Correction de l'épreuve X MP A (année 2018)

Frédéric Morlot et Jean Nougayrède

<u>Note :</u> *l'énoncé nous invite tacitement à identifier $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, ce que nous ferons donc.*

Préliminaire

1) $(A|B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times b_{i,j}$.

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times u_j\right)^2 \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2 \times \sum_{j=1}^{p} u_j^2 = \|u\|^2 \times \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2$
On somme pour i entre 1 et n : $\|Au\|^2 \leq \|u\|^2 \times \|A\|^2$.
Par croissance de la fonction racine et positivité de la norme, on peut conclure : $\boxed{\|Au\|_2 \leq \|A\|_F \times \|u\|_2}$.

3) Soit $j \in [\![1, q]\!]$ et c_j la j-ième colonne de C.
D'après la question précédente, $\|Ac_j\|_2^2 \leq \|A\|^2 \times \|c_j\|_2^2$.
Notons que Ac_j est la j-ième colonne de AC donc par définition, $\|AC\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \|Ac_j\|^2$
puis $\|AC\|^2 \leq \|A\|^2 \times \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \|c_j\|^2 = \|A\|^2 \times \|C\|^2$.
Conclusion : $\boxed{\|AC\|_F \leq \|A\|_F \times \|C\|_F}$

Première partie

4)
- Le rang de A est égal au rang de ses colonnes. Puisque A contient p colonnes, on a $k \leq p$.
- Le rang de A est égal au rang de A^T. Le point précédent montre donc que $k \leq n$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Puisque λI_n est inversible, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \times \lambda I_n) = \mathrm{rg}(\lambda A)$.

5) a)
- Déjà, on a
$$S^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = S.$$
Donc S est symétrique.
- Soit λ une valeur propre de S, et fixons $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a
$$\lambda\|x\|_2^2 = x^T Sx = (x^T A)(A^T x) = \|A^T x\|_2^2.$$
Comme $\|x\|_2^2 \in \mathbb{R}_+^\star$, on en déduit que $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
- Montrons enfin que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(A)$.
  - Puisque $S = AA^T$, on a que $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Im}(A)$, et donc que $\mathrm{rg}(S) \leq \mathrm{rg}(A)$.
  - Par ailleurs, soit $x \in \mathrm{Ker}(S)$. Alors $x^T AA^T x = 0$, donc $\|A^T x\|_2^2 = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(A^T)$. Nous en tirons que $\mathrm{Ker}(S) \subset \mathrm{Ker}(A^T)$, puis par le théorème du rang, que
  $$\mathrm{rg}(S) \geq \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A).$$
  - Par antisymétrie, nous en déduisons que $\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A)$, et comme $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Im}(A)$, alors $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(A)$.

b) Puisque $AA^T u = Su = \lambda u \neq 0$, on a nécessairement $A^T u \neq 0$, donc $v \neq 0$.
Par ailleurs, par définition de v on a

$$\widetilde{S}v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A^T A A^T u = \sqrt{\lambda} A^T u = \lambda v.$$

Enfin, on a

$$\|v\|_2^2 = \frac{1}{\lambda}(A^T u)^T (A^T u) = \frac{1}{\lambda} u^T S u = \|u\|_2^2.$$

Comme ces deux nombres sont positifs, on a bien $\|v\|_2 = \|u\|_2$.

6) a) Par le théorème spectral, S est diagonalisable dans une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée. Fixons une telle base $(u_1, \dots, u_n)$, et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ les valeurs propres associées. Quitte à permuter les u_j, supposons qu'on a

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Par le théorème du rang, le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - k$. Autrement dit, on a

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0 = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n.$$

Posons P la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et définissons $U \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ comme la matrice constituée par les k premières colonnes de P. Autrement dit, on peut écrire par blocs :

$$P = \begin{pmatrix} U \mid * \end{pmatrix}.$$

Puisque $P^T P = I_n$, un produit par blocs montre que

$$\begin{pmatrix} U^T \\ * \end{pmatrix} \times (U \ *) = \begin{pmatrix} U^T U & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $U^T U = I_k$ (on aurait aussi pu le voir par le fait que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est orthonormale). Par ailleurs, puisque $P \times \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times P^T = S$, un nouveau produit par blocs montre que

$$(U \ *) \times \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U^T \\ * \end{pmatrix} = U \Lambda U^T = S.$$

b)
- Pour montrer que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(U)$, on peut adapter le raisonnement de 5.a).
Alternativement, en posant $B = U \times \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$, on remarque que $S = BB^T$, et donc que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(B)$ par le même raisonnement. Or comme la matrice $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_k})$ est inversible, on a $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(U)$.
- On a $(UU^T)^2 = U I_k U^T = UU^T$, ce qui montre que $UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un projecteur q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
De plus, une nouvelle application de 5.a) montre que $\mathrm{Im}(UU^T) = \mathrm{Im}(U)$. Donc q est un projecteur sur $\mathrm{Im}(U)$.
Enfin, UU^T étant une matrice symétrique et la base canonique étant une base orthonormale, q est un projecteur symétrique. Par caractérisation de cours, c'est donc le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(U)$ dans $\mathbb{R}^n$.

c) Rappelons que U est la matrice de $(u_1, \dots, u_k)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc V peut être interprétée comme la matrice de $\left(A^T u_1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, A^T u_k/\sqrt{\lambda_k}\right)$, famille qu'on pourra noter $(v_1, \dots, v_k)$.

Soit $j_1, j_2 \in [\![1, k]\!]^2$. On a

$$v_{j_1}^T v_{j_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}}} u_{j_1}^T S u_{j_2} = \sqrt{\frac{\lambda_{j_2}}{\lambda_{j_1}}} u_{j_1}^T u_{j_2}.$$

Puisque $(u_1, \dots, u_k)$ est orthonormale, il en est de même de $(v_1, \dots, v_k)$. Donc $V^T V = I_k$.

