**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

**CONCOURS D'ADMISSION 2016** **FILIÈRE MPI**

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - D - (U)

*Corrigé par Erwan Biland et Denis Pétrequin*

## I

Notation : Soit $(V, E)$ un graphe et $x \in V$, on notera $E(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ l'ensemble des voisins d'un sommet $x$ dans le graphe.

**1. Montrer que $T_G$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^V$ est que pour tout $f \in \mathbb{R}^V, q_G(f) = \cdots$**

L'application $T_G$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^V$ de manière claire. Montrons qu'il est symétrique. En effet, pour tout $f, g \in \mathbb{R}^V$,

$$\begin{aligned} < T_G f, g > &= \sum_{x\in V} (T_G f)(x) g(x) \\ &= \sum_{x\in V} \sum_{y\in E(x)} (f(x) - f(y)).g(x) \\ &= \sum_{(x,y)\in E} f(x)g(x) - \sum_{(x,y)\in E} f(y)g(x) \end{aligned}$$

Comme le graphe est non orienté (c'est-à-dire que si $(x, y) \in E$ alors $(y, x) \in E$),

$$\sum_{(x,y)\in E} f(y)g(x) = \sum_{(x,y)\in E} g(y)f(x).$$

On en déduit que

$$< T_G f, g >= \sum_{(x,y)\in E} g(x)f(x) - \sum_{(x,y)\in E} g(y)f(x) =< f, T_G g > .$$

On a bien montré que $\boxed{T_G \text{ est symétrique}}$.

Maintenant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} (f(x) - f(y))^2 &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} f(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} f(y)^2 - \sum_{(x,y)\in E} f(x)f(y) \\ &= \sum_{(x,y)\in E} f(x)^2 - \sum_{(x,y)\in E} f(x)f(y) \text{ car si } (x, y) \in E \text{ alors } (y, x) \in E \\ &= < T_G f, f >= q_G(f). \end{aligned}$$

**2.a Montrer que pour tout $f \in \mathbb{R}^V$ on a : $q_G(f) = \cdots$**

Soit $f \in \mathbb{R}^V$ de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ où $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $T_G$,

$$q_G(f) =< T_G f, f >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i f_j < T_G e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i f_j \lambda_i < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2$$

car la base $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est orthonormée.
En particulier, si on applique cela à $e_1$, on obtient $q_G(e_1) = \lambda_1$ or $q_G$ ne prend que des valeurs positives d'après la formule obtenue en 1. donc $\boxed{\lambda_1 \geq 0}$.

**2.b Montrer que pour tout** $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\lambda_k = \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f)$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $f \in F_k \cap S$. La fonction $f$ admet donc une décomposition de la forme $f = \sum_{i=k}^{n} f_i e_i$. Dès lors,

$$q_G(f) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i f_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} f_i^2 = \lambda_k ||f||^2 = \lambda_k$$

car pour tout $i \geq k$, $\lambda_i \geq \lambda_k$. On en déduit que $\lambda_k$ est **un** minorant de l'ensemble $\{q_G(f) \mid f \in F_k \cap S\}$. Maintenant, dans le cas de la fonction $e_k \in F_k \cap S$, on trouve $q_G(e_k) = \lambda_k$ donc $\boxed{\lambda_k = \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f)}$.

De plus, pour tout $f \in F_k$,

- Si $f = 0$ alors $q_G(f) = 0 \geq 0$
- Si $f \neq 0$, on peut poser $u = \frac{f}{||f||} \in F_k \cap S$. D'après ce qui précède, $q_G(u) \geq \lambda_k$ et donc

$$q_G(f) =< ||f|| T_G u, ||f|| u >= ||f||^2 q_G(u) \geq \lambda_k ||f||^2.$$

**2.c Montrer que pour tout** $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\lambda_k = \sup_{W \in \mathcal{W}_k} \left( \inf_{f \in W \cap S} q_G(f) \right)$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'espace vectoriel $F_k$ est de dimension $n - (k-1) = n - k + 1$. Pour tout $W \in \mathcal{W}_k$, d'après la formule de Grassman,

$$\dim(W \cap F_k) = \dim F_k + \dim W - \dim(F + W) \geq (n - k + 1) + k - n = 1$$

car $F + W \subset V$ et donc $\dim(F + W) \leq n$. On en déduit qu'il existe un vecteur $f_0$ non nul dans $W \cap F_k$ que l'on peut même supposer unitaire. De ce fait $\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \geq q_G(f_0) \geq \lambda_k$ car $f_0 \in F_k$.

Ceci étant vrai pour tout $W \in \mathcal{W}_k$, on en déduit que

$$\lambda_k \leq \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left( \sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right).$$

Cependant, pour $W_0 = \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_k$ qui est de dimension $k$ et $f = \sum_{i=1}^{k} f_i e_i \in W_0 \cap S$,

$$q_G(f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} f_i^2 = \lambda_k$$

de manière similaire à 2.b. On en déduit alors que $\sup_{f \in W_0 \cap S} q_G(f) \leq \lambda_k$ et donc que

$$\lambda_k = \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left( \sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right).$$

*Remarque : C'est le théorème de Courant-Fischer.*

**3.a Montrer que le noyau de $T_G$ est engendré par la fonction constante égale à $1$.**

On veut montrer que si $G$ est connexe alors $\ker T_G$ est constitué des fonctions constantes.

- On remarque pour commencer que si $f$ est constante alors $T_G f$ est la fonction nulle de manière évidente.

- Réciproquement, soit $f$ telle que $T_G f = 0$, on a alors en particulier que $q_G(f) = 0$ et donc que pour tout $(x, y) \in V^2$, si $(x, y) \in E$ alors $f(x) - f(y) = 0$ et donc $f(x) = f(y)$. Maintenant soit $x$ et $y$ deux sommets du graphe, comme $G$ est connexe, il existe un chemin $(x_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ avec $x_0 = x$, $x_k = y$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f(x_i) = f(x_{i+1})$ car $(x_i, x_{i+1})$ est une arête du graphe et donc $f(x) = f(y)$. La fonction est bien une fonction constante.

**3.b Calculer $\lambda_1$ et montrer l'inégalité $\lambda_2 > 0$.**

On vient de voir que $T_G$ a un noyau non trivial de dimension 1 donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$.

**4.a Montrer que toutes les valeurs propres de $T_G$ sont inférieures à $2d_G$.**

Soit $\lambda$ une valeur propre de $T_G$ et $f$ un vecteur propre (non nul) associé à $f$. On considère $x \in V$ tel que $|f(x)|$ soit maximal.

$$\begin{aligned}
|\lambda f(x)| = |(T_G f)(x)| &= \left| \sum_{y \in E(x)} (f(x) - f(y)) \right| \\
&\leq \sum_{y \in E(x)} |f(x)| + |f(y)| \\
&\leq \sum_{y \in E(x)} 2|f(x)| \text{ car } |f(y)| \leq |f(x)| \\
&\leq 2d_G |f(x)| \text{ car } |E(x)| \leq d_G \text{ par définition}
\end{aligned}$$

Comme $|f(x)| \neq 0$, on obtient $\lambda \leq |\lambda| \leq 2d_G$.

**4.b Montrer que si $G$ est biparti et régulier alors $2d_G$ est valeur propre de $T_G$.**

On suppose que $G$ est biparti et régulier et on note $A, B$ deux parties de $V$ telles que $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$ et $E \subset (A \times B) \cup (B \times A)$. Si on considère la fonction $f$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Pour $x \in A$,

$$(T_G f)(x) = \sum_{y \in E(x)} (f(x) - f(y)) = \sum_{y \in E(x)} 1 - (-1) = 2d_G$$

car $E(x) \subset B$ et que $|E(x)| = d_G$. De même, pour $x \in B$, $(T_G f)(x) = -2d_G$. Finalement $f$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2d_G$.

**4.c Prouver que si $2d_G$ est valeur propre de $T_G$ alors $G$ est régulier et biparti.**

On suppose réciproquement que $2d_G$ est une valeur propre de $T_G$. Soit $f$ un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre $2d_G$ et $x_0 \in V$ tel que $|f(x_0)|$ soit maximal. On est donc dans le cas d'égalité du calcul de 4.a ce qui permet d'affirmer successivement en remontant les inégalités que $|E(x_0)| = d_G$, que pour tout $y \in E(x_0)$, $|f(x_0)| = |f(y)|$ et que $f(y)$ est du signe opposé à celui de $f(x_0)$.

De ce fait, en utilisant que le graphe $G$ est connexe et en considérant un chemin de $x_0$ vers n'importe quel sommet $y$, on montre que $|f|$ est constante sur le graphe et donc que tout ce qui précède s'applique à tout sommet du graphe.

En particulier, pour tout $x$ de $V$, $|E(x)| = d_G$ donc le graphe est régulier.

