ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2017 FILIÈRE MPI

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

⋆ ⋆ ⋆

Dans tout ce qui suit, la variable n désignera toujours un entier naturel et $[\![0, n]\!]$ désignera l'ensemble des entiers naturels j tels que $0 \leqslant j \leqslant n$.

On considérera des applications $f : I \to I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et on notera $(x_n)_{n \geqslant 0}$ toute suite définie par $x_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On définit la suite $(f^{\circ n} : I \to I)_{n \geqslant 0}$ par

$$f^{\circ 0}(x) = x \quad \text{et} \quad f^{\circ(n+1)}(x) = f\big(f^{\circ n}(x)\big),$$

de sorte que $x_n = f^{\circ n}(x_0)$ pour tout $n \geqslant 0$. S'il le souhaite, le candidat pourra utiliser la notation f^n à la place de la notation $f^{\circ n}$.

Pour tout ensemble $J \subset I$ et $n \geqslant 0$, on pose

$$f^{-n}(J) = \big\{x \in I \ ; \ f^{\circ n}(x) \in J\big\}.$$

Un point $x \in I$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$, et un *point périodique* de f s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $f^{\circ p}(x) = x$. La suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est *périodique* si x_0 est un point périodique de f.

On dit que f est *monotone par morceaux* s'il existe un ensemble fini $\mathcal{C} \subset I$ tel que f soit strictement monotone sur chaque intervalle inclus dans $I \smallsetminus \mathcal{C}$ (qui est une réunion finie d'intervalles disjoints). On dit que $x \in I$ est un *point critique* de f si on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x tel que f soit monotone sur J (en particulier, si I est un intervalle fermé borné, ses extrémités sont des points critiques). On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points critiques de f. Un *pli* de f est une *composante connexe* de $I \smallsetminus \mathcal{C}_f$, c'est-à-dire un intervalle contenu dans $I \smallsetminus \mathcal{C}_f$ dont les extrémités sont des points critiques ou des extrémités de I. C'est un intervalle ouvert maximal sur lequel f est monotone. Si f est monotone par morceaux, on note $\lambda(f)$ le nombre de plis de f (voir Figure 1).

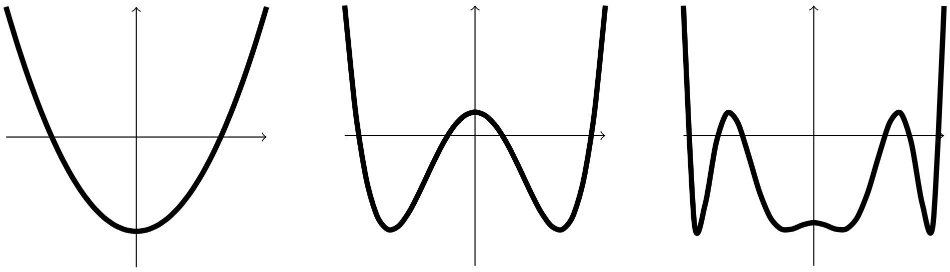

Figure 1: Le nombre de plis de f, $f^{\circ 2}$ et $f^{\circ 3}$ pour $f(x) = x^2 - 5/4$.

Question préliminaire

Montrer que si $f : I \to I$ est monotone par morceaux, alors pour tout entier naturel n la fonction $f^{\circ n} : I \to I$ est monotone par morceaux.

Un des objectifs de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $\big(\lambda(f^{\circ n})\big)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers l'infini.

Partie I

Dans cette partie, on considère le cas où $I = \mathbb{R}$ et $f : I \to I$ est de la forme

$$f : x \mapsto f_c(x) = x^2 + c \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{est fixé.}$$

On étudie la topologie de l'ensemble K_c défini par

$$K_c = \big\{x_0 \in \mathbb{R}\ ;\ \text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée}\big\}.$$

L'étude dépend des valeurs de $c \in \mathbb{R}$. On commence par étudier le cas particulier $c = 0$ pour lequel on peut donner une formule explicite de x_n en fonction de x_0. On considère ensuite le cas général.

1. On suppose que $c = 0$. Exprimer x_n en fonction de n. Déterminer K_0 ainsi que la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de $x_0 \in \mathbb{R}$.

On se place maintenant dans le cas général $c \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les points fixes de $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en fonction des valeurs de $c \in \mathbb{R}$.

3. On suppose que $c > 1/4$. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. En déduire que $K_c = \varnothing$.

Dans le reste de la partie I, on suppose que $c \leqslant 1/4$ et on note $\beta_c \in \mathbb{R}$ le plus grand point fixe de f_c.