Enfin, d'après 5.b), chaque v_j est un vecteur propre de $\widetilde{S}$ pour la valeur propre λ_j. En appliquant 5.a) à A^T et $\widetilde{S}$, on obtient que

$$\mathrm{rg}(\widetilde{S}) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A) = k.$$

Donc par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\widetilde{S})) = p-k$. Comme les sous-espaces propres de $\widetilde{S}$ sont en somme directe orthogonale (car $\widetilde{S}$ est symétrique), on peut concaténer $(v_1, \ldots, v_k)$ avec une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(\widetilde{S})$ pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ notée $(v_1, \ldots, v_p)$. Puis le même raisonnement qu'en a) montre que $\widetilde{S} = V\Lambda V^T$.

Note : si on ne voulait pas réutiliser les questions précédentes, on pouvait aussi rédiger une démonstration autonome qui fonctionnait très bien.

7) On a $U\Sigma V^T = U\Sigma D^T U^T A = UU^T A$.
Or UU^T est la matrice d'un projecteur sur $\mathrm{Im}(U)$. Par ailleurs, 6.b) montre que $\mathrm{Im}(U) = \mathrm{Im}(S)$, et 5.a) montre que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(A)$. Donc UU^T induit l'identité sur $\mathrm{Im}(A)$, si bien que $UU^T A = A$.

Deuxième partie

8) a) Par le théorème de Pythagore, il suffit de vérifier que $A - A\widetilde{V}\widetilde{V}^T$ et $A\widetilde{V}\widetilde{V}^T$ sont orthogonaux au sens de $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Or on a

$$\begin{aligned}
\langle A - A\widetilde{V}\widetilde{V}^T, A\widetilde{V}\widetilde{V}^T \rangle_F &= \mathrm{Tr}((A^T - \widetilde{V}\widetilde{V}^T A^T)A\widetilde{V}\widetilde{V}^T) \\
&= \mathrm{Tr}(A^T A\widetilde{V}\widetilde{V}^T) - \mathrm{Tr}(\widetilde{V}\widetilde{V}^T A^T A\widetilde{V}\widetilde{V}^T) \\
&= \mathrm{Tr}(A^T A\widetilde{V}\widetilde{V}^T) - \mathrm{Tr}(A^T A\widetilde{V}\underbrace{\widetilde{V}^T\widetilde{V}}_{=I_\ell}\widetilde{V}^T) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Cette fois, on a

$$\begin{aligned}
\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^T\|_F^2 &= \mathrm{Tr}(\widetilde{V}\widetilde{V}^T A^T A\widetilde{V}\widetilde{V}^T) \\
&= \mathrm{Tr}(\widetilde{V}\widetilde{V}^T V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T) \\
&= \mathrm{Tr}(\widetilde{V}\widetilde{V}^T V\Sigma^2 V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T) \\
&= \mathrm{Tr}(\Sigma^2 V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T V) \\
&= \mathrm{Tr}(\Sigma^2 V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T V) \\
&= \langle \Sigma^2, V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T V\rangle_F.
\end{aligned}$$

En utilisant les préliminaires, il vient

$$\begin{aligned}
\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^T\|_F^2 &= \sum_{h=1}^{k} \lambda_h (V^T\widetilde{V}\widetilde{V}^T V)_{h,h} \\
&= \sum_{h=1}^{k} \left(\lambda_h \sum_{m=1}^{\ell} (V^T\widetilde{V})_{h,m}(\widetilde{V}^T V)_{m,h} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{k} \left(\lambda_h \sum_{m=1}^{\ell} (V^T\widetilde{V})_{h,m}^2 \right).
\end{aligned}$$

Soit $h \in [\![1, k]\!]$ et $m \in [\![1, \ell]\!]$. On a

$$(V^T\widetilde{V})_{h,m} = \sum_{i=1}^{p} (V)_{i,h}(\widetilde{V})_{i,m} = \langle v_h, \widetilde{v}_m \rangle_2,$$

ce qui permet de conclure.

9) a)
- Soit $i \in [\![\ell+1, k]\!]$ et $j \in [\![1, \ell]\!]$. En tant que somme de réels positifs, a_i est un réel positif. Par ailleurs, la relation $\widetilde{V}^T\widetilde{V} = I_\ell$ montre que la famille $(\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_\ell)$ est orthonormale. Complétons-la en une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$, notée $(\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_p)$. Puisque v_j est unitaire, on peut écrire

$$b_j = \sum_{m=\ell+1}^{p} \langle v_j, \widetilde{v}_m \rangle_2^2 \geq 0.$$

- De plus, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^{k} a_i &= \ell - \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{m=1}^{\ell}\langle v_j, \widetilde{v}_m\rangle_2^2 - \sum_{i=\ell+1}^{k}\sum_{m=1}^{\ell}\langle v_i, \widetilde{v}_m\rangle_2^2 \\ &= \ell - \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{k}\langle v_j, \widetilde{v}_m\rangle_2^2.\end{aligned}$$

Soit $m \in [\![1, \ell]\!]$. Rappelons qu'en 6.c), on a complété $(v_1, \dots, v_k)$ en une base orthonormale $(v_1, \dots, v_p)$. On a alors

$$\sum_{m=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{k}\langle v_j, \widetilde{v}_m\rangle_2^2 \le \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{p}\langle v_j, \widetilde{v}_m\rangle_2^2 = \sum_{m=1}^{\ell}\|\widetilde{v}_m\|_2^2 = \ell,$$

ce qui permet de conclure.

b) - La question 8.b) montre que

$$\begin{aligned}\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^T\|_F^2 &= \sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j(1-b_j) + \sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_i a_i \\ &= \sum_{h=1}^{\ell}\lambda_h - \left(\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j b_j - \sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_i a_i\right).\end{aligned}$$

Comme les a_i et les b_j sont positifs, on a

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j b_j \ge \sum_{j=1}^{\ell}\lambda_\ell b_j \\ \displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_i a_i \le \sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_\ell a_i\end{cases}$$

puis

$$\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j b_j - \sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_i a_i \ge \lambda_l \times \left(\sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^{k} a_i\right).$$

Et comme $\displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{k} a_i \le \sum_{j=1}^{\ell} b_j$ et $\lambda_\ell \ge 0$, alors $\|A\widetilde{V}\widetilde{V}^T\|_F^2 \le \displaystyle\sum_{h=1}^{\ell}\lambda_h$.