Ensuite, en posant $A = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$ et $B = \{x \in V \mid f(x) < 0\}$, on a bien $A \cup B = V$ et $A \cap B = \emptyset$. De plus si $(x, y) \in E$ alors $f(x)$ et $f(y)$ sont de signe opposés donc $(x, y) \in A \times B \cup B \times A$. $\boxed{\text{Le graphe est bien biparti}}$.

**5.a Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda'_k \leq \lambda_k$.**

Soit $G' = (V, E')$ un graphe vérifiant $E' \subset E$. Pour tout $f \in \mathbb{R}^V$,

$$q_{G'}(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E'} (f(x) - f(y))^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} (f(x) - f(y))^2 = q_G(f)$$

De ce fait, en utilisant 2.c, on obtient pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\lambda'_k = \inf_{W\in\mathcal{W}_k} \left( \sup_{f\in W\cap S} q_{G'}(f) \right) \leq \inf_{W\in\mathcal{W}_k} \left( \sup_{f\in W\cap S} q_G(f) \right) = \lambda_k.$$

**5.b Calculer les valeurs propres de $T_{K_n}$. En déduire que les valeurs propres de $T_G$ sont inférieures ou égales à $|V|$**

Soit $K_n$ le graphe complet défini par $V = [\![1, n]\!]$ et $E = \{(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \neq j\}$. On cherche les valeurs propres de $T_{K_n}$.

Pour cela on exhibe la matrice de $T_{K_n}$ dans la base $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ où

$$f_i : j \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(T_{K_n} f_i)(k) = \sum_{j\in E(k)} f_i(k) - f_i(j) = \sum_{j\neq k} f_i(k) - f_i(j).$$

Donc si $i \neq k$, $(T_{K_n} f_i)(k) = -1$ et si $i = k$, $(T_{K_n} f_i)(k) = (n - 1)$.

La matrice de $T_{K_n}$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} (n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & (n-1) & -1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & (n-1) \end{pmatrix} = nI_n - B$$

où $B$ est la matrice de rang 1 ne comportant que des 1. En particulier, $n$ est une valeur propre de $T_{K_n}$ et l'espace propre associé est de dimension $(n - 1)$ car $B$ est de rang 1. La dernière valeur propre de $A$ est 0 car $K_n$ est connexe (3.a). Finalement $\boxed{\text{le spectre de } T_{K_n} \text{ est } \{0, n\}}$.

Maintenant, tout graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe du graphe complet $K_n$ à $n = |V|$ sommets (en définissant les sommets de $K_n$ comme les éléments de $V$ au lieu de $[\![1, n]\!]$). Donc, en utilisant 5.a, on obtient que toutes les valeurs propres de $T_G$ sont inférieures ou égales à $n = |V|$.

# II

**1.a Montrer que $\mathcal{A}_3$ est engendré par le cycle (123).**

Notons $c = (123)$. On sait que $\mathcal{A}_3 = \{\mathrm{Id}, (123), (132)\} = \{c^0, c^1, c^2\}$. Ainsi tout élément de $\mathcal{A}_3$ est une puissance du cycle $c$, ce qui prouve que ce cycle engendre $\mathcal{A}_3$.

**1.b Montrer que $\mathcal{A}_4$ est engendré par les éléments (123) et (12)(34).**

Notons $c = (123)$ et $b = (12)(34)$. Soit $\sigma$ un élément quelconque de $\mathcal{A}_4$. On définit $\sigma' \in \mathcal{A}_4$ en posant $\sigma' = \sigma$ si $\sigma(4) = 4$, $\sigma' = b\sigma$ si $\sigma(4) = 3$, $\sigma' = bc\sigma$ si $\sigma(4) = 2$ et $\sigma' = bc^2\sigma$ si $\sigma(4) = 1$. Alors, dans tous les cas, $\sigma'(4) = 4$ donc $\sigma'$ induit une permutation paire de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Il résulte alors de la question 1.a que $\sigma'$ est une puissance de $c$. On peut donc écrire $\sigma$ comme un produit de puissances de $b$ et $c$. Ceci prouve que les éléments $b$ et $c$ engendrent $\mathcal{A}_4$.

**1.c Montrer que $\mathcal{A}_5$ est engendré par les éléments $a = (12345)$ et $b = (12)(34)$**

La seule difficulté de cette question (mais elle n'est pas mince) est d'écrire l'élément $c = (123)$ comme produit de puissances de $a$ et $b$. On calcule $ab = (135)$ et $ba = (245)$. On trouve alors, par conjugaison, $(ba)(ab)(ba)^{-1} = (132)$ puis $[(ba)(ab)(ba)^{-1}]^2 = (123)$.

Soit alors $\sigma$ un élément quelconque de $\mathcal{A}_5$. En posant $\sigma' = a^k\sigma$ pour un entier $k$ bien choisi, on obtient $\sigma' \in \mathcal{A}_5$ tel que $\sigma'(5) = 5$. Alors $\sigma'$ induit une permutation paire de $\{1, 2, 3, 4\}$ donc, d'après la question 1.b, $\sigma'$ peut s'écrire comme un produit de puissances de $b$ et $c$. On obtient alors $\sigma$ comme un produit de puissances de $a$, $b$ et $c$, c'est-à-dire de $a$ et $b$ d'après l'écriture de $c$ obtenu plus haut. Ainsi les éléments $a$ et $b$ engendrent $\mathcal{A}_5$.

**2.a Montrer que $G$ est un graphe connexe et régulier.**

Montrons d'abord la connexité. On note $A = \{a, a^{-1}, b\}$. Soient $g$ et $h$ des éléments de $V = \mathcal{A}_5$. On a $g^{-1}h \in \mathcal{A}_5$ donc, d'après la question 1.c, il existe des éléments $u_1, ..., u_k \in A$ tels que $g^{-1}h = u_1u_2...u_k$. Pour $i \in [\![0, k]\!]$, notons $x_i = gu_1...u_i$. En particulier, $x_0 = g$, $x_k = h$ et, pour $i \in [\![1, k]\!]$, $(x_{i-1})^{-1}x_i = u_i \in A$. Les sommets $(x_0, ...x_k)$ forment donc un chemin de longueur $k$ dans le graphe $G$, qui relie les sommets $g$ et $h$. Ainsi le graphe $G$ est connexe.

La régularité est immédiate ; de chaque sommet $g$ partent exactement trois arêtes, qui le relient aux sommets $ga$, $ga^{-1}$ et $gb$. Tous les sommets de $G$ sont donc de valence 3.

**2.b Montrer que $L_g$ est une isométrie de $\mathbb{R}^V$ qui vérifie les identités...**

Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^V$, on a $\|L_gf\|^2 = \sum_{x\in\mathcal{A}_5} f(g^{-1}x)^2 = \sum_{y\in\mathcal{A}_5} f(y)^2 = \|f\|^2$, en faisant le changement de variable bijectif $y = g^{-1}x$. Donc $L_g$ est une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^V$.

Pour $g, h \in \mathcal{A}_5$, $f \in \mathbb{R}^V$ et $x \in \mathcal{A}_5$, on a $L_gL_hf(x) = L_hf(g^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = f((gh)^{-1}x) = L_{gh}f(x)$. Donc $L_g \circ L_h = L_{gh}$.

Pour $g \in \mathcal{A}_5$, $f \in \mathbb{R}^V$ et $x \in \mathcal{A}_5$, on notera $E(x) = \{y \in \mathcal{A}_5 \,|\, (x, y) \in E\}$. On a $L_gT_Gf(x) = T_Gf(g^{-1}x) = \sum_{y\in E(g^{-1}x)}[f(g^{-1}x) - f(y)]$. On fait le changement de variable bijectif $z = gy$, en remarquant que, par définition des arêtes dans le graphe $G$, on a $y \in E(g^{-1}x) \Leftrightarrow gy \in E(x)$. On obtient $L_gT_Gf(x) = \sum_{z\in E(x)}[f(g^{-1}x) - f(g^{-1}z)] = \sum_{z\in E(x)}[L_gf(x) - L_gf(z)] = T_GL_gf(x)$. Donc $L_g \circ T_G = T_G \circ L_g$.

**2.c En déduire que toute valeur propre non nulle de $T_G$ est de multiplicité au moins 3.**

Soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de l'endomorphisme $T_G$, et $E_\lambda \subseteq \mathbb{R}^V$ le sous-espace propre associé. Comme les endomorphismes $L_g$ et $T_G$ commutent, on sait que, pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, l'isométrie $L_g$ stabilise le sous-espace propre $E_\lambda$, et induit donc une isométrie $\tilde{L}_g$ de $E_\lambda$. D'après la première identité de la question 2.b, l'application $\mathcal{A}_5 \to O(E_\lambda)$, $g \mapsto \tilde{L}_g$, est un morphisme de groupes.

