

Corrigé

Première partie

- 1) a) Pour $\ell = 0$, on considère que $[0, \ell] = \{\ell\}$. Pour $\omega \in \Omega$ la suite $(S_k(\omega))$ est strictement croissante. Si $N(0, \ell) = n + 1$ alors il y a $n + 1$ indices k tels que $0 \leq S_k(\omega) \leq \ell$ et ce sont les $n + 1$ premiers d'où $S_n(\omega) \leq \ell < S_{n+1}(\omega)$. Ainsi, $\{N(0, \ell) = n + 1\} \subset \{S_n \leq \ell < S_{n+1}\}$. L'inclusion réciproque ainsi que les deux autres relations se justifient de manière analogue.
- b) C'est l'inégalité de Bienaymé-Chebychev pour S_n d'espérance $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = nm$ et de variance $\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = nv$ par indépendance des X_k .
- 2) On a dans $[0, +\infty[$:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq \ell).$$

L'interversion des sommations est valide, s'agissant de réels positifs.

- 3) a) C'est l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp(\ell - S_n)$ d'espérance

$$\mathbb{E}(e^{\ell - X_1 - \dots - X_n}) = e^{\ell} \mathbb{E}(e^{-X_1}) \dots \mathbb{E}(e^{-X_n}) = e^{\ell} \mathbb{E}(e^{-X})^n.$$

- b) $\mathbb{E}(e^{-X}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i e^{-x_i} < 1$, d'où la convergence de $\mathbb{P}(S_n \leq \ell)$ vers 0.

Ensuite, $\mathbb{P}(N(0, \ell) \geq n) = \mathbb{P}(S_{n-1} \leq \ell) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(N(0, \ell) = \infty) = 0$.

Enfin, $\mathbb{E}(N(0, \ell)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(0, \ell) \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{\ell} \mathbb{E}(e^{-X})^{n-1} = \frac{e^{\ell}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

- c) On note $A_n = \{a \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(S_n = a) \neq 0\}$, $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $D = A - A$ (ensembles dénombrables) :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n, N(x, x + \ell) \geq k) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x + \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} = c) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x + \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b, S_{n+k-1} - S_n = c - b) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x + \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b) \mathbb{P}(S_{n+k-1} - S_n = c - b) && \text{(indépendance des } X_i) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ c \in A, c \leq x + \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b) \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = c - b) && \text{(équidistribution des } X_i) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ d \in A - b, d \leq x + \ell - b}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b) \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\ &\leq \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x \\ d \in D, d \leq \ell}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b) \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 = d) \\ &= \sum_{\substack{a \in A, a < x \\ b \in A, b \geq x}} \mathbb{P}(S_{n-1} = a, S_n = b) \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leq \ell) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n) \mathbb{P}(S_{k-1} - S_0 \leq \ell) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n) \mathbb{P}(N(0, \ell) \geq k). \end{aligned}$$

En sommant sur n on obtient $\mathbb{P}(N(x, x + \ell) \geq k) \leq \mathbb{P}(N(0, \ell) \geq k)$ ce qui implique par continuité décroissante $\mathbb{P}(N(x, x + \ell) = \infty) = 0$ puis $\mathbb{E}(N(x, x + \ell)) \leq \mathbb{E}(N(0, \ell)) \leq \frac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}$.

Deuxième partie

- 4) a) $f_n(x)$ est la n -ème somme partielle d'une série termes positifs (finis car g est bornée).
b) Pour $\omega \in \Omega$ on a $N(x - K, x)(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x - S_k(\omega)) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\omega)$ et il s'agit de prouver que $\mathbb{E}(N(x - K, x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(Y_k) = f(x)$. Pour ce faire, considérons le schéma d'interversion des limites suivant :

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_0 + \dots + Y_p \geq k) & \xrightarrow[\substack{n \text{ fixé} \\ p \rightarrow \infty}]{(1)} & \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N(x - K, x) \geq k) \\ \downarrow \substack{(2) \\ n \rightarrow \infty \\ p \text{ fixé}} & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_0 + \dots + Y_p \geq k)}_{\mathbb{E}(Y_0) + \dots + \mathbb{E}(Y_p)} & \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} & \mathbb{E}(N(x - K, x)) \\ & & \downarrow \\ & & f(x) \end{array}$$

(1) a lieu par continuité croissante. Pour évaluer les limites, il suffit de prouver l'uniformité de (2) par rapport au paramètre p . Et de fait :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_0 + \dots + Y_p \geq k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(N(x - K, x) \geq k),$$

quantité indépendante de p , et tendant vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ en tant que reste d'une série convergente (on a vu que $\mathbb{E}(N(x - K, x))$ est finie en 3c).