- Il y a égalité ssi

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{\ell}\lambda_\ell b_j \\ \displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_i a_i = \sum_{i=\ell+1}^{k}\lambda_\ell a_i \\ \displaystyle\lambda_l \times \left(\sum_{j=1}^{\ell} b_j - \sum_{i=\ell+1}^{k} a_i\right) = 0\end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}(\lambda_j - \lambda_\ell) b_j = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{k}\underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_i)}_{\ge \lambda_\ell - \lambda_{\ell+1} > 0}\underbrace{a_i}_{\ge 0} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=\ell+1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \qquad (\text{car } \lambda_l > 0)\end{cases}$$

La deuxième ligne du système implique que tous les a_i sont nuls. Conjointement avec les autres lignes du système, on en déduit qu'il y a égalité ssi

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, \ell]\!],\ b_j = 0 \\ \\ \forall i \in [\![\ell+1, k]\!],\ a_i = 0 \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} \forall j \in [\![1, \ell]\!],\ v_j \in \{\widetilde{v}_{\ell+1}, \ldots, \widetilde{v}_p\}^\perp = \mathrm{Vect}(\{\widetilde{v}_{\ell+1}, \ldots, \widetilde{v}_p\})^\perp = \mathrm{Im}(\widetilde{V})^{\perp\,\perp} = \mathrm{Im}(\widetilde{V}) \\ \\ \forall i \in [\![\ell+1, k]\!],\ v_i \in \{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_\ell\}^\perp = \mathrm{Vect}(\{\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_\ell\})^\perp = \mathrm{Im}(\widetilde{V})^\perp \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_\ell\}) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{V}) \\ \\ \mathrm{Vect}(\{v_{\ell+1}, \ldots, v_k\}) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{V})^\perp \end{cases}$$

- Supposons que

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_\ell\}) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{V}) \\ \\ \mathrm{Vect}(\{v_{\ell+1}, \ldots, v_k\}) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{V})^\perp \end{cases}$$

  La première ligne fournit $\ell \leq \mathrm{rg}(\widetilde{V})$, or on a $\mathrm{rg}(\widetilde{V}) \leq \ell$ car $\widetilde{V}$ comporte ℓ colonnes. On a donc $\ell = \mathrm{rg}(\widetilde{V})$, puis la première ligne fournit

$$\mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_\ell\}) = \mathrm{Im}(\widetilde{V}).$$

- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_\ell\}) = \mathrm{Im}(\widetilde{V})$. Alors la première ligne est trivialement satisfaite. De plus, on a bien

$$\mathrm{Vect}(\{v_{\ell+1}, \ldots, v_k\}) \subset \mathrm{Vect}(\{v_{\ell+1}, \ldots, v_p\}) = \mathrm{Im}(\widetilde{V})^\perp,$$

  donc la deuxième ligne est également satisfaite.

Ainsi l'équivalence est démontrée.

c) On considère $\widetilde{V} \in M_{p,\ell}(\mathbb{R})$ dont la famille des colonnes est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(M)^\perp$.
On constate alors que $\widetilde{V}^T\widetilde{V} = I_\ell$ et $\widetilde{V}\widetilde{V}^T$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(M)^\perp$.
Donc $I_p - \widetilde{V}\widetilde{V}^T$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(M)$ et on en déduit que $M(I_p - \widetilde{V}\widetilde{V}^T) = 0$ donc $M = M\widetilde{V}\widetilde{V}^T$.
Pour la suite, posons $P = \widetilde{V}\widetilde{V}^T$.
Vérifions d'abord l'orthogonalité suivante en notant que $P^T = P$:

$$\begin{aligned} (A(I_p - P)|(A - M)P) &= \mathrm{Tr}(A(I_p - P)P(A^T - M^T)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule en utilisant le théorème de Pythagore (et la relation $M = MP$:

$$\begin{aligned} \|A - M\|^2 &= \|A - AP + AP - MP\|^2 \\ &= \|A - AP\|^2 + \|AP - MP\|^2 \\ &= \|A - AP\|^2 + \|AP - M\|^2 \\ &\geq \|A - AP\|^2 \end{aligned}$$

Un calcul essentiellement direct donne $\|A\|^2 = \sum_{h=1}^{k} \lambda_h$ donc d'après les questions, 8a et 9b,

$$\boxed{\|A - M\|^2 \geq \sum_{h=\ell+1}^{k} \lambda_h}$$

Soit M vérifiant le cas d'égalité.

Alors, d'après la démonstration de l'inégalité, $M = AP$ et P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(\widetilde{V})$.
Mais, d'après la question 9b, $\mathrm{Im}(\widetilde{V}) = \mathrm{Vect}((v_1, ..., v_\ell))$.
Notons P_0 la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}((v_1, ..., v_\ell))$.
Alors $M = AP_0$ ce qui achève, sous réserve d'existence, la démonstration de l'unicité d'un point M en lequel $\|A - M\|^2 = \displaystyle\sum_{h=\ell+1}^{k} \lambda_h$.
Il reste à vérifier que $U_* \Sigma_* V_*^T$ convient.
Écrivons U, Σ et V par blocs :
$U = \begin{pmatrix} U_* & U_1 \end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_* & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_* & V_1 \end{pmatrix}$.
Un calcul par blocs donne alors $A = U\Sigma V^T = U_* \Sigma_* V_*^T + U_1 \Sigma_1 V_1^T$.
Donc $\|A - U_* \Sigma_* V_*^T\|^2 = \|U_1 \Sigma_1 V_1^T\|^2 = \displaystyle\sum_{h=\ell+1}^{k} \lambda_h$ car $U_1^T U_1 = V_1^T V_1 = I_{k-\ell}$.
Il reste à constater que $\mathrm{rg}(U_* \Sigma_* V_*^T) = \ell$ (démonstration similaire à celle de la question 13b).
Conclusion : $\boxed{\text{le cas d'égalité est réalisé si et seulement si } M = U_* \Sigma_* V_*^T}$.