Raisonnons d'abord par l'absurde en supposant ce morphisme trivial, c'est-à-dire que, pour tout $f \in E_\lambda$ et tout $g \in \mathcal{A}_5$, $\tilde{L}_g f = f$. Alors on obtient $f(g) = \tilde{L}_g f(g) = f(g^{-1}g) = f(1_{\mathcal{A}_5})$. La fonction $f$ est donc constante sur l'ensemble $\mathcal{A}_5$ des sommets du graphe $G$. Mais alors, d'après la question I-3.a, on obtient $E_\lambda \subseteq \ker(T_G)$, et donc $\lambda = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$. Il existe donc $g \in \mathcal{A}_5$ tel que $\tilde{L}_g \neq \mathrm{Id}_{E_\lambda}$.

*La fin de la question se traiterait aisément si l'on savait que $\mathcal{A}_5$ est un groupe simple non abélien. Mais il nous faut ici travailler «à la main».*

Raisonnons de nouveau par l'absurde en supposant $\dim E_\lambda = 1$. Alors, pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, $\tilde{L}_g = \pm \mathrm{Id}_{E_\lambda}$. Comme $a^5 = 1$, on a $(\tilde{L}_a)^5 = \mathrm{Id}$ donc $\tilde{L}_a = \mathrm{Id}$. De même, comme $(ab)^3 = 1$ (on l'a calculé à la question 1.c), on a $\tilde{L}_{ab} = \mathrm{Id}$. Mais alors $\tilde{L}_b = (\tilde{L}_a)^{-1}\tilde{L}_{ab} = \mathrm{Id}$. Or les éléments $a$ et $b$ engendrent le groupe $\mathcal{A}_5$, donc le morphisme $g \mapsto \tilde{L}_g$ est trivial, ce qui contredit le paragraphe précédent. Ainsi $\dim E_\lambda \geqslant 2$.

Raisonnons encore par l'absurde en supposant $\dim E_\lambda = 2$. Pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, notons $\ell(g) = \det(\tilde{L}_g)$. Par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, le morphisme de groupe $\ell : \mathcal{A}_5 \to \{\pm 1\}$ est trivial. Donc, pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, l'isométrie plane $\tilde{L}_g$ est une rotation. En particulier, les $\tilde{L}_g$ commutent. On calcule alors, d'une part, $(\tilde{L}_a\tilde{L}_b)^6 = (\tilde{L}_{ab})^6 = \tilde{L}_{(ab)^6} = \mathrm{Id}$ car $(ab)^3 = 1$. Et, d'autre part, $(\tilde{L}_a\tilde{L}_b)^6 = (\tilde{L}_a)^6(\tilde{L}_b)^6 = \tilde{L}_{a^6}\tilde{L}_{b^6} = \tilde{L}_a$ car $a^5 = 1$ et $b^2 = 1$. Donc $\tilde{L}_a = \mathrm{Id}$. En calculant $(\tilde{L}_a\tilde{L}_b)^3$ de deux façons différentes, on trouve alors $\tilde{L}_b = \mathrm{Id}$. Comme précédemment, on en déduit que le morphisme $g \mapsto \tilde{L}_g$ est trivial, ce qui est une contradiction. Ainsi $\dim E_\lambda \geqslant 3$.

**3.a Montrer que, pour tout $g \in \mathcal{A}_5$, l'espace $F$ est stable par $\rho(g)$.**
**Montrer que la famille $(\tilde{\rho}(g))_{g\in\mathcal{A}_5}$ engendre linéairement $\mathrm{End}(F)$.**

Soit $g \in \mathcal{A}_5$ et $x = (x_1, \ldots, x_5) \in F$. Notons $\rho(g)(x) = (y_1, \ldots, y_5)$. Alors les $y_i$ sont une permutation des $x_i$, donc $\sum_{i=1}^5 y_i = \sum_{i=1}^5 x_i = 0$ et $\rho(g)(x)$ est dans $F$. Ceci prouve que $F$ est stable par $\rho(g)$.

*L'action du groupe $\mathcal{A}_5$ sur l'espace $F$ est la représentation de degré 4 «naturelle» du groupe $\mathcal{A}_5$. Cette représentation étant absolument irréductible (c'est-à-dire qu'elle reste irréductible si on étend les scalaires à un corps algébriquement clos), un théorème dû à Burnside affirme que l'image du groupe $\mathcal{A}_5$ dans l'algèbre $\mathrm{End}(F)$ engendre linéairement cette algèbre. Il s'agit ici de démontrer ce résultat dans un cas particulier. La solution que nous proposons est inspirée de techniques de «moyennisation» classiques en théorie des représentations de groupes finis. Il était cependant possible de traiter cette question «à la main» en écrivant matriciellement les éléments $\tilde{\rho}(a)$, $\tilde{\rho}(b)$ et $\tilde{\rho}(c)$ et en bricolant un peu...*

Notons $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Pour $g \in \mathcal{A}_5$ et $i \in [\![1,5]\!]$, on calcule $\rho(g)(e_i) = e_{g(i)}$. Pour $i, j \in [\![1,5]\!]$, notons $A(i,j) = \{g \in \mathcal{A}_5 \mid g(i) = j\}$. L'ensemble $A(i,j)$ contient 12 permutations et, si on choisit $k \neq i$ et $\ell \neq j$ dans $[\![1,5]\!]$, exactement 3 éléments de $A(i,j)$ envoient $k$ sur $\ell$.

Posons $\alpha_{i,j} = \frac{1}{12}\sum_{g\in A(i,j)} \rho(g)$. Alors on obtient $\alpha_{i,j}(e_i) = e_j$ et, pour $k \neq i$, $\alpha_{i,j}(e_k) = \frac{1}{4}\sum_{\ell\neq j} e_\ell$. Posons, pour $i, j \in [\![1,4]\!]$, $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j} - \alpha_{i,5}$. Alors $\beta_{i,j}(e_i) = e_j - e_5$ et, pour $k \neq i$, $\beta_{i,j}(e_k) = \frac{1}{4}\sum_{\ell\neq j} e_\ell - \frac{1}{4}\sum_{\ell\neq 5} e_\ell = -\frac{1}{4}(e_j - e_5)$.

Les $\beta_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\rho(g)$ donc stabilisent le sous-espace $F$. Notons $\tilde{\beta}_{i,j}$ l'endomorphisme de $F$ induit par $\beta_{i,j}$. Pour $k \in [\![1,4]\!]$, notons $e'_i = e_i - e_5$, de sorte que $(e'_1, ..., e'_4)$ est une base de $F$. D'après les calculs précédents, pour $i, j, k \in [\![1,4]\!]$, on a $\tilde{\beta}_{i,j}(e'_k) = \frac{5}{4}\,\delta_{i,k}\, e'_j$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker, valant 1 si $i = k$ et 0 si $i \neq k$.

On constate alors que les $\tilde{\beta}_{i,j}$ forment une base de $\mathrm{End}(F)$ ; à une constante près, il s'agit de la base de $\mathrm{End}(F)$ naturellement associée à la base $(e'_1, ..., e'_4)$ de $F$. Comme les $\tilde{\beta}_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\tilde{\rho}(g)$, il suit que la famille $(\tilde{\rho}(g))_{g\in\mathcal{A}_5}$ engendre linéairement $\mathrm{End}(F)$.

**3.b Déterminer à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $M \in \mathrm{End}(F)$ tel que...**

Pour plus de clarté, on note $f_M$ la fonction que l'énoncé note $f$. Pour $x \in \mathcal{A}_5$, notons toujours $A = \{a, a^{-1}, b\}$ et $E(x) = \{y \in \mathcal{A}_5 \mid (x,y) \in E\} = \{xu ; u \in A\}$. On calcule :

$$\begin{aligned} T_G f_M(x) &= \textstyle\sum_{y\in E(x)} [f_M(x) - f_M(y)] = 3f_M(x) - f_M(xa) - f_M(xa^{-1}) - f_M(xb) \\ &= 3\operatorname{tr}(\tilde\rho(x)M) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(xa)M) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(xa^{-1})M) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(xb)M) \\ &= 3\operatorname{tr}(M\tilde\rho(x)) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(a)M\tilde\rho(x)) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(a^{-1})M\tilde\rho(x)) - \operatorname{tr}(\tilde\rho(b)M\tilde\rho(x)). \end{aligned}$$

par les propriétés $\tilde\rho(gh) = \tilde\rho(g)\tilde\rho(h)$ et $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$.

Finalement, en posant $\tilde\alpha = 3\,\mathrm{Id}_F - \tilde\rho(a) - \tilde\rho(a^{-1}) - \tilde\rho(b)$, on trouve $T_G f_M(x) = \operatorname{tr}(\tilde\alpha M\tilde\rho(x))$.