4. Lorsque $c \in [-2, 1/4]$, montrer que $K_c = [-\beta_c, \beta_c]$.

5. On suppose finalement que $c < -2$.

   (a) Montrer que $K_c = \bigcap_{n \geqslant 0} f_c^{-n}\big([-\beta_c, \beta_c]\big)$. En déduire que K_c est un compact non vide.

   On souhaite montrer que K_c est totalement discontinu, c'est-à-dire que tout intervalle contenu dans K_c est réduit à un point. On suppose donc que $[a, b] \subset K_c$ et on veut conclure que $a = b$. On définit les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$, $(b_n)_{n \geqslant 0}$ et $(L_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$a_n = f_c^{\circ n}(a), \quad b_n = f_c^{\circ n}(b) \quad \text{et} \quad L_n = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2/c^2}} \right|.$$

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, la fonction f_c est strictement monotone sur le segment (a_n, b_n) d'extrémités a_n et b_n (c'est-à-dire l'intervalle $(a_n, b_n) = [a_n, b_n]$ quand $a_n \leqslant b_n$ et $(a_n, b_n) = [b_n, a_n]$ quand $b_n \leqslant a_n$).

   (c) Montrer que L_n est bien défini et que $L_{n+1} \geqslant 2L_n$ pour tout $n \geqslant 0$, puis conclure.

Partie II

Dans cette partie, on considère le cas où $I = [-1, 1]$ et où $f : I \to I$ est de la forme

$$f : x \mapsto f_a(x) = \frac{2x^2 + a - 1}{2ax^2 + 1 - a} \quad \text{où} \quad a \in [0, 1[\quad \text{est fixé.}$$

On étudie l'ensemble des points périodiques de f_a selon les valeurs de a.

1. Vérifier que f_a est définie sur I et que $f_a(I) = I$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\lambda(f_a^{\circ n}) = 2^n$ et que $f_a^{\circ n}$ envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur $]-1, 1[$.

3. Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

   (a) Montrer que si $x_0 = \cos(t_0) \in I$, alors la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $x_n = f_0^{\circ n}(x_0)$ vérifie $x_n = \cos(2^n t_0)$ pour tout $n \geqslant 0$.

   (b) En déduire que l'ensemble des points périodiques de f_0 est dense dans I.

On se place de nouveau dans le cas général $a \in [0, 1[$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire, π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$h_a'(t) = \frac{2\sqrt{1 - a^2}}{1 + a\cos(2t)} - 2$$

   et que si l'on définit $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F_a(t) = 2t + h_a(t)$, alors on a

$$f_a(\cos t) = \cos\big(F_a(t)\big) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   On pourra considérer la quantité $\mathrm{Arccos}\big(f_a(\cos t)\big)$.

5. Pour $n \geqslant 0$, on définit $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\Phi_n(t) = \frac{F_a^{\circ n}(t)}{2^n}.$$
Montrer que la suite de fonctions $(\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et croissante $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pourra considérer la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} (\Phi_{n+1} - \Phi_n)$.

6. En déduire que pour tout $a \in [0, 1[$, il existe une fonction continue et croissante $\phi : I \to I$ telle que
$$f_0 \circ \phi = \phi \circ f_a.$$

7. Dans cette question, on suppose que $a \in [0, 3/5[$.
   (a) Montrer que $F_a'(t) > 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\phi : I \to I$ admettent des applications réciproques continues $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : I \to I$.
   (c) En déduire que l'ensemble des points périodiques de f_a est dense dans I.

8. On suppose pour finir que $a \in]3/5, 1[$. Montrer que l'ensemble des points périodiques de f_a n'est pas dense dans I.

Partie III

Dans cette partie, on considère le cas où $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle borné et où $f : I \to I$ est une fonction continue et monotone par morceaux.

1. **Définition de l'entropie $h(f)$.** On souhaite montrer que la suite $(h_n)_{n \geqslant 0}$ définie par
$$h_n(f) = \frac{1}{n} \log \lambda(f^{\circ n}) \quad \text{pour tout entier naturel } n$$
converge.
   (a) Montrer que la suite $\big(h_n(f)\big)_{n \geqslant 1}$ est minorée. On définit
$$h(f) = \inf_{n \geqslant 1} h_n(f).$$
   (b) Montrer que si $f : I \to I$ et $g : I \to I$ sont deux fonctions monotones par morceaux, alors $\lambda(f \circ g) \leqslant \lambda(f) \cdot \lambda(g)$.
   (c) Soient $n \geqslant k \geqslant 1$ deux entiers. Montrer qu'il existe un entier $0 \leqslant r < k$ tel que:
$$h_n(f) \leqslant \frac{n-r}{n} h_k(f) + \frac{r}{n} h_1(f).$$
   (d) En déduire que
$$h(f) = \lim_{n \to +\infty} h_n(f).$$

(e) Établir que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$h(f) = \frac{1}{n} h(f^{\circ n}).$$

2. **Un premier exemple.** Dans cette partie, on se propose de déterminer l'entropie d'un polynôme cubique (que l'on identifie à la fonction polynomiale associée) dont le graphe est représenté sur la Figure 2 ci-dessous.