Troisième partie

10) a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(M_{V,W})$. On présente x par blocs : $x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 \in M_{k,1}(\mathbb{R})$ et $X_2 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.
$M_{V,W} x = 0$ donc $VX_1 + X_2 = 0$ et $W^T X_2 = 0$.
Donc $W^T V X_1 + W^T X_2 = 0$ puis $W^T V X_1 = 0$.
Par inversibilité de $W^T V$, on en déduit $X_1 = 0$ puis $X_2 = -VX_1 = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(M_{V,W}) \subset \{0\}$.
Conclusion : $\boxed{M_{V,W} \text{ est inversible}}$.

b)
- Prouvons déjà l'indication. Soit donc $z \in \mathrm{Im}(W)^\perp$. On a
$$\|W^T z\|_2^2 = z^T \underbrace{W W^T z}_{\in \mathrm{Im}(W)} = 0,$$
ce qui montre que $W^T z = 0$.
- Maintenant, soit $z \in \mathrm{Im}(W)^\perp \cap \mathrm{Im}(V)$. En écrivant z sous la forme Vx, on obtient par le point précédent
$$W^T V x = 0 \qquad \text{donc} \qquad x = 0$$
(car $W^T V$ est inversible). Puis $z = 0$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(W)^\perp$ et $\mathrm{Im}(V)$ sont en somme directe.
- Puisque
$$k = \mathrm{rg}(W^T V) \leq \mathrm{rg}(W^T), \mathrm{rg}(V) \leq k,$$
c'est que nécessairement, $\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(W^T) = k$. On en déduit que
$$\begin{cases} \dim(\mathrm{Im}(W)^\perp) = p - \mathrm{rg}(W) = p - \mathrm{rg}(W^T) = p - k \\ \dim(\mathrm{Im}(V)) = k \end{cases}$$
Finalement, on a $\dim(\mathrm{Im}(W)^\perp \oplus \mathrm{Im}(V)) = p$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(W)^\perp \oplus \mathrm{Im}(V) = \mathbb{R}^p$.

c)
- Soit $z \in \mathrm{Im}(V)$, qu'on écrit sous la forme Vx. On a
$$\begin{aligned} P_{V,W} z &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix} \times V \times x \\ &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M_{V,W}^{-1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} V \\ 0_k \end{pmatrix}}_{= M_{V,W} \times \binom{I_k}{0_{p,k}}} \times x \\ &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p,k} \end{pmatrix} \times x \\ &= Vx \\ &= z. \end{aligned}$$

- Maintenant, soit $z \in \mathrm{Im}(W)^\perp$. On a

$$\begin{aligned}
P_{V,W} z &= \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix} \times z \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix}}_{=(V(W^TV)^{-1}W^T \quad -V(W^TV)^{-1}) \times M_{V,W}} \times M_{V,W}^{-1} \times \begin{pmatrix} z \\ 0_{k,1} \end{pmatrix} \\
&= V(W^TV)^{-1}W^T z \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Conclusion : $P_{V,W}$ est la projection sur $\mathrm{Im}(V)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(W)^\perp$.

11) Dans la suite, nous utilisons régulièrement le fait que la forme coordonnée qui à une matrice associe l'un de ses termes est une application continue. C'est immédiat, puisqu'une telle forme coordonnée est une application linéaire, et qu'on travaille en dimension finie.

$GL_q(\mathbb{R})$ est un ouvert, car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^\star$ par l'application $M \mapsto \det(M)$, qui est continue car polynomiale en les coefficients de M. Puis la formule de la comatrice montre que, lorsque M est inversible, les coefficients de M^{-1} s'écrivent comme des fonctions rationnelles en les coefficients de M. Chaque terme de M^{-1} est donc continu en les coefficients de M, ce qui suffit à conclure.

12) Posons $\varphi : W \mapsto W^TV$. C'est une application linéaire, donc elle est continue. Or $\varphi(V) \in GL_k(\mathbb{R})$, qui est ouvert. Donc pour W suffisamment proche de V, on a $\varphi(W) \in GL_k(\mathbb{R})$.

Puis l'application $W \mapsto M_{V,W}$ est évidemment continue sur $\mathcal{V}$ (chaque coefficient de $M_{V,W}$ étant polynomial en les coefficients de W), si bien que par composition, l'application $W \mapsto M_{V,W}^{-1}$ est continue. Enfin, l'application

$$M \mapsto \begin{pmatrix} V & 0_p \end{pmatrix} \times M \times \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{k,p} \end{pmatrix}$$

est continue car linéaire. On conclut à nouveau par composition.

