(\lambda) = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}} = th(\lambda)$ qui est strictement croissante de \mathbb{R}^+ vers $]0, 1[$ donc bijective, d'où pour tout $t \in]0, 1[$ il existe un unique $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.

- 5a. Soit $n \geq 2$ et $\lambda \geq 0$, on a

$$(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda) = [\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))] [\exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda))] \exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda))$$

avec $T_n = X_3 + \dots + X_n$.

Les variables X_i sont indépendantes donc X_1, X_2, T_n le sont, d'où l'indépendance des variables

$$\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda)), \exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda)) \text{ et } \exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda))$$

donc

$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = \mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))] \cdot \mathbb{E}[\exp(\lambda X_2)(X_2 - m(\lambda))] \cdot \mathbb{E}[\exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda))]$$

de plus $\mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)(X_1 - m(\lambda))] = e^\lambda(1 - m(\lambda)) + e^{-\lambda}(-1 - m(\lambda)) = 0$ d'où le résultat.

b. On a aussi pour $i \neq j$, $\mathbb{E}[(X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n X_k - m(\lambda) \right)^2 D_n(\lambda) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n (X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)]\end{aligned}$$

Par indépendance des X_i on obtient :

$$\mathbb{E}[(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] = e^{-n\psi(\lambda)} \mathbb{E}[(X_k - m(\lambda))^2 \exp(\lambda X_k)] \mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{i \neq k} X_i \right) \right]$$

et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_k - m(\lambda))^2 \exp(\lambda X_k)] &= \frac{1}{2} (1 - m(\lambda))^2 e^\lambda + \frac{1}{2} (1 + m(\lambda))^2 e^{-\lambda} \\ &= \frac{2}{e^\lambda + e^{-\lambda}}\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda \sum_{i \neq k} X_i \right) \right] = \mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)]^{n-1} = \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right)^{n-1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] &= \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right)^{-n} \frac{2}{e^\lambda + e^{-\lambda}} \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{(e^\lambda + e^{-\lambda})^2}\end{aligned}$$

finalement : $\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] = \frac{1}{n} \frac{4}{(e^\lambda + e^{-\lambda})^2} \leq \frac{1}{n}$ (sauf erreur de calcul on trouve une meilleure majoration !)

6.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) \exp \lambda n (S_n - m(\lambda) - \varepsilon)] &= \sum_{\substack{s \in S_n(\Omega) \\ |s - m(\lambda)| \leq \varepsilon}} e^{\lambda n (s - m(\lambda) - \varepsilon)} \mathbb{P}[S_n = s] \\ &\leq \sum_{\substack{s \in S_n(\Omega) \\ |s - m(\lambda)| \leq \varepsilon}} \mathbb{P}[S_n = s] = \mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \quad (\text{car } s - m(\lambda) - \varepsilon \leq 0)\end{aligned}$$

7. Ecrivons $(S_n - m(\lambda))^2 = (1 - I_n(\lambda, \varepsilon))(S_n - m(\lambda))^2 + I_n(\lambda, \varepsilon)(S_n - m(\lambda))^2$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] &\geq \mathbb{E}[(1 - I_n(\lambda, \varepsilon))(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \\ &\geq \varepsilon^2 \mathbb{E}[(1 - I_n(\lambda, \varepsilon))D_n(\lambda)]\end{aligned}$$

on vérifie facilement que $\mathbb{E}[D_n(\lambda)] = 1$ et on a $\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}$, ce qui donne le résultat.

8a. Puisque $[|s - m(\lambda)| \leq \varepsilon] = [S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon] \cap [S_n \leq m(\lambda) + \varepsilon]$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon]) &\geq \mathbb{P}([|s - m(\lambda)| \leq \varepsilon]) \\ &\geq \mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) \exp \lambda n (S_n - m(\lambda) - \varepsilon)] \\ &\geq \mathbb{E}[(I_n(\lambda, \varepsilon)D_n(\lambda)) \cdot e^{n\psi(\lambda) - \lambda n m(\lambda) - \varepsilon n \lambda}] \\ &\geq \left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right) e^{n\psi(\lambda) - \lambda n m(\lambda) - \varepsilon n \lambda}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon] \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda \varepsilon + u_n(\varepsilon)$$

avec $u_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} \log(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2})$

b. D'après 3. on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq t] \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$$