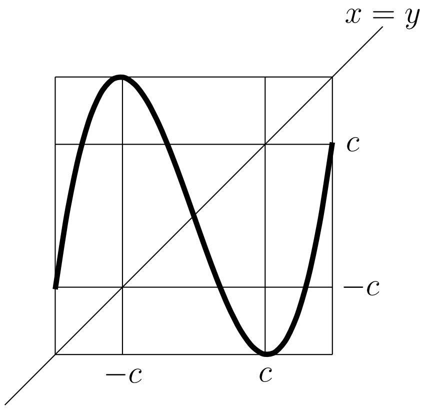

Figure 2: Le graphe d'un polynôme cubique $f(x) = x^3 - 3c^2x$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel $c > 0$ pour lequel le polynôme cubique $f(x) = x^3 - 3c^2x$ vérifie $f^{\circ 2}(c) = -c$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $f(x) = x^3 - 3c^2x$ avec $c > 0$ et que $f^{\circ 2}(c) = -c$.

(b) On pose $I = \big[f(c), f(-c)\big]$. Montrer que $f(I) = I$.

On définit les intervalles J_1, J_2 et J_3 par

$$J_1 = \big[f(c), -c\big], \quad J_2 = [-c, c] \quad \text{et} \quad J_3 = \big[c, f(-c)\big].$$

On considère la matrice carrée $M \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dont le coefficient $m_{i,j}$ est égal à 1 si $J_i \subseteq f\big(J_j\big)$ et à 0 sinon. Étant donné $n \geqslant 1$, on note v_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la i-ème coordonnée est le nombre de plis de $f^{\circ n} : I \to I$ contenus dans J_i.

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = M \cdot v_n$.

(d) Déterminer M et les valeurs propres de M.

(e) Montrer que l'entropie de $f : I \to I$ est $\log \rho$, où ρ est la plus grande valeur propre de M.

3. **Cas des applications tentes.** On considère maintenant le cas particulier où $f : I \to I$ est une application tente, c'est-à-dire une application continue et affine par morceaux (donc dérivable en dehors d'un ensemble fini $\mathcal{C}$) pour laquelle il existe un réel $p > 1$ tel que

$$\big|f'(x)\big| = p \quad \text{pour tout } x \in I \setminus \mathcal{C}.$$

On souhaite montrer que

$$h(f) = \log p.$$

(a) Montrer que la longueur de n'importe quel pli de $f^{\circ n}$ est au plus $|b - a|/p^n$. En déduire que $h(f) \geqslant \log p$.

(b) Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m = b$ tels que

- tous les points critiques de f sont des points a_i ;
- pour tout $i \in [0, m-1]$ et tout $j \in [0, m-1]$,

$$|a_{i+1} - a_i| \leqslant (1 + \varepsilon)|a_{j+1} - a_j|.$$

(c) Montrer qu'alors l'image par f de chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ intersecte au plus $(1 + \varepsilon) \cdot p + 2$ intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ et en déduire que

$$h(f) \leqslant \log\big((1 + \varepsilon) \cdot p + 2\big).$$

(d) Conclure. On pourra utiliser la relation établie à la question III.1.e.

Partie IV

On se place maintenant dans le cas où $\lambda(f) = 2$. Plus précisément, $I = [a, b]$ est un intervalle borné, $c_0 \in]a, b[$, et $f : I \to I$ est continue, strictement décroissante sur $[a, c_0]$ et strictement croissante sur $[c_0, b]$, avec $f(a) = f(b) = b$. On définit l'application $\varepsilon : I \to \{-1, 0, 1\}$ par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < c_0 \\ 0 & \text{si } x = c_0 \\ +1 & \text{si } x > c_0. \end{cases}$$

1. **La série entière $\Theta_x(z)$.** A chaque point $x \in I$, on associe la série entière $\Theta_x(z)$ définie par

$$\Theta_x(z) = \sum_{n \geqslant 0} \theta_n(x) \cdot z^n \quad \text{avec} \quad \theta_n(x) = \prod_{i=0}^{n} \varepsilon\big(f^{\circ i}(x)\big).$$

(a) Montrer que le rayon de convergence de Θ_x est supérieur ou égal à 1.

(b) Exprimer $\Theta_a(z)$ et $\Theta_b(z)$ sur leurs disques de convergence sous la forme de fractions rationnelles.

(c) On suppose que $n \geqslant 1$ et que $[x,y] \subseteq I$ et que $\theta_j(x) = \theta_j(y)$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $f^{\circ n}$ est monotone sur $[x,y]$, que son sens de variation dépend du signe de $\theta_{n-1}(x) = \theta_{n-1}(y)$, puis que $\theta_n(x) \leqslant \theta_n(y)$.