Quatrième partie

13) a) $U^TU = I_k$ donc $\mathbb{R}^k \subset \mathrm{Im}(U^T)$ donc $\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(U^T) \geq k$.
$U \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{rg}(U) \leq k$.
Finalement, $\mathrm{rg}(U) = k$ et il existe une matrice extraite de U inversible de taille k.
Par continuité du déterminant, cette même matrice inversible, perturbée par $t\overline{U}$ reste inversible pourvu que t soit assez proche de 0.
Donc $\mathrm{rg}(U + t\overline{U}) \geq k$ au voisinage de 0.
On a aussi $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{rg}(U + t\overline{U}) \leq k$ car $U + t\overline{U}$ possède k colonnes.
Conclusion : $t \mapsto \mathrm{rg}(U + t\overline{U})$ est constante au voisinage de 0 (égale à k).
On démontre de même que $\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(\Sigma) = k$ puis que $t \mapsto \mathrm{rg}(V + t\overline{V})$ et $t \mapsto \mathrm{rg}(\Sigma + t\overline{\Sigma})$ sont constantes, égales à k au voisinage de 0

b) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{E}$ trois matrices de rang k. Notons déjà que $ABC^T \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Montrons que $\mathrm{rg}(ABC^T) = k$.
Déjà, $\mathrm{rg}(C) = k$ donc $\mathrm{rg}(C^T) = k$ puis $\mathrm{Im}(C^T) = \mathbb{R}^k$.
$B \in M_k(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}(B) = k$ donc B est inversible et $\mathrm{Im}(BC^T) = \mathbb{R}^k$.
On en déduit $\mathrm{Im}(ABC^T) = \mathrm{Im}(A)$ donc $\mathrm{rg}(ABC^T) = \mathrm{rg}(A) = k$.
En exploitant ce qui précède et la question 13(a), on en déduit que $\boxed{\gamma(t) \in M_{n,p}^k(\mathbb{R}) \text{ au voisinage de } t = 0}$.

c) γ est polynomiale en t donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'après la formule de dérivation d'un produit et par linéarité de la transposition,

$$\boxed{\gamma'(0) = \overline{U}\Sigma V^T + U\overline{\Sigma}V^T + U\Sigma\overline{V}^T}$$

14) a) D'après la question précédente et par définition d'un vecteur tangent, tout vecteur qui s'écrit sous la forme $\overline{U}\Sigma V^T + U\overline{\Sigma}V^T + U\Sigma\overline{V}^T$ est vecteur tangent à $M_{n,p}^k(\mathbb{R})$ en A donc a fortiori,

$\boxed{\text{tout vecteur de } T_A \text{ est un vecteur tangent à } M_{n,p}^k(\mathbb{R}) \text{ en } A}$.

Notons $F = \{\overline{U} \in M_{n,k}(\mathbb{R}) | \overline{U}^T U = 0_k\}$ et $G = \{\overline{V} \in M_{p,k}(\mathbb{R}) | \overline{V}^T V = 0_k\}$.

Posons $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} F \times M_k(\mathbb{R}) \times G \to M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\overline{U}, \overline{\Sigma}, \overline{V}) \mapsto \overline{U}\Sigma V^T + U\overline{\Sigma}V^T + U\Sigma\overline{V}^T \end{array} \right.$.

F et G sont bien deux sous-espaces vectoriels respectivement de $M_{n,k}(\mathbb{R})$ et de $M_{p,k}(\mathbb{R})$.

φ est bien définie et linéaire, d'image T_A.

Donc $\boxed{T_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_{n,p}(\mathbb{R})}$.

Montrons maintenant que φ est injective.

Soit $(A, B, C) \in \text{Ker}(\varphi)$.

Alors $A\Sigma V^T + UBV^T + U\Sigma C^T = 0_{n,p}$.

On multiplie à droite par V et on exploite que $C^T V = 0$ et $V^T V = I_k$:

$A\Sigma + UB = 0$.

On multiplie à gauche par U^T et on note que $A^T U = 0$ donc $U^T A = 0$ et $U^T U = I_k$.

$B = 0$.

On réinjecte dans ce qui précède pour obtenir $A\Sigma = 0$ puis $A = 0$ par inversibilité de Σ.

On réinjecte encore : $U\Sigma C^T = 0$. On multiplie à gauche par $\Sigma^{-1}U^T$: $C^T = 0$ puis $C = 0$.

φ est donc injective.

Ainsi, d'après la formule du rang, $\dim(T_A) = \dim(F \times M_k(\mathbb{R}) \times G) = \dim(F) + \dim(M_k(\mathbb{R})) + \dim(G)$

On sait que $\dim(M_k(\mathbb{R})) = k^2$.

Posons $f : \left\{ \begin{array}{l} M_{n,k}(\mathbb{R}) \to M_{k,k}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T U \end{array} \right.$.

f est bien définie, linéaire et $F = \text{Ker}(f)$.

Or f est surjective. En effet, si $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$, on peut poser $B = UA^T$.

On a $B \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ et $f(B) = B^T U = AU^T U = A$.

D'après la formule du rang, $\dim(F) = \dim(M_{n,k}(\mathbb{R})) - \dim(M_{k,k}(\mathbb{R})) = k(n-k)$.

De même, $\dim(G) = k(p-k)$.

Conclusion : $\boxed{\dim(T_A) = k(n-k) + k(p-k) + k^2 = np - (n-k)(p-k)}$

b) Commençons par montrer que $N_A \subset T_A^\perp$.

Soit $X \in N_A$ et $(B, C, D) \in F \times M_{k,k}(\mathbb{R}) \times G$.

Posons $M = B\Sigma V^T + UCV^T + U\Sigma D^T$ et notons que $X^T U = XV = 0$ donc $V^T X^T = 0$.

On calcule : $X^T M = X^T B\Sigma V^T$.

Donc $(X|M) = \text{Tr}(X^T M) = \text{Tr}(X^T B\Sigma V^T) = \text{Tr}(B\Sigma V^T X^T) = 0$

Conclusion : $N_A \subset T_A^\perp$.

Vérifions l'égalité des dimensions, *i.e.* que $\dim(N_A) = \dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) - \dim(T_A) = (n-k)(p-k)$.

U et V sont deux matrices de rang k à k colonnes.

Il existe donc P, Q, R, S des matrices inversibles telles que $U = P \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{n-k,k} \end{pmatrix} Q$ et $V = R \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p-k,k} \end{pmatrix} S$.

Soit $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $Y = P^T X R$.