Or, si on considère dans $\mathbb{R}^5$ l'endomorphisme $\alpha = 3\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^5} - \rho(a) - \rho(a^{-1}) - \rho(b)$, on constate que la matrice de $\alpha$ dans la base canonique $(e_1, ..., e_5)$ est la matrice $A$ proposée dans l'énoncé. Cette matrice est symétrique donc $\alpha$ est diagonalisable dans une base orthonormale. De plus, le noyau de $\alpha$ est, d'après sa matrice, la droite $\mathbb{R}(e_1 + ... + e_5)$, c'est-à-dire l'orthogonal de $F$. Donc les valeurs propre de l'endomorphisme induit $\tilde\alpha \in \mathrm{End}(F)$ sont exactement les valeurs propres non nulles de la matrice $A$, à savoir 2, 5 et $\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$.

Raisonnons alors par équivalence, en supposant $M \neq 0$ et en notant $(\star)$ la proposition «$f_M$ est une fonction propre de $T_G$ pour la valeur propre $\lambda$».

$$\begin{aligned} (\star) &\Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathcal{A}_5,\ T_G f_M(x) - \lambda f_M(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathcal{A}_5,\ \operatorname{tr}[(\tilde\alpha - \lambda\,\mathrm{Id}_F)M\tilde\rho(x)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } X \in \mathrm{End}(F),\ \operatorname{tr}[(\tilde\alpha - \lambda\,\mathrm{Id}_F)MX] = 0 \qquad \text{(car les } \tilde\rho(x) \text{ engendrent } \mathrm{End}(F)) \\ &\Leftrightarrow (\tilde\alpha - \lambda\,\mathrm{Id}_F)M = 0 \qquad \text{(car } X, Y \mapsto \operatorname{tr}(XY) \text{ est un produit scalaire sur } \mathrm{End}(F)) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \text{ est une valeur propre de } \tilde\alpha \\ \operatorname{im}(M) \subseteq \ker(\tilde\alpha - \lambda\,\mathrm{Id}_F). \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $M \in \mathrm{End}(F)$ tel que $f_M$ soit un vecteur propre de $T_G$ pour la valeur propre $\lambda$ si, et seulement si, $\lambda \in \{2, 5, \frac{7-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\}$.

**3.c Montrer que chacune des valeurs propres de la question précédente est de multiplicité au moins 4.**

Soit $\lambda$ une valeur propre de $\tilde\alpha$. D'après le polynôme caractéristique de la matrice $A$, $\lambda$ est une valeur propre simple. Comme $F$ est un espace vectoriel de dimension 4, le sous-espace $End_\lambda \subseteq \mathrm{End}(F)$ des endomorphismes $M$ dont l'image est contenue dans $\ker(\tilde\alpha - \lambda\,\mathrm{Id}_F)$ est de dimension 4. Or l'application $M \mapsto f_M$ est injective (car $X, Y \mapsto \operatorname{tr}(XY)$ est un produit scalaire sur $\mathrm{End}(F)$ et les $\tilde\rho(x)$ engendrent $\mathrm{End}(F)$, voir le raisonnement de la question précédente), et envoie $End_\lambda$ dans le sous-espace propre de $T_G$ associé à la valeur propre $\lambda$. Donc ce dernier sous-espace est de dimension au moins 4, et $\lambda$ est une valeur propre de $T_G$ de multiplicité au moins 4.

*Remarquons qu'on a alors trouvé, en comptant les multiplicités, 17 valeurs propres de $T_G$ qui en compte 60 au total. Il reste donc du travail...*

# III

**1.a Montrer que $B(A,0)=A$ et, si $|A|\leqslant \frac{1}{2}|V|$, on a $|B(A,1)|\geqslant (1+\frac{h_G}{d_G})|A|$.**

Pour $x,y\in V$, on a $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. Si $A$ est une partie de $V$, on en déduit :
$B(A,0)=\{x\in V \mid \exists y\in A,\ d(x,y)=0\}=\{x\in V\mid \exists y\in A,\ x=y\}=A$.

On a bien sûr $A=B(A,0)\subseteq B(A,1)$. Par définition, les éléments de $B(A,1)$ qui ne sont pas dans $A$ sont directement reliés à des éléments de $A$. On a donc une surjection $\varphi:\partial A\to B(A,1)\setminus A$, $(x,y)\mapsto y$. Le nombre d'antécédents de $y\in B(A,1)\setminus A$ par la fonction $\varphi$ est le nombre de sommets de $A$ auxquels $y$ est directement reliés, qui est majoré par la valence de $y$, donc par $d_G$. Ainsi $|\partial A|\leqslant d_G(|B(A,1)|-|A|)$, c'est-à-dire $|B(A,1)|\geqslant |A|+\frac{1}{d_G}|\partial A|$.

Si, de plus, on suppose $|A|\leqslant\frac{1}{2}|V|$, alors $|\partial A|\geqslant h_G|A|$, donc $|B(A,1)|\geqslant (1+\frac{h_G}{d_G})|A|$.

**1.b En déduire l'inégalité $\Delta_G\leqslant ...$**

Soit $A$ une partie de $V$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire de la question 0, on a $B(A,k+1)=B(B(A,k),1)$. De la question 1.a, on déduit par récurrence sur $k$ que $|B(A,k)|\geqslant \min\{(1+\frac{h_G}{d_G})^k|A|\,,\ \frac{1}{2}|V|\}$.

Fixons maintenant $k=\lfloor\frac{\ln(|V|/2)}{\ln(1+h_G/d_G)}\rfloor$. Pour $x\in V$, on a $|B(\{x\},k)|\geqslant\min\{(1+\frac{h_G}{d_G})^k\,,\ \frac{1}{2}|V|\}$.

- Si $|B(\{x\},k)|<\frac{1}{2}|V|$, alors d'après 1.b $|B(\{x\},k+1)|\geqslant(1+\frac{h_G}{d_G})|B(\{x\},k)|\geqslant(1+\frac{h_G}{d_G})^{k+1}>\frac{1}{2}|V|$ par définition de $k$.

- Si $\frac{1}{2}|V|\leqslant|B(\{x\},k)|<|V|$, par connexité du graphe, il existe au moins un sommet hors de $B(\{x\},k)$ qui est relié à un sommet de $B(\{x\},k)$, donc $|B(\{x\},k+1)|>|B(\{x\},k)|\geqslant\frac{1}{2}|V|$.

- Enfin, si $|B(\{x\},k)|=|V|$, alors $|B(\{x\},k+1)|=|B(\{x\},k)|=|V|>\frac{1}{2}|V|$, car $|V|>0$.

Pour $x,y\in V$ et $k$ l'entier fixé plus haut, on obtient alors $|B(\{x\},k+1)|+|B(\{y\},k+1)|>\frac{1}{2}|V|+\frac{1}{2}|V|=|V|$. Les boules $B(\{x\},k+1)$ et $B(\{y\},k+1)$ possèdent donc au moins un point d'intersection $z$, d'où $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)\leqslant 2k+2$. Ainsi $\Delta_G\leqslant 2k+2\leqslant\frac{2\ln(|V|/2)}{\ln(1+h_G/d_G)}+2$.

**2.a Montrer que la fonction $f$ est orthogonale au noyau de $T_G$ et vérifie $q_G(f)=...$**

Notons $\mathbf{1}\in\mathbb{R}^V$ la fonction constante de valeur 1. On calcule : $\langle\mathbf{1},f\rangle=\sum_{x\in V}f(x)=|A|\,b+|B|\,(-a)=ab-ba=0$. Donc $f$ est orthogonale à $\ker T_G=\mathbb{R}\mathbf{1}$.

Remarquons que $|\partial A|=|\partial B|$. Pour $(x,y)\in\partial A\sqcup\partial B$, on a $[f(x)-f(y)]^2=(a+b)^2$ et, pour $(x,y)\in E\setminus(\partial A\sqcup\partial B)$, on a $[f(x)-f(y)]^2$. On en déduit :
$q_G(f)=\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}[f(x)-f(y)]^2=|\partial A|(a+b)^2$.
Par ailleurs, $\|f\|^2=\sum_{x\in V}f(x)^2=|A|b^2+|B|a^2=ab(a+b)$, d'où $q_G(f)=\frac{(a+b)|\partial A|}{ab}\|f\|^2$.