Soit $t \in [0, 1[$ et ε tel que $t + \varepsilon \in [0, 1[$, d'après 4. $\exists \lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t + \varepsilon$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq t] &= \frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon] \\ &\geq \psi(\lambda) - \lambda t + u_n(\varepsilon) \\ &\geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) + u_n(\varepsilon) \end{aligned}$$

finalemt

$$\inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) + u_n(\varepsilon) \leq \frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq t] \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$$

ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq t] = \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$.

c. Ecrivons

$$\mathbb{P} [S_n \geq 1] = \mathbb{P} ([S_n \geq 1] \cap [X_n = 1]) + \mathbb{P} ([S_n \geq 1] \cap [X_n = -1]) + \mathbb{P} ([S_n \geq 1] \cap [X_n \notin \{1, -1\}])$$

on a $\mathbb{P} ([S_n \geq 1] \cap [X_n = -1]) = \mathbb{P} [X_1 + \dots + X_{n-1} \geq n + 1] = 0$ car $\exists i$ tel que $[X_1 + \dots + X_{n-1} \geq n + 1] \subset [X_i > 1]$, et

$$\mathbb{P} ([S_n \geq 1] \cap [X_n \notin \{1, -1\}]) = 0$$

Donc $\mathbb{P} [S_n \geq 1] = \mathbb{P} ([S_{n-1} \geq 1] \cap [X_n = 1])$ ainsi par récurrence on a

$$\mathbb{P} [S_n \geq 1] = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = 1] \right) = \frac{1}{2^n}$$

et $\frac{1}{n} \log \mathbb{P} [S_n \geq 1] = -\log 2$. La fonction $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) - \lambda = \log ch(\lambda) - \lambda$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = -\log 2$.

Donc le résultat est valable pour $t = 1$.

Deuxième partie :

9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable, f admet un maximum en $x_0 \in]a, b[$ donc $f'(x_0) = 0$ et $\exists \alpha > 0$ tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset]a, b[\text{ et } \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x) \leq f(x_0),$$

la formule de Taylor Mac-Laurin donne : $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + o((x - x_0)^2) \leq 0$ et $f''(x_0) + o(1) \leq 0$ donc $f''(x_0) < 0$.

10. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, soit $x_1 \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b]$ tel que $f(x_1) = \max_{x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b]} f(x)$, on a :

$$0 \leq \int_a^{x_0 - \delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0 + \delta}^b e^{tf(x)} dx \leq 2(b - a) e^{tf(x_1)}$$

comme x_0 est l'unique maximum de f sur $[a, b]$ alors $f(x_1) < f(x_0)$ par suite

$$\int_a^{x_0 - \delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0 + \delta}^b e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{tf(x_0)}).$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ assez petit vérifiant $f(x_0) - \varepsilon > f(x_1)$, soit le réel $\delta_0 > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, posons $\alpha = \min(\delta, \delta_0)$, nous avons alors

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} e^{tf(x)} dx \geq 2\alpha e^{t(f(x_0)-\varepsilon)}$$

ce qui donne

$$\int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0+\delta}^b e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{t(f(x_0)-\varepsilon)})$$

et

$$\int_a^{x_0-\delta} e^{tf(x)} dx + \int_{x_0+\delta}^b e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx\right)$$

d'où $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^b e^{tf(x)} dx$.

11. La formule de Taylor Mac-Laurin donne :

$$f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{2}(x - x_0)^2(|f''(x_0)| + \alpha(x - x_0)) \text{ et } \alpha(x - x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$, considérons $\varepsilon_1 > 0$, qu'on précisera par la suite, et $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\subset [a, b], |\alpha(x - x_0)| \leq \varepsilon_1 |f''(x_0)|$$

donc

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx = e^{tf(x_0)} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{t}{2}(x-x_0)^2(|f''(x_0)| + \alpha(x-x_0))} dx$$

On pose $s = (x - x_0) \sqrt{\frac{t|f''(x_0)|}{2}}$ et $c = \delta \sqrt{\frac{t|f''(x_0)|}{2}}$ on obtient