On écrit Y par blocs : $Y = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $B \in M_{k,k}(\mathbb{R})$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in N_A &\Leftrightarrow XV = 0 \text{ et } X^T U = 0 \\
&\Leftrightarrow P^T X R \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p-k,k} \end{pmatrix} = 0 \text{ et } R^T X^T P \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow Y \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{p-k,k} \end{pmatrix} \text{ et } Y^T \begin{pmatrix} I_k \\ 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} B^T \\ C^T \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} R^{-1}
\end{aligned}$$

La fonction $E \mapsto (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} 0_{k,k} & 0_{k,p-k} \\ 0_{n-k,k} & E \end{pmatrix} R^{-1}$ permet donc de définir un isomorphisme de $M_{n-k,p-k}(\mathbb{R})$ vers N_A.
On en déduit que $\dim(N_A) = \dim(M_{n-k,p-k}(\mathbb{R})) = (n-k)(p-k)$.
Conclusion : $\boxed{N_A \text{ est l'orthogonal de } T_A \text{ dans } M_{n,p}(\mathbb{R})}$.

15) a) Supposons que $\widetilde{A}$ vérifie (C).
Alors $\mathrm{rg}(\widetilde{A}VV^T) = \mathrm{rg}(\widetilde{A})$.
Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(V^T) \subset \mathrm{Ker}(\widetilde{A}VV^T)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(V^T)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(\widetilde{A}VV^T))$.
La formule du rang donne alors $p - \mathrm{rg}(V^T) \leq p - \mathrm{rg}(\widetilde{A}VV^T)$
qui donne alors directement $\mathrm{rg}(\widetilde{A}) \leq \mathrm{rg}(V) = k$.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{rg}(\widetilde{A}) \leq k}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\widetilde{A})$ et $y \in \mathbb{R}^n$.
$(x|\widetilde{A}^T UU^T y) = y^T UU^T \widetilde{A}x = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}(\widetilde{A}) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{A}^T UU^T)^\perp = \mathrm{Im}(\widetilde{A}^T)^\perp$.
On conclut à l'égalité par égalité des dimensions (conséquence directe de la formule du rang et de la dimension de l'orthogonal).
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(\widetilde{A}^T UU^T)^\perp = \mathrm{Ker}(\widetilde{A})}$.

b) Posons $f : \begin{cases} M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ X \mapsto \det(V^T X^T U) \end{cases}$.
Par continuité de la transposition, du produit matriciel et du déterminant, f est continue.
$f(A) = \det(V^T A^T U) = \det(V^T (U\Sigma V^T)^T U) = \det(V^T V \Sigma^T U^T U) = \det(\Sigma^T) \neq 0$ car Σ est inversible.
Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\forall X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $\|X - A\|_F < \varepsilon \Rightarrow f(X) \neq 0$.
Vérifions que ε convient.
Soit $X \in M^k_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\|X - A\| < \varepsilon$.
Montrons que $\mathrm{Im}(XVV^T) = \mathrm{Im}(X)$ et $\mathrm{Im}(X^T UU^T) = \mathrm{Im}(X^T)$.
Les deux inclusions directes sont immédiates et il reste à montrer l'égalité des dimensions *i.e.* $\mathrm{rg}(XVV^T) = \mathrm{rg}(X^T UU^T) = k$.
$V^T X^T U$ est inversible (car $f(X) \neq 0$) et de taille k donc $\mathrm{rg}(V^T X^T U) = k$.
$\mathrm{Im}(V^T X^T U) \subset \mathrm{Im}(V^T X^T)$ donc $k \leq \mathrm{rg}(V^T X^T) = \mathrm{rg}(XV)$.
XV contient k colonnes donc $\mathrm{rg}(XV) \leq k$ puis $\mathrm{rg}(XV) = k$.
Enfin, $\mathrm{rg}(V^T) = k$ et $\mathrm{Im}(V^T) \subset \mathbb{R}^k$ donc $\mathrm{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k$
puis $\mathrm{Im}(XVV^T) = \mathrm{Im}(XV)$ et $\mathrm{rg}(XVV^T) = \mathrm{rg}(XV) = k$.
On a aussi $\mathrm{Ker}(X^T U) \subset \mathrm{Ker}(V^T X^T U)$ donc $k = \mathrm{rg}(V^T X^T U) \leq \mathrm{rg}(X^T U) \leq k$ puis $\mathrm{rg}(X^T U) = k$.
Ensuite, $\mathrm{rg}(U^T) = k$ donc $\mathrm{Im}(U^T) = \mathbb{R}^k$ puis $\mathrm{Im}(X^T UU^T) = \mathrm{Im}(X^T U)$.
Donc $\mathrm{rg}(X^T UU^T) = \mathrm{rg}(X^T U) = k$.
Conclusion : $\boxed{X \text{ vérifie la condition } (C) \text{ et } \varepsilon \text{ convient}}$.

16) a) On a directement l'inclusion $N_A \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.
Alors $X^T UU^T = 0$ et $XVV^T = 0$.
On multiplie par U à droite dans la première égalité et par V à droite dans la deuxième et on obtient $X^T U = 0$ et $XV = 0$. Donc $X \in N_A$.
Conclusion : $\boxed{N_A = \mathrm{Ker}(\Phi)}$.

b) Φ et $\Phi \circ \pi_A$ sont deux fonctions linéaires définies sur $M_{n,p}(\mathbb{R}) = T_A \oplus N_A$.
On vérifie donc leur égalité en vérifiant qu'elles coïncident sur N_A et sur T_A.
Soit $X \in N_A$.
$\Phi(X) = (0,0)$ d'après ce qui précède et $\Phi(\pi_A(X)) = \Phi(0) = (0,0)$ car $X \in \mathrm{Ker}(\pi_A)$.
Soit $X \in T_A$. Alors $\pi_A(X) = X$ donc $\Phi(\pi_A(X)) = \Phi(X)$.
Conclusion : $\boxed{\Phi = \Phi \circ \pi_A}$.

c) Commençons par montrer que $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}(V) \oplus \mathrm{Im}(W)^\perp$.
Soit $f : \begin{cases} \mathrm{Im}(V) \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \widetilde{A}x \end{cases}$.
f est bien définie et linéaire.
$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(V) \cap \mathrm{Ker}(\widetilde{A})$.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\widetilde{A}V) = \mathrm{Im}(\widetilde{A}VV^T) = \mathrm{Im}(\widetilde{A})$ (on rappelle que $\mathrm{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k$).