**2.b En déduire l'inégalité $\lambda_2\leqslant 2h_G$.**

Avec les notations de la question I-2.b, on a $\lambda_2=\inf_{f\in F_2\cap S}q_G(f)=\inf_{f\in F_2\setminus\{0\}}\frac{q_G(f)}{\|f\|^2}$, car la fonction $q_G$ est homogène de degré 2. Or l'espace $F_2$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}\mathbf{1}=\ker(T_G)$, donc la fonction $f$ de la question 2.a est dans $F_2\setminus\{0\}$. On en déduit $\lambda_2\leqslant\frac{q_G(f)}{\|f\|^2}=\frac{(a+b)|\partial A|}{ab}=\frac{|\partial A|}{|A|}+\frac{|\partial B|}{|B|}$.
Le nombre $h_G$ est défini comme la borne inférieure d'un ensemble fini ; c'est donc un minimum. Il existe une partie $A$ de $V$ telle que $|A|\leqslant\frac{1}{2}|V|$ et $\frac{|\partial A|}{|A|}=h_G$. Soit $B$ le complémentaire de $A$ dans $V$. Alors $|B|\geqslant\frac{1}{2}|V|\geqslant|A|$ et $|\partial B|=|\partial A|$, donc $\frac{|\partial B|}{|B|}\leqslant\frac{|\partial A|}{|A|}=h_G$.

En appliquant à ces parties $A$ et $B$ l'inégalité $\lambda_2\leqslant\frac{|\partial A|}{|A|}+\frac{|\partial B|}{|B|}$, on obtient alors $\lambda_2\leqslant 2h_G$.

**3.a Montrer l'inégalité $S(f) \leqslant \sqrt{2d_G q_G(f)}\|f\|$.**

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^E$ du produit scalaire défini par $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} \varphi(x,y)\psi(x,y)$.

Soit $f \in \mathbb{R}^V$. On définit des fonctions $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^E$ en posant, pour $(x,y) \in E$, $\varphi(x,y) = |f(x) - f(y)|$ et $\psi(x,y) = |f(x) + f(y)|$. Alors, d'une part, $\langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}[f(x) - f(y)]^2 = q_G(f)$. D'autre part, grâce à l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, et à la symétrie de $E$, on a : $\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}[f(x)+f(y)]^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}[2f(x)^2+2f(y)^2] = 2\sum_{(x,y)\in E} f(x)^2$. Pour $x \in V$, il y a au plus $d_G$ éléments $y \in V$ tels que $(x,y) \in E$, d'où : $\langle \psi, \psi \rangle \leqslant 2\sum_{x\in V} d_G f(x)^2 = 2d_G\|f\|^2$.

Enfin, on a $\langle \varphi, \psi \rangle = S(f)$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz $\langle \varphi, \psi \rangle \leqslant \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle}$ devient alors précisément $S(f) \leqslant \sqrt{2d_G q_G(f)}\|f\|$.

**3.b Soit $f : V \to \mathbb{R}_+$ telle que $|f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)| \leqslant \frac{1}{2}|V|$. Montrer l'inégalité $S(f) \geqslant h_G\|f\|^2$.**

On note $V = \{x_1, ..., x_n\}$ de sorte que $f(x_1) \geqslant ... \geqslant f(x_n)$. On note $E^+ = \{(i,j) \in [\![1,n]\!] \mid i < j \text{ et } (x_i, x_j) \in E\}$. Pour $(i,j) \in E^+$, on a $f(x_i) \geqslant f(x_j)$ donc $|f(x_i)^2 - f(x_j)^2| = f(x_i)^2 - f(x_j)^2 = \sum_{i\leqslant k<j}[f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2]$ par télescopage.

Par symétrie de $E$, $S(f) = \sum_{(i,j)\in E^+} |f(x_i)^2 - f(x_j)^2| = \sum_{(i,j)\in E^+}\sum_{i\leqslant k<j}[f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2]$. En intervertissant les sommes, on est amené à étudier, pour $k$ fixé, l'ensemble des arêtes $(x_i, x_j) \in E$ telles que $i \leqslant k$ et $j > k$. Or cette dernière condition équivaut à $(x_i, x_j) \in \partial A_k$, où l'on note $A_k = \{x_1, ..., x_k\}$. Ainsi $S(f) = \sum_{1\leqslant k<n}\sum_{(x,y)\in\partial A_k}[f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2]$.

Pour $k > \frac{n}{2}$, on a par hypothèse $f(x_k) = f(x_{k+1})$ donc la deuxième somme est nulle. Pour $k \leqslant \frac{n}{2}$, il s'agit d'une somme de terme constant, dont le nombre de termes est $|\partial A_k|$. Or $|A_k| = k \leqslant \frac{1}{2}|V|$ donc $|\partial A_k| \leqslant h_G|A_k| = h_G k$.

On obtient $S(f) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n/2} h_G k[f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2] = h_G\sum_{1\leqslant k\leqslant n/2} f(x_k)^2$ par télescopage.

On a donc prouvé $S(f) \leqslant h_G\|f\|^2$.

**3.c En déduire l'inégalité $\lambda_2 \geqslant \frac{h_G^2}{2d_G}$.**

Soit $f \in \mathbb{R}^V$ un vecteur propre de l'endomorphisme $T_G$ pour la valeur propre $\lambda_2$. Comme $f$ est non nulle et orthogonale à la fonction constante $\mathbf{1}$, elle prend à la fois des valeurs strictement positives et strictement négatives. Notons $A = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$. Quitte à remplacer $f$ par son opposé, on peut supposer que $0 < |A| \leqslant \frac{1}{2}|V|$.

On définit alors $f^+ \in \mathbb{R}^V$ en posant $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, de sorte que $f^+$ vérifie les conditions de la question 3.b. On déduit des questions 3.a et 3.b que $\sqrt{2d_G q_G(f^+)}\|f^+\| \geqslant h_G\|f^+\|^2$, d'où $q_G(f^+) \geqslant \frac{h_G^2}{2d_G}\|f^+\|^2$.

Pour $x \in V$, on note comme précédemment $E(x) = \{y \in V \mid (x,y) \in E\}$. On calcule :

$$\begin{aligned} q_G(f^+) = \langle f^+, T_G f^+ \rangle &= \sum_{x\in E}\Big(f^+(x)\sum_{y\in E(x)}[f^+(x) - f^+(y)]\Big) \\ &= \sum_{x\in A}\Big(f(x)\sum_{y\in E(x)}[f(x) - f^+(y)]\Big) \qquad (\text{car } f^+(x) = f(x) \text{ si } x \in A \text{ et } = 0 \text{ si } x \notin A) \\ &\leqslant \sum_{x\in A}\Big(f(x)\sum_{y\in E(x)}[f(x) - f(y)]\Big) \qquad (\text{car } f^+(y) \geqslant f(y)) \\ &= \sum_{x\in A} f(x) T_G f(x) = \lambda_2\sum_{x\in A} f(x)^2 = \lambda_2\|f^+\|^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\lambda_2\|f^+\|^2 \geqslant \frac{h_G^2}{2d_G}\|f^+\|^2$ donc $\lambda_2 \geqslant \frac{h_G^2}{2d_G}$.

**4.a Montrer qu'on a l'égalité $\lambda_2 = \inf_{f\in S} Q(f)$.**

Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathcal{E}$. Soit $f \in \mathcal{E}^V$. Pour $x \in V$, notons $f_1(x), ..., f_p(x)$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base $(e_1, ..., e_p)$, de sorte que $f_i \in \mathbb{R}^V$. Alors :

$$f \in S \iff \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 = 1 \text{ et } \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ f_i \in F_2,$$

où $F_2$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^V$ défini à la question I-2.b.

Si $f \in S$, on calcule alors $Q(f) = \sum_{i=1}^p q_G(f_i) \geqslant \sum_{i=1}^p \lambda_2\|f_i\|^2 = \lambda_2$. Ainsi $\inf_{f\in S} Q(f) \geqslant \lambda_2$.

Soit maintenant $f_1 \in \mathbb{R}^V$ un vecteur propre unitaire de $T_G$ pour la valeur propre $\lambda_2$. Définissons $f \in \mathcal{E}^V$ en posant, pour $x \in V$, $f(x) = f_1(x)e_1$. Alors, comme $\|f_1\| = 1$ et $f_1 \in F_2$, on a $f \in S$. De plus, on a $Q(f) = q_G(f_1) = \lambda_2$. Ceci prouve que $\inf_{f\in S} Q(f) = \lambda_2$.

**4.b Montrer qu'il existe un plongement sphérique du graphe $K_4$ en dimension 3.**

Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3, et $f : [\![1,4]\!] \to \mathcal{E}$ une application telle que $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ soient les sommets d'un tétraèdre régulier inclus dans la sphère unité de $E$. Par exemple, dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_4)$ et du produit scalaire usuel, $\mathcal{E}$ pourrait être le sous-espace d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, avec $f(i) = \frac{\sqrt{3}}{6}(3\varepsilon_i - \sum_{j\neq i} \varepsilon_j)$. Pour $i \neq j$, l'angle des vecteurs $f(i)$ et $f(j)$ a toujours la même valeur $\theta = \arccos(-\frac{1}{3})$.

Soit $u : V \to \mathcal{E}$ définie par $u(i) = \cos\frac{\theta}{2} f(i)$. On a bien $0 < \|u(i)\| < 1$ et $\sum_{i=1}^4 \frac{u(i)}{\|u(i)\|} = 0$.