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{t}{2}(x-x_0)^2(|f''(x_0)| + \alpha(x-x_0))} dx = \sqrt{\frac{2}{t|f''(x_0)|}} \int_{-c}^c e^{-s^2(1+\alpha'(s))} ds$$

et $|\alpha'(s)| \leq \varepsilon_1$ donc

$$\int_{-c}^c e^{-s^2(1+\varepsilon_1)} ds \leq \int_{-c}^c e^{-s^2(1+\alpha'(s))} ds \leq \int_{-c}^c e^{-s^2(1-\varepsilon_1)} ds$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \int_{-c\sqrt{1+\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1+\varepsilon_1}} e^{-s^2} ds \leq \int_{-c}^c e^{-s^2(1+\alpha'(s))} ds \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}} \int_{-c\sqrt{1-\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1-\varepsilon_1}} e^{-s^2} ds$$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ donc il existe $A > 0$ tel que $t \geq A$,

$$\left| \int_{-c\sqrt{1+\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1+\varepsilon_1}} e^{-s^2} ds - \sqrt{\pi} \right| \leq \varepsilon_1 \text{ et } \left| \int_{-c\sqrt{1-\varepsilon_1}}^{c\sqrt{1-\varepsilon_1}} e^{-s^2} ds - \sqrt{\pi} \right| \leq \varepsilon_1$$

donc

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \leq \int_{-c}^c e^{-s^2(1+\alpha'(s))} ds \leq \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \leq e^{-tf(x_0)} \sqrt{\frac{t|f''(x_0)|}{2}} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \leq \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$

On sait que $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^b e^{tf(x)} dx$ donc $\exists A' > 0$ tel que

$$(1 - \varepsilon_1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \leq \int_a^b e^{tf(x)} dx \leq (1 + \varepsilon_1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx$$

donc si $t \geq \max(A, A')$ on a

$$(1 - \varepsilon_1) \frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}} \leq e^{-tf(x_0)} \sqrt{\frac{t |f''(x_0)|}{2}} \int_a^b e^{tf(x)} dx \leq (1 + \varepsilon_1) \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_1}{\sqrt{1 - \varepsilon_1}}$$

comme $(1-x) \frac{\sqrt{\pi-x}}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{\pi}$ alors $\exists \eta > 0$ tel que $|x| \leq \eta$ donne $\left| (1-x) \frac{\sqrt{\pi-x}}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{\pi} \right| \leq \varepsilon$, on choisit ε_1 vérifiant :

$\sqrt{\pi} - \varepsilon \leq (1 - \varepsilon_1) \frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}}$ et $(1 + \varepsilon_1) \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_1}{\sqrt{1 - \varepsilon_1}} \leq \sqrt{\pi} + \varepsilon$. Donc pour $t \geq \max(A, A')$

$$\left| e^{-tf(x_0)} \sqrt{\frac{t |f''(x_0)|}{2}} \int_a^b e^{tf(x)} dx - \sqrt{\pi} \right| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat.

12 a. Par récurrence

b. Dans $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ on fait le changement $x = \frac{t}{n}$ on obtient: $n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(\log x - x)} dx$.

la fonction $\varphi : x \rightarrow \log x - x$, admet un maximum unique en $x = 1$ et $\varphi''(1) = -1$.

On remarque que $\forall x > 0$, $\log x \leq \frac{x}{2}$ donc $\varphi(x) \leq \frac{-x}{2}$ et $\int_2^{+\infty} e^{n(\log x - x)} dx \leq \int_2^{+\infty} e^{-nx/2} dx = \frac{2e^{-n}}{n}$.

Par application du résultat de la question 11.

$$\int_0^2 e^{n(\log x - x)} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{n\varphi(1)} \sqrt{\frac{2\pi}{n |\varphi''(1)|}} = e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{n(\log x - x)} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ ce qui donne $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Troisième Partie :

13. On a $\int_0^a |\sin(x^2)| dx = \int_{x=\sqrt{t}}^{a^2} \frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}} dt$. Posons $N = E\left(\frac{a^2}{\pi}\right)$ (E est la partie entière), on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^a |\sin(x^2)| dx &\geq \int_0^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}} dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{2\sqrt{t}} dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{2\sqrt{t+k\pi}} dt \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{\pi(1+k)}} \int_0^\pi \sin(t) dt \end{aligned}$$

finalement $\int_0^a |\sin(x^2)| dx \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n}}$ diverge donc $\int_0^a |\sin(x^2)| dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$

14. Par le théorème d'intégration des séries entières sur un segment.

$$15. \int_1^a \sin(x^2) dx = \int_1^a \frac{-1}{2x} (\cos(x^2))' dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2x} \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{2x^2} \cos(x^2) dx$$

on a $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\cos(a^2)}{2a} = 0$ et la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$ existe, d'où l'existence de $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sin(x^2) dx$.

De même on a l'existence de $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \cos(x^2) dx$.