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(V)\cap\mathrm{Ker}(\widetilde{A})) = \mathrm{rg}(V)-\mathrm{rg}(\widetilde{A}) = k-k = 0$ donc $\mathrm{Im}(V)\oplus\mathrm{Ker}(\widetilde{A})$ existe.
Or, d'après la question 15(a), $\mathrm{Ker}(\widetilde{A}) = \mathrm{Im}(W)^\perp$ donc $\mathrm{Im}(V)\oplus\mathrm{Im}(W)^\perp$ existe (c'est un sev de $\mathbb{R}^p$).
$\dim(\mathrm{Im}(V)\oplus\mathrm{Im}(W)^\perp) = \mathrm{rg}(V)+(p-\mathrm{rg}(W)) = k+p-\mathrm{rg}(\widetilde{A}^T) = p$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(V)\oplus\mathrm{Im}(W)^\perp = \mathbb{R}^p}$.
Pour vérifier l'égalité matricielle demandée, il suffit de vérifier successivement :
$\forall x\in\mathrm{Im}(V), \widetilde{A}x = \widetilde{A}VV^TP_{V,W}x$
et $\forall x\in\mathrm{Im}(W)^\perp, \widetilde{A}x = \widetilde{A}VV^TP_{V,W}x$.
Soit $x\in\mathrm{Im}(V)$.
Il existe $y\in\mathbb{R}^k$ tel que $x = Vy$.

$$\begin{aligned}\widetilde{A}VV^TP_{V,W}x &= \widetilde{A}VV^Tx\\ &= \widetilde{A}VV^TVy\\ &= \widetilde{A}Vy\\ &= \widetilde{A}x\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathrm{Im}(W)^\perp$.
D'après 15(a), $x\in\mathrm{Ker}(\widetilde{A})$ et par définition du projecteur, $x\in\mathrm{Ker}(P_{V,W})$
donc $\widetilde{A}x = 0 = \widetilde{A}VV^TP_{V,W}x$.
Conclusion : $\boxed{\widetilde{A} = \widetilde{A}VV^TP_{V,W}}$.

17) On prend le ε de la question 15(b).
Soit $X,Y\in M_{n,p}^k(\mathbb{R})\cap B(A,\varepsilon/2)$ tel que $\pi_A(X) = \pi_A(Y)$.
Alors, d'après la question 16(b), $\Phi(X) = \Phi(Y)$ donc $XVV^T = YVV^T$ et $X^TUU^T = Y^TUU^T$.
Notons $W = X^TUU^T = Y^TUU^T$.
X et Y vérifient la condition (C) donc d'après la question 16(c)

$$\begin{aligned}X &= XVV^TP_{V,W}\\ &= YVV^TP_{V,W}\\ &= Y\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varepsilon/2 \text{ convient}}$.

18) a) Posons $f : \left\{\begin{array}{l} M_{n,p}(\mathbb{R})\to M_{n,p}(\mathbb{R})\\ X\mapsto (I_n-UU^T)X(I_p-VV^T)\end{array}\right.$.
f est bien définie et linéaire. C'est un endomorphisme de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Soit $X\in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}f^2(X) &= (I_n-UU^T)^2X(I_p-VV^T)^2\\ &= (I_n-2UU^T+UU^TUU^T)X(I_p-2VV^T+VV^TVV^T)\\ &= (I_n-UU^T)X(I_p-VV^T)\\ &= f(X)\end{aligned}$$

f est donc un projecteur de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Soit $X\in N_A$.
Alors $U^TX = 0$ et $XV = 0$ donc un calcul direct donne $f(X) = X$.
Donc $N_A\subset\mathrm{Im}(f)$.
Soit $X\in\mathrm{Im}(f)$.
Alors $X = f(X) = X - UU^TX - XVV^T + UU^TXVV^T$.

$$\begin{aligned}U^TX &= U^TX - U^TX - U^TXVV^T + U^TXVV^T\\ &= 0\end{aligned}$$

et de même, $XV = 0$. Donc $\mathrm{Im}(f)\subset N_A$.
Enfin, vérifions que f est un projecteur orthogonal.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(f)$ et $Y \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrons que $(X|f(Y)) = 0$.

$$\begin{aligned}(X|f(Y)) &= \mathrm{Tr}(X((I_n - UU^T)B(I_p - VV^T))^T) \\ &= \mathrm{Tr}(X(I_p - VV^T)B^T(I_n - UU^T)) \\ &= \mathrm{Tr}((I_n - UU^T)X(I_p - VV^T)B^T) \\ &= \mathrm{Tr}(f(X)B^T) \\ &= 0\end{aligned}$$

f est donc la projection orthogonale sur N_A : $f = \rho_A$.
Conclusion : $\boxed{\forall \widetilde{A} \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \rho_A(\widetilde{A}) = (I_n - UU^T)\widetilde{A}(I_p - VV^T)}$

b) Soit $B \in M_p(\mathbb{R})$.
Montrons que $AB \in N_A^\perp$, ce qui suffira pour conclure.
Soit $X \in N_A$. Notons que $X^TU = 0$.

$$\begin{aligned}(AB|X) &= \mathrm{Tr}(X^TAB) \\ &= \mathrm{Tr}(X^TU\Sigma V^TB) \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que $AB \in N_A^\perp = \mathrm{Ker}(\rho_A)$.
Conclusion : $\boxed{\forall B \in M_p(\mathbb{R}), \rho_A(AB) = 0}$.