Soient $i \neq j$ deux éléments de $[\![1,4]\!]$, et $w$ un vecteur de $E$. Notons $w' = \alpha f(i) + \beta f(j)$ le projeté orthogonal de $w$ sur le plan engendré par $f(i)$ et $f(j)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda = \langle u(i), w - u(i)\rangle$ et $\mu = \langle u(j), w - u(j)\rangle$, c'est-à-dire que :

$$\alpha \cos\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta = \lambda + (\cos\frac{\theta}{2})^2 \quad \text{et} \quad \alpha\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \beta\cos\frac{\theta}{2} = \mu + (\cos\frac{\theta}{2})^2.$$

Après division par $\cos\frac{\theta}{2}$, on en déduit, par les formules de Cramer :

$\alpha = [\lambda - \mu\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)]/(1-\cos^2\theta)$ et $\beta = [-\lambda\cos\theta + \mu + \cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)]/(1-\cos^2\theta)$.

Supposons $w \in D(i) \cap D(j)$, c'est-à-dire $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $\|w\| = 1$. Comme $\cos\theta < 0$, on obtient alors $\alpha > \cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)/(1-\cos^2\theta) = 1/(2\cos\frac{\theta}{2})$ et, de même, $\beta > 1/(2\cos\frac{\theta}{2})$.

On calcule alors : $\|w\|^2 \geqslant \|w'\|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 > (2+2\cos\theta)/(2\cos\frac{\theta}{2})^2 = 1$.

Ceci contredit l'hypothèse $\|w\| = 1$. Les ensembles $D(i)$ et $D(j)$ sont donc disjoints.

Supposons maintenant $w \in \overline{D(i)} \cap \overline{D(j)}$, c'est-à-dire $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ et $\|w\| = 1$. En étudiant le cas d'égalité dans les inégalités précédentes, on trouve $w = w'$ et $\alpha = \beta = 1/(2\cos\frac{\theta}{2})$.

Les ensembles $\overline{D(i)}$ et $\overline{D(j)}$ ont donc un unique point d'intersection, ce qui est cohérent avec le fait que les sommets $i$ et $j$ sont reliés dans le graphe $K_4$. On a bien obtenu un plongement sphérique du graphe $K_4$.

**4.c Montrer que si $G$ admet un plongement sphérique en dimension 3 alors $\lambda_2 \leqslant 8d_G/|V|$.**

Soit $u : V \to \mathcal{E}$ un plongement sphérique du graphe $G$ dans un espace euclidien $E$ de dimension 3. Notons $\mathcal{S}$ la sphère unité de $E$. Pour $x \in V$, notons $f(x) = \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \in \mathcal{S}$. Alors l'ensemble $D(x)$ défini à la question 4.b est un disque sphérique de centre $f(x)$ et dont on notera $r(x)$ le rayon, c'est-à-dire la longueur d'une corde reliant le centre $f(x)$ à un point de la frontière de $D(x)$. L'aire d'un tel disque sphérique est alors $\mathcal{A}(D(x)) = \pi r(x)^2$.

Comme, par hypothèse, les disques ouverts $D(x)$, pour $x \in V$, sont deux à deux disjoints, on a $\sum_{x\in V} \mathcal{A}(D(x)) \leqslant \mathcal{A}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire $\sum_{x\in V} \pi r(x)^2 \leqslant 4\pi$, ou encore $\sum_{x\in V} r(x)^2 \leqslant 4$.

Pour toute arête $(x,y) \in E$, les disques fermés $\overline{D(x)}$ et $\overline{D(y)}$ possèdent un point d'intersection. Par inégalité triangulaire, on en déduit $\|f(x) - f(y)\|^2 \leqslant [r(x) + r(y)]^2 \leqslant 2r(x)^2 + 2r(y)^2$.

On calcule alors $Q(f) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} \|f(x) - f(y)\|^2 \leqslant \sum_{(x,y)\in E}[r(x)^2 + r(y)^2]$.

Par symétrie de $E$, on obtient : $Q(f) \leqslant 2\sum_{(x,y)\in E} r(x)^2 = 2\sum_{x\in V} \mathrm{val}(x) r(x)^2 \leqslant 2d_G \sum_{x\in V} r(x)^2$.

D'après le raisonnement géométrique ci-dessus, on a enfin $Q(f) \leqslant 8d_G$.

Or, par définition du plongement sphérique, $\sum_{x\in V} f(x) = 0$, donc on déduit de la question 4.a que $Q(f) \geqslant \lambda_2 \sum_{x\in V} \|f(x)\|^2 = \lambda_2|V|$. Il s'ensuit que $8d_G \geqslant \lambda_2|V|$, d'où $\lambda_2 \leqslant 8d_G/|V|$.

# IV

**1.a Montrer que pour tout $f, g \in \mathcal{H}_n$ on a $< \hat{f}, \hat{g} >= n^2 < f, g >$. En déduire que $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_n$ dans lui même.**

Soit $f, g \in \mathcal{H}_n$, on a

$$\begin{aligned}
< \hat{f}, \hat{g} > &= \sum_{x \in H_n} \overline{\hat{f}(x)} \hat{g}(x) \\
&= \sum_{x \in H_n} \left( \sum_{y \in H_n} \overline{f(y)} \omega^{x.y} \right) . \left( \sum_{y' \in H_n} g(y') \omega^{-x.y'} \right) \\
&= \sum_{(y,y') \in H_n^2} \overline{f(y)} g(y') \left( \sum_{x \in H_n} \omega^{x.y - x.y'} \right)
\end{aligned}$$

Calculons $\displaystyle\sum_{x \in H_n} \omega^{x.z}$ où $z = (\alpha, \beta) \in H_n$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in H_n} \omega^{x.z} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \omega^{k\alpha + k'\beta} \\
&= \left( \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\alpha)^k \right) \times \left( \sum_{k'=0}^{n-1} (\omega^\beta)^{k'} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant alors que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\alpha)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 0 \\ n & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

on obtient que

$$\sum_{x \in H_n} \omega^{x.z} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0 \\ n^2 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Finalement, dans la somme qui définit $< \hat{f}, \hat{g} >$ on ne garde que les termes où $y - y' = 0$ c'est-à-dire $y = y'$. Cela donne,

$$< \hat{f}, \hat{g} >= n^2 \sum_{y \in H_n} \overline{f(y)} g(y) = n^2 < f, g > .$$

Maintenant, l'application $f \mapsto \hat{f}$ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{H}_n$ De plus, soit $f \in \mathcal{H}_n$ tel que $\hat{f} = 0$ alors, d'après ce qui précède, $< f, f >= \dfrac{1}{n^2} < \hat{f}, \hat{f} >= 0$. Cela implique que $\displaystyle\sum_{x \in H_n} |f(x)|^2 = 0$ et donc que $f = 0$. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est donc un endomorphisme injectif.

Comme $\mathcal{H}_n$ est de dimension finie (il est de dimension $n^2$), $\boxed{\text{L'application } f \mapsto \hat{f} \text{ est un isomorphisme}}$.

**1.b Montrer que $\hat{g}(x) = \omega^{(A^{-1}b).x} \hat{f}((A^{-1})^T x)$.**

Soit $f \in \mathcal{H}_n$, $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^2$.

$$\hat{g}(x) = \sum_{y \in H_n} g(y) \omega^{-x.y} = \sum_{y \in H_n} f(Ay + b) \omega^{-x.y}.$$

On remarque que l'application $y \mapsto z = Ay + b$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ est une bijection de réciproque $z \mapsto A^{-1}.(z - b)$ car $A$ étant de déterminant $\pm 1$, alors $A^{-1}$ est encore à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Elle induit alors une bijection de $H_n$ dans lui même.

On peut donc modifier la sommation et obtenir

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \sum_{y\in H_n} f(Ay+b)\omega^{-x.y} \\
&= \sum_{z\in H_n} f(z)\omega^{-x.A^{-1}(z-b)} \\
&= \omega^{x.A^{-1}b} \sum_{z\in H_n} f(z)\omega^{-x.A^{-1}z} \\
&= \omega^{x.A^{-1}b} \sum_{z\in H_n} f(z)\omega^{-(A^{-1})^T x.z} = \boxed{\omega^{(A^{-1}b).x}\hat{f}((A^{-1})^T x)}.
\end{aligned}$$

En effet, si on note $X$ et $Z$ les vecteurs colonnes représentants $x$ et $z$,

$$x.A^{-1}z = X^T A^{-1} Z = ((A^{-1})^T X)^T Z = (A^{-1})^T x.z$$

**1.c Montrer que $G$ est un graphe connexe et régulier et déterminer la deuxième valeur propre $\lambda_2$ de $T_G$ en fonction de $n$.**

Montrons d'abord que $G$ est connexe. Soit $(x, y) \in H_n^2$. On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Il est clair qu'il existe un chemin de $x = (x_1, x_2)$ vers $z = (x_1, y_2)$ en utilisant des arêtes verticales puis il existe un chemin de $z$ vers $y$ en utilisant des arêtes horizontales. $\boxed{\text{Le graphe est bien connexe}}$.