(d) En déduire que pour tout réel $z \in [0, 1/2]$, l'application $x \mapsto \Theta_x(z)$ est croissante sur I.

2. **Discontinuités de $x \mapsto \Theta_x(z)$.** Pour $x \in I$, on définit

$$\Theta_x^+(z) = \sum_{n \geqslant 0} \theta_n^+(x) \cdot z^n \quad \text{avec} \quad \theta_n^+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \theta_n(x)$$

et

$$\Theta_x^-(z) = \sum_{n \geqslant 0} \theta_n^-(x) \cdot z^n \quad \text{avec} \quad \theta_n^-(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} \theta_n(x).$$

(a) Montrer que pour tout $x \in I$, on a

$$\Theta_x = \frac{\Theta_x^- + \Theta_x^+}{2}.$$

(b) Montrer que $\Theta_x^- \neq \Theta_x^+$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $f^{\circ n}(x) = c_0$ et que dans ce cas, si $n_0 \geqslant 0$ est le plus petit de ces entiers, on a

$$\Theta_x^+(z) - \Theta_x^-(z) = z^{n_0} \cdot \big(\Theta_{c_0}^+(z) - \Theta_{c_0}^-(z)\big).$$

3. **L'invariant Δ_f.** On pose

$$\Delta_f = \frac{\Theta_{c_0}^+ - \Theta_{c_0}^-}{2}.$$

(a) Montrer que

$$\Delta_f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \delta_n \cdot z^n \quad \text{avec} \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{\circ n}(c_0) = c_0 \\ \delta_{n-1} & \text{si } f^{\circ n}(c_0) > c_0 \\ -\delta_{n-1} & \text{si } f^{\circ n}(c_0) < c_0. \end{cases}$$

(b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on note γ_n le cardinal de l'ensemble des points $x \in I$ où $f^{\circ n} - c_0$ change de signe. Montrer que $\gamma_n \leqslant 2^n$.

(c) En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\Gamma_f(z)$ définie par

$$\Gamma_f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \gamma_n \cdot z^n$$

est supérieur ou égal à $1/2$.

(d) Etablir que l'égalité suivante est valide sur le disque $D(0, 1/2)$:

$$\Theta_b - \Theta_a = 2\Delta_f \cdot \Gamma_f.$$

4. **Le nombre de plis.** On considère finalement la série entière $\Lambda_f(z)$ définie par

$$\Lambda_f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda(f^{\circ n}) \cdot z^n.$$

(a) Montrer que le rayon de convergence de Λ_f est $R_f = \exp\big(-h(f)\big)$ où

$$h(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \lambda(f^{\circ n}) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \log \lambda(f^{\circ n})$$

est l'entropie de f. En déduire que $R_f \geqslant 1/2$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$\lambda(f^{\circ n}) = 1 + \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m.$$

(c) En déduire que si $|z| < R_f$, on a

$$\Lambda_f(z) = \frac{z}{(1-z)^2 \Delta_f(z)} + \frac{z}{1-z}.$$

5. **Un exemple.** On va déterminer l'entropie du polynôme $f(x) = x^2 - 7/4$. Cette application a trois points périodiques de période 3 qui forment un cycle pour f :

$$\alpha_0 \overset{f}{\mapsto} \alpha_1 \overset{f}{\mapsto} \alpha_2 \overset{f}{\mapsto} \alpha_0.$$

Les points α_i sont les trois racines du polynôme $8\alpha^3 + 4\alpha^2 - 18\alpha - 1 = 0$ avec $\alpha_0 \sim -0.0549\ldots$, $\alpha_1 \simeq -1.7469\ldots$ et $\alpha_2 \simeq 1.3019\ldots$ De plus, en posant $c_0 = 0$, $c_1 = f(0) = -7/4$ et $c_2 = f(-7/4) = 21/16$, on a

$$f\big([\alpha_0, -\alpha_0]\big) = [c_1, \alpha_1], \quad f\big([c_1, \alpha_1]\big) = [\alpha_2, c_2] \quad \text{et} \quad f\big([\alpha_2, c_2]\big) \subset [\alpha_0, 0[\,.$$

(a) Donner une expression explicite de $\Delta_f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R_f$.

(b) En déduire que si $|z| < R_f$, on a

$$\Lambda_f(z) = \frac{2z}{(1-z)(1-z-z^2)}.$$

(c) Déterminer le rayon de convergence de Λ_f (on pourra utiliser une décomposition en éléments simples) et en déduire que

$$h(f) = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(d) Déterminer une expression de $\lambda(f^{\circ n})$ en fonction de n.