c) On calcule :
$(\widetilde{A} - A)VV^T(P_{V,W} - P_{V,V}) = \widetilde{A}VV^TP_{V,W} - AVV^T(P_{V,W} - P_{V,V}) - \widetilde{A}VV^TP_{V,V} = \widetilde{A} - AB - \widetilde{A}VV^TP_{V,V}$ avec $B \in M_p(\mathbb{R})$.
Il ne reste plus qu'à vérifier que $\widetilde{A}VV^TP_{V,V} \in \mathrm{Ker}(\rho_A)$.
$VV^T \in M_p(\mathbb{R})$, $(VV^T)^2 = VV^TVV^T = VV^T$
$(VV^T)^T = VV^T$ et $\mathrm{Im}(VV^T) = \mathrm{Im}(V)$ car $\mathrm{Im}(V^T) = \mathbb{R}^k$.
Donc VV^T est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(V)$ donc $P_{V,V} = VV^T$
puis $P_{V,V}(I_p - VV^T) = VV^T - VV^TVV^T = 0$.
On en déduit que $\rho_A(\widetilde{A}VV^TP_{V,V}) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\rho_A(\widetilde{A}) = (I_n - UU^T)(\widetilde{A} - A)(P_{V,W} - P_{V,V})(I_p - VV^T)}$.

d) On calcule :

$$\begin{aligned}\|I_n - UU^T\|^2 &= \mathrm{Tr}((I_n - UU^T)^T(I_n - UU^T)) \\ &= \mathrm{Tr}((I_n - UU^T)(I_n - UU^T)) \\ &= \mathrm{Tr}(I_n - UU^T) \\ &= n - \mathrm{Tr}(UU^T) \\ &= n - \mathrm{Tr}(U^TU) \\ &= n - k\end{aligned}$$

De même, $\|I_p - VV^T\|^2 = p - k$ et $\|VV^T\|^2 = \mathrm{Tr}(VV^TVV^T) = \mathrm{Tr}(VV^T) = \mathrm{Tr}(V^TV) = k$
D'après la question 3, on peut conclure : $\boxed{\|\rho_A(\widetilde{A})\| \leq \sqrt{(n-k)k(p-k)} \times \|\widetilde{A} - A\| \times \|P_{V,W} - P_{V,V}\|}$

19) Posons $\lambda = \sqrt{(n-k)k(p-k)}$.
Soit $\delta > 0$ et $f :]-\delta, \delta[\to M_{n,p}^k(\mathbb{R})$ dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = A$.
Montrons que $f'(0) \in T_A$ *i.e.* $\rho_A(f'(0)) = 0$.
On peut choisir $\varepsilon \in]0, \delta[$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(t)$ vérifie la condition (C) (d'après la question 15b).
Remarquons que $\rho_A(A) = 0$ d'après la question 18b.
Soit $t \in]0, \varepsilon[$. On pose $W_t = f(t)^TUU^T$.
D'après la question 18d, $\|\rho_A(f(t)) - \rho_A(f(0))\| \leq \lambda \|f(t) - f(0)\| \times \|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|$.
On divise par t et on exploite l'homogénéité de la norme et la linéarité de ρ_A :
$\left\|\rho_A\left(\dfrac{f(t) - f(0)}{t}\right)\right\| \leq \lambda \left\|\dfrac{f(t) - f(0)}{t}\right\| \times \|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|$.
Par continuité des fonctions linéaires en dimension finie et continuité de la norme, le membre de gauche converge vers $\|\rho_A(f'(0))\|$ quand $t \to 0^+$.

$t \to \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ est bornée au voisinage de 0^+ car f est dérivable en 0.
Il reste à montrer que $\|P_{V,W_t} - P_{V,V}\|$ converge vers 0 quand t tend vers 0^+.
On commence par noter que $\mathrm{Im}(W_t) = \mathrm{Im}(f(t)^T U V^T) = \mathrm{Im}(f(t)^T U) = \mathrm{Im}(f(t)^T U \Sigma^{-1})$.
Donc P_{V,W_t} est le projecteur sur $\mathrm{Im}(V)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f(t)^T U \Sigma^{-1})^\perp$.
Donc $\underline{P_{V,W_t} = P_{V,H_t}}$ en posant $H_t = f(t)^T U \Sigma^{-1}$.
Par continuité du produit matriciel et de la transposition, $f(t)^T U \Sigma^{-1}$ tend vers $A^T U \Sigma^{-1}$ quand $t \to 0^+$.
Or $A^T U \Sigma^{-1} = V \Sigma^T U^T U \Sigma^{-1} = V \Sigma \Sigma^{-1} = V$.
On peut choisir $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que $\forall t \in [0, \eta[\,, H_t \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ est défini dans la question 12).
$t \mapsto H_t$ est définie sur $[0, \eta[$, à valeurs dans $\mathcal{V}$ et continue en 0.
$W \mapsto P_{V,W}$ est continue sur $\mathcal{V}$.
Par composition, $t \mapsto P_{V,H_t}$ est définie sur $[0, \eta[$ et continue en 0.
Donc P_{V,W_t} tend vers P_{V,H_0} quand t tend vers 0^+.
Or $P_{V,H_0} = P_{V,V}$ car $H_0 = V$.
Donc P_{V,W_t} tend vers $P_{V,V}$ quand t tend vers 0^+.
Par pasage à la limite dans une inégalité dont tous les termes convergent, on en déduit $\|\rho_A(f'(0))\| \leq 0$ puis $f'(0) \in \mathrm{Ker}(\rho_A) = N_A^\perp = T_A$.
La question 13c a déjà démontré que tout vecteur de T_A est un vecteur tangent.
Conclusion : $\boxed{T_A \text{ est exactement l'ensemble des vecteurs tangents à } M_{n,p}^k(\mathbb{R}) \text{ en } A}$