16. On a $\int_0^a \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \int_a^{+\infty} \sin(x^2) dx$, trois intégrations par parties donnent:

$$\int_0^a \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\sin(a^2)}{4a^3} - \frac{3 \cos(a^2)}{12 a^5} + \frac{15}{8} \int_a^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^6} dx$$

et on a $\left| \int_a^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^6} dx \right| \leq \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^6} dx = \frac{1}{5a^5}$; d'où

$$\int_0^a \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{\cos(a^2)}{2a} - \frac{\sin(a^2)}{4a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

De même on a

$$\int_0^a \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sin(a^2)}{2a} - \frac{\cos(a^2)}{4a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right)$$

17. Ecrivons $\int_{x_0}^1 g(x) \sin(tf(x)) dx = g(x_0) \int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) dx + \int_{x_0}^1 (g(x) - g(x_0)) \sin(tf(x)) dx$.

Posons $\varphi : [x_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(x_0)}{f'(x)} & \text{si } x \in]x_0, 1] \\ \frac{g'(x_0)}{f''(x_0)} & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

φ admet un développement limité en x_0 d'ordre 1 donc elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $[x_0, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^1 (g(x) - g(x_0)) \sin(tf(x)) dx &= \int_{x_0}^1 \varphi(x) f'(x) \sin(tf(x)) dx \\ &= \left[-\frac{\varphi(x)}{t} \cos(tf(x)) \right]_{x_0}^1 + \int_{x_0}^1 \frac{\varphi'(x)}{t} \cos(tf(x)) dx \end{aligned}$$

φ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[x_0, 1]$ donc φ et φ' sont bornées sur $[x_0, 1]$ ce qui donne

$$\int_{x_0}^1 (g(x) - g(x_0)) \sin(tf(x)) dx = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

18a. On a f est \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$, $f''(x_0) > 0$ donc $f''(x) > 0$ pour tout x dans un voisinage de x_0 de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, f' est strictement croissante sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et $f'(x_0) = 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0, x_0 + \alpha]$, or f' s'annule uniquement en x_0 donc $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0, 1]$ et f est strictement croissante sur $[x_0, 1]$ donc strictement croissante sur $[x_0, 1]$.

Donc $h(x) = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|} = \sqrt{f(x) - f(x_0)}$, h est strictement croissante, de $[x_0, 1]$ sur $[0, h(1)]$, comme composée de deux fonctions strictement croissantes, donc elle est bijective.

b. soit $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{h(x_0 + t) - h(x_0)}{t} &= \frac{\sqrt{f(x_0 + t) - f(x_0)}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2} f''(x_0) t^2 + o(t^2)}}{t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} f''(x_0) + o(1)} \end{aligned}$$

donc h est dérivable en x_0 à droite, et $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$.

19. On admet que $h^{-1} : [0, h(1)] \rightarrow [x_0, 1]$ est infiniment dérivable.

Par le changement $s = h(x)$ on obtient :

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) dx = \int_0^{h(1)} \sin(t(s^2 + f(x_0))) (h^{-1}(s))' ds$$

d'après la question 17 on a :

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) dx = (h^{-1})'(0) \int_0^{h(1)} \sin(t(s^2 + f(x_0))) ds + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

avec $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(x_0)} = \sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}$, et

$$\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2 + f(x_0))) ds = \frac{\cos(tf(x_0))}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{th(1)}} \sin(s^2) ds + \frac{\sin(tf(x_0))}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{th(1)}} \cos(s^2) ds$$

d'après la question 16 on a : $\int_0^{\sqrt{th(1)}} \sin(s^2) ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\int_0^{\sqrt{th(1)}} \cos(s^2) ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, ce qui donne

$$\int_0^{h(1)} \sin(t(s^2 + f(x_0))) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

finalement

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x)) dx = \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

20. Supposons que $x_0 \in]0, 1[$ écrivons

$$\int_0^1 g(x) \sin(tf(x)) dx = \int_0^{x_0} g(x) \sin(tf(x)) dx + \int_{x_0}^1 g(x) \sin(tf(x)) dx$$

d'après ce qui précède on a $\int_{x_0}^1 g(x) \sin(tf(x)) dx = g(x_0) \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$,

par le changement $s = 1 + \frac{x_0-1}{x_0}x$ on ramène l'autre intégrale à une intégrale, dans $[x_0, 1]$, ce qui donne aussi

$$\int_0^{x_0} g(x) \sin(tf(x)) dx = g(x_0) \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ d'où}$$

$$\int_0^1 g(x) \sin(tf(x)) dx = g(x_0) \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$