Le graphe est de plus régulier car pour tout $x \in H_n$, la valence de $x$ vaut 2 si $n = 2$ et 4 si $n > 2$.

Soit $y \in H_n$, on considère $\chi_y : x \mapsto \omega^{x.y}$. Commençons par calculer $\hat{\chi_y}$. Pour tout $x \in H_n$,

$$\hat{\chi_y}(x) = \sum_{z\in H_n} \chi_y(z)\omega^{-x.z} = \sum_{z\in H_n} \omega^{(y-x).z} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ n^2 & \text{si } x = y \end{cases}$$

en reprenant les calculs faits en 1.a

On cherche maintenant à déterminer les valeurs propres de $T_G$ (endomorphisme de $\mathbb{R}^V$). L'endomorphism étant diagonalisable, le spectre de l'endomorphisme analogue sur $\mathbb{C}^V$ est le même.

Pour tout $y \in H_n$ et tout $x \in H_n$,

$$(T_G\chi_y)(x) = \sum_{z\in E(x)} \chi_y(x) - \chi_y(z) = 4\chi_y(x) - \chi_y(x+e_1) - \chi_y(x-e_1) - \chi_y(x+e_2) - \chi_y(x-e_2)$$

où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

En appliquant alors 1.b avec $A = I_2$, on obtient que pour tout $x$ de $H_n$,

$$\widehat{(T_G\chi_y)}(x) = (4 - \omega^{e_1.x} - \omega^{-e_1.x} - \omega^{e_2.x} - \omega^{-e_2.x})\hat{\chi_y}(x)$$

or le terme de droite est égal à $(4 - \omega^{e_1.y} - \omega^{-e_1.y} - \omega^{e_2.y} - \omega^{-e_2.y})\hat{\chi_y}(x)$ car $\hat{\chi_y}(x)$ est nul si $y \neq x$.

Si on note alors $y = (\alpha, \beta)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
4 - \omega^{e_1.y} - \omega^{-e_1.y} - \omega^{e_2.y} - \omega^{-e_2.y} &= 4 - \omega^{\alpha} - \omega^{-\alpha} - \omega^{\beta} - \omega^{-\beta} \\
&= 4 - 2\cos\left(\frac{2\alpha\pi}{n}\right) - 2\cos\left(\frac{2\beta\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

On a donc $\widehat{(T_G\chi_y)} = u(\alpha,\beta)\hat{\chi}_y = \widehat{u(\alpha,\beta)\chi_y}$ en posant $u(\alpha,\beta) = 4 - 2\cos\left(\frac{2\alpha\pi}{n}\right) - 2\cos\left(\frac{2\beta\pi}{n}\right)$

Comme $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme, on obtient finalement que

$$T_G \chi_y = \left(4 - 2\cos(\frac{2\alpha\pi}{n}) - 2\cos(\frac{2\beta\pi}{n})\right)\chi_y.$$

Maintenant, la famille $(\chi_y)_{y\in H_n}$ est une base. En effet, c'est une famille libre car les $\hat{\chi_y}$ le sont et que $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme. De plus la famille contient $n^2$ vecteurs et $\dim \mathcal{H}_n = n^2$. On a donc trouvé une base de vecteurs propres.

On en déduit que la deuxième valeur propre $\lambda_2$ est obtenue en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (ou inversement). On a donc $\boxed{\lambda_2 = 2 - 2\cos(\frac{2\pi}{n}) = 4\sin^2(\frac{\pi}{n})}$.

**2.a Montrer que si $f$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle alors $\sum_{x\in H_n} f(x) = 0$.**

Soit $f$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ non nulle. On a $Tf = \lambda f$ et donc $\widehat{Tf} = \lambda\hat{f}$. En particulier

$$\sum_{x\in H_n} f(x) = \hat{f}(0) = \frac{1}{\lambda}\widehat{Tf}(0).$$

En utilisant alors 1.b,

$$\widehat{Tf}(0) = 4\hat{f}(0) - \hat{f}((T_1^{-1})^T 0) - \hat{f}((T_2^{-1})^T 0) - \hat{f}((T_1^{-1})^T 0) - \hat{f}((T_2^{-1})^T 0) = 0.$$

On a bien $\boxed{\sum_{x\in H_n} f(x) = 0}$.

**2.b Montrer que si la propriété $(T_1)$ est satisfaite alors toute valeur propre non nulle $\lambda$ de $T$ vérifie $|\lambda| \geq \frac{7}{20}$.**

Soit $f \in \mathcal{H}_n$, calculons $\widehat{Tf}$ en utilisant les calculs de la question 1.b. Pour cela on note que

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $(T_1^{-1})^T = T_2^{-1}$ et $(T_2^{-1})^T = T_1^{-1}$.

De ce fait pour $x = (x_1, x_2) \in H_n$,

$$\begin{aligned} \widehat{Tf}(x) &= 4\hat{f}(x) - \omega^0\hat{f}(T_2^{-1}x) - \omega^0\hat{f}(T_1^{-1}x) - \omega^{(T_1^{-1}e_1).x}\hat{f}(T_2^{-1}x) - \omega^{(T_2^{-1}e_2).x}\hat{f}(T_1^{-1}x) \\ &= 4\hat{f}(x) - (1+\omega^{x_1})\hat{f}(T_2^{-1}x) - (1+\omega^{x_2})\hat{f}(T_1^{-1}x) \end{aligned}$$

Donc en posant $U$ l'endomorphisme de $\mathcal{H}_n$ défini par

$$U : F \mapsto \left[x \mapsto (UF)(x) = (1+\omega^{x_1})F(T_2^{-1}x) + (1+\omega^{x_2})F(T_1^{-1}x)\right],$$

on obtient que pour tout $f \in \mathcal{H}_n$, $\widehat{Tf} = 4\hat{f} - U\hat{f}$.

*Remarque : Il semble y avoir une erreur dans la fonction $U$ de l'énoncé.*

Maintenant, soit $\lambda$ une valeur propre non nulle de $T$ et $f$ un vecteur propre associé à $\lambda$. On a $U\hat{f} = 4\hat{f} - \widehat{Tf} = (4-\lambda)\hat{f}$. On en déduit que $F = \hat{f}$ est non nulle (car $f$ est non nulle), vérifie que $\hat{f}(0) = 0$ d'après 2.a et est un vecteur propre pour $U$ associée à la valeur propre $\nu = 4 - \lambda$.

Maintenant, en utilisant $(T_1)$, on obtient que

$$| < F, UF > | = | < F, \nu F > | = |\nu| < F, F > \leq \frac{73}{20} < F, F >$$

Finalement, $4-\lambda \leq \frac{73}{20}$ et donc $\lambda \geq \frac{80-73}{20} = \frac{7}{20}$.

**2.c Montrer que la propriété $(T_2)$ implique la propriété $(T_1)$.**

On suppose $(T_2)$ à savoir que pour toute fonction $G : H_n \to \mathbb{R}_+$ avec $G(0)=0$, $< G, U'G > \quad \leq \frac{73}{40}$.

On considère $F : H_n \to \mathbb{C}$ vérifiant $F(0)=0$ et on pose $G=|F|$. On a alors

$$| < F, UF > | = \left| \sum_{x\in H_n} \overline{F(x)}(UF)(x) \right| \leq \sum_{x\in H_n} |F(x)||(UF)(x)|.$$

Or, pour $x \in H_n$

$$\begin{aligned} |(UF)(x)| &\leq |1+\omega^{x_1}||F(T_2^{-1}x)| + |1+\omega^{x_2}||F(T_1^{-1}x)| \\ &\leq 2\left|\cos(\frac{\pi x_1}{n})\right| G(T_2^{-1}x) + 2\left|\cos(\frac{\pi x_2}{n})\right| G(T_1^{-1}x) = 2(U'G)(x) \end{aligned}$$

car $1+\omega^{x_1} = 1+e^{2ix_1\pi/n} = 2\cos(\frac{\pi x_1}{n})e^{ix_1\pi/n}$ et de même pour $1+\omega^{x_2}$.

On obtient donc

$$| < F, UF > | \leq 2\sum_{x\in H_n} G(x)(U'G)(x) = 2 < G, U'G > .$$

Comme $G$ est positive et s'annule en 0, on obtient bien la propriété $(T_1)$.

**2.d Montrer que ...**

Soit $(x_1,x_2) \in D_n \setminus \{(0,0)\}$. On a

$$T_1(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, x_2); T_2(x_1,x_2) = (x_1, 2x_1+x_2)$$

et

$$T_1^{-1}(x_1,x_2) = (x_1-2x_2, x_2); T_2^{-1}(x_1,x_2) = (x_1, -2x_1+x_2).$$

- Supposons pour commencer que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$.
  - On suppose que $0 < x_1 < x_2$ :

$$\overline{x_1+2x_2} = \begin{cases} x_1+2x_2 & \text{si } x_1+2x_2 < \frac{n}{2} \\ x_1+2x_2-n & \text{sinon (car } x_1+2x_2 < \frac{3n}{2}) \end{cases}$$

    * Dans le premier cas, $|\overline{x_1+2x_2}| = x_1+2x_2 > x_1 = |\overline{x_1}|$ et donc $\boxed{T_1(x_1,x_2) \succ (x_1,x_2)}$.
    * Dans le deuxième cas, comme $x_1+x_2 < \frac{n}{2}$, $x_1+2x_2-n < 0$ d'où $|\overline{x_1+2x_2}| = n-x_1-2x_2$ qui est strictement supérieur à $x_1$ car $x_1+x_2 < \frac{n}{2}$. On a donc encore $\boxed{T_1(x_1,x_2) \succ (x_1,x_2)}$.

    On obtient de même que $\boxed{T_2(x_1,x_2) \succ (x_1,x_2)}$

    Maintenant, regardons $T_1^{-1}(x_1,x_2) = (x_1-2x_2, x_2)$, on a $x_1-n < x_1-2x_2 < -x_1$ donc $|\overline{x_1-2x_2}| > |x_1|$ et de ce fait $\boxed{T_1^{-1}(x_1,x_2) \prec (x_1,x_2)}$.

    Pour finir, $T_2^{-1}(x_1,x_2) = (x_1, -2x_1+x_2)$. Comme $|x_2-2x_1| < |x_2|$ on obtient que $\boxed{T_2^{-1}(x_1,x_2) \succ (x_1,x_2)}$.
  - Les autres cas où $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$ sont similaires, on se ramène au cas ci-dessus.

On a montré que si $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$ alors parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x$ et $T_2^{-1}x$ il y avait trois éléments $\succ x$ et un élément $\prec x$.

- Supposons maintenant que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou $|x_1| = |x_2|$.
  - Si $x_1 = 0$ (et donc $x_2 \neq 0$) car $x \neq 0$, $T_1x = (2x_2, x_2) \succ x; T_1^{-1}x = (-2x_2, x_2) \succ x$ alors que $T_2x$ et $T_2^{-1}x$ sont incomparables à $x$ car ils valent $x$.
  - Le cas $x_2 = 0$ est similaire au précédent.
  - Il reste à traiter le cas où $|x_1| = |x_2|$. Faisons, par exemple le cas où $x = (\alpha, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ (les autres cas sont analogues).

    On a $T_1x = (3\alpha, \alpha)$, comme $\alpha < 3\alpha < n - \alpha$ (car $2\alpha < \frac{n}{2}$), alors $|\overline{3\alpha}| > |\alpha|$ et donc $T_1x \succ x$. De même $T_2x = (\alpha, 3\alpha) \succ x$. Par contre $T_1^{-1}x = (-\alpha, \alpha)$ et $T_2^{-1}x = (\alpha, -\alpha)$ ne sont pas comparables à $x$.

On a montré que si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou $|x_1| = |x_2|$ alors parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x$ et $T_2^{-1}x$ il y avait deux éléments $\succ x$ et deux éléments incomparables à $x$.

**2.e Montrer que pour** $(x_1, x_2) \in H_n \setminus \{(0,0)\}$**,...**

Soit $x \in H_n \setminus \{(0,0)\}$. On pose

$$R(x) = |\cos(\frac{\pi x_1}{n})|(\gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x)) + |\cos(\frac{\pi x_2}{n})|(\gamma(x, T_1x) + \gamma(x, T_1^{-1}x)).$$

- Supposons que $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in D_n \setminus \{(0,0)\}$. On a

$$R(x) \leq \gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x) + \gamma(x, T_1x) + \gamma(x, T_1^{-1}x)$$

car les cosinus sont majorés par 1. Maintenant, en utilisant 2.d, on obtient, dans le premier cas $R(x) \leq \frac{12}{5} + \frac{5}{4} = \frac{73}{20}$ et $R(x) \leq \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5} = \frac{72}{20} \leq \frac{73}{20}$ dans le deuxième cas.

- Supposons que $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \notin D_n \setminus \{(0,0)\}$.

On a alors

$$R(x) \leq 2|\cos(\frac{\pi x_1}{n})|\frac{5}{4} + 2|\cos(\frac{\pi x_2}{n})|\frac{5}{4} = \frac{5}{2}(|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + |\cos(\frac{\pi x_2}{n})|).$$

Car la fonction $\gamma$ est majorée par $\frac{5}{4}$.

Comme cosinus est paire, on peut supposer que $x_1$ et $x_2$ sont positifs, inférieurs à $\frac{n}{2}$ et tels que $x_1 + x_2 \geq \frac{n}{2}$.

$$\begin{aligned}
R(x) &\leq \frac{5}{2}(\cos(\frac{\pi x_1}{n}) + \cos(\frac{\pi x_2}{n})) \\
&\leq 5\cos\left(\frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi(x_1 - x_2)}{2n}\right) \\
&\leq 5\cos\left(\frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n}\right) \\
&\leq 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{50\sqrt{2}}{20}
\end{aligned}$$

En effet, cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$. Il suffit alors de remarquer que $50\sqrt{2} \simeq 70,7 < 73$ donc $R(x) \leq \frac{73}{20}$.

**2.f Montrer que ...**

Soit $(a, b)$ deux réels, il est bien connu que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (car $(a - b)^2 \geq 0$) donc si $x$ et $y$ sont incomparables,

$$2G(x)G(y) \leq G^2(x) + G^2(y) = \gamma(x, y)G^2(x) + \gamma(y, x)G^2(y).$$

De même, $\frac{5}{4}a^2 + \frac{4}{5}b^2 \geq 2ab$. Il suffit de voir le trinôme en $a$ (à $b$ fixé), $\frac{5}{4}a^2 - 2ab + \frac{4}{5}b^2$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4b^2 - 4.\frac{5}{4}.\frac{4}{5}b^2 = 0$ est toujours positif. De ce fait, si $x \succ y$, comme $\gamma(x, y) = \frac{5}{4}$ et donc $\gamma(y, x) = \frac{4}{5}$,

$$2G(x)G(y) \leq \frac{5}{4}G^2(x) + \frac{4}{5}G^2(y) = \gamma(x, y)G^2(x) + \gamma(y, x)G^2(y).$$

Pour finir, on démontre $(T_2)$. Soit $G : H_n \to \mathbb{R}$ positive telle que $G(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
2 < G, U'G > &= 2 \sum_{x \in H_n} G(x)(U'G)(x) \\
&= \sum_{x \in H_n} 2G(x)G(T_2^{-1}x)|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + 2G(x)G(T_1^{-1}x)|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| \\
&\leq \sum_{x \in H_n} (\gamma(x, T_2^{-1}x)G^2(x) + \gamma(T_2^{-1}x, x)G^2(T_2^{-1}x))|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| \\
&\quad +(\gamma(x, T_1^{-1}x)G^2(x) + \gamma(T_1^{-1}x, x)G^2(T_1^{-1}x))|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| \text{ d'après ce qui précède} \\
&\leq \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_2^{-1}x)G^2(x)|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + \sum_{x \in H_n} \gamma(T_2^{-1}x, x)G^2(T_2^{-1}x)|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| \\
&\quad + \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_1^{-1}x)G^2(x)|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| + \sum_{x \in H_n} \gamma(T_1^{-1}x, x)G^2(T_1^{-1}x)|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| \\
&\leq \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_2^{-1}x)G^2(x)|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + \sum_{y \in H_n} \gamma(y, T_2y)G^2(y)|\cos(\frac{\pi [T_2y]_1}{n})| \\
&\quad + \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_1^{-1}x)G^2(x)|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| + \sum_{y \in H_n} \gamma(y, T_1y)G^2(y)|\cos(\frac{\pi [T_1y]_2}{n})| \\
&\leq \sum_{x \in H_n} G^2(x)\Big[\gamma(x, T_2^{-1}x) \,|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| + \gamma(x, T_2x) \,|\cos(\frac{\pi x_1}{n})| \\
&\qquad + \gamma(x, T_1^{-1}x) \,|\cos(\frac{\pi x_2}{n})| + \gamma(x, T_1x) \,|\cos(\frac{\pi x_2}{n})|\Big] \\
&\leq \frac{73}{20} \sum_{x \in H_n} G^2(x) \quad \text{par un raisonnement semblable à celui de 2.e}
\end{aligned}$$

Finalement $< G, U'G > \leq \frac{73}{40} < G, G >$.