- c) Car $g \leq \|g\|_{\infty} \mathbb{1}_{[0, K]}$.
d) La suite $(f_n(x))$ étant croissante et majorée, il y a finitude de $f(x)$ et convergence simple de f_n vers f . f est positive et est nulle sur $]-\infty, 0[$ car les f_n le sont. Donc $\{x \text{ tq } f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^+$ et le support de f est lui aussi inclus dans \mathbb{R}^+ . Enfin f est bornée car les f_n sont bornées par deux mêmes constantes.
5) On note $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(X = a) \neq 0\}$ et $B = \{b \in \mathbb{R} \text{ tq } \mathbb{P}(Y = b) \neq 0\}$ (ensembles finis ou dénombrables) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(X, Y)) &= \sum_{(a, b) \in A \times B} \varphi(a, b) \mathbb{P}(X = a, Y = b) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \varphi(a, b) \mathbb{P}(X = a) \mathbb{P}(Y = b) \\ &= \sum_{a \in A} \mathbb{E}(\varphi(a, Y)) \mathbb{P}(X = a). \end{aligned}$$

- 6) a)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \mathbb{E}(g(x - S_0)) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(g(x - X_1 - (X_2 + \dots + X_k))) \\ &= g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2 + \dots + X_k))) \quad (\text{indépendance}) \\ &= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_2 + \dots + X_k))) \\ &= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} p_i \mathbb{E}(g(x - x_i - (X_1 + \dots + X_{k-1}))) \quad (\text{équidistribution}) \\ &= g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f_n(x - x_i). \end{aligned}$$

- b) On a pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \leq g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i)$, d'où en faisant tendre n vers l'infini à x fixé :

$$f(x) \leq g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^k p_i f_n(x - x_i)$, puis en faisant tendre n vers l'infini à x, k fixés : $f(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^k p_i f(x - x_i)$, et enfin en faisant tendre k vers l'infini :

$$f(x) \geq g(x) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f(x - x_i).$$

- 7) a) C'est vrai pour $n = 0$ et si ça l'est pour n alors :

$$\mathbb{E}(h(x - S_{n+1})) = \mathbb{E}(h(x - X_{n+1} - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathbb{E}(h(x - x_i - S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i h(x - x_i) = h(x).$$

- b) Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $|h(x - S_n(\omega))| \leq \|h\|_{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq x\}}(\omega)$ donc

$$|h(x)| \leq |\mathbb{E}(h(x - S_n))| \leq \mathbb{E}(|h(x - S_n)|) \leq \|h\|_{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

- c) Si f, f' sont deux solutions de (E) alors $h = f - f'$ vérifie les hypothèses de la question précédente donc est nulle.
- 8) a) C'est l'ensemble A introduit dans la réponse à 3c.
 b) C'est la formule de transfert pour $\mathbb{E}(g(x - S_k))$.
 c) $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = y_i) g(x - y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} q_{i,n} g(x - y_i)$.

Comme les X_j sont à valeurs strictement positives, pour tout i les événements $\{S_k = y_i\}_{k \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et donc $q_{i,n} = \mathbb{P}(\exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ tq } S_k = y_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } S_k = y_i) = q_i$ par continuité croissante. On a donc $f_n(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ (inégalité dans $[0, +\infty]$) puis en faisant tendre n vers l'infini à x fixé : $f(x) \leq \sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$. L'inégalité inverse se démontre comme en 6b en minorant $f_n(x)$ par une somme finie. En particulier la série $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g(x - y_i)$ est convergente. La deuxième relation demandée s'obtient en prenant $g = \mathbb{1}_{[0, K]}$.

- 9) a) Soit $[a, b]$ un segment. Pour $x \in [a, b]$ et $i \in \mathbb{N}$ on a $|q_i g(x - y_i)| \leq \|g\|_{\infty} q_i \mathbb{1}_{[a-K, b]}(y_i)$, quantité indépendante de x et dont la série converge vers $\|g\|_{\infty} \mathbb{E}(N(a - K, b))$.
 b) g étant continue à support compact est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ associé : $|g(s) - g(t)| \leq \varepsilon$ pour tous s, t tels que $|s - t| \leq \delta$. Quitte à le diminuer, on peut supposer $\delta \leq 1$. Considérons $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s - t| \leq \delta$ avec par exemple $s \leq t$:

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &= \left| \sum_{i=0}^{\infty} q_i (g(s - y_i) - g(t - y_i)) \right| \\ &= \left| \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \in [s-K, t]} q_i (g(s - y_i) - g(t - y_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \in [s-K, t]} q_i |g(s - y_i) - g(t - y_i)| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \in [s-K, t]} q_i \varepsilon \\ &= \varepsilon \mathbb{E}(N(s - K, t)) \\ &\leq \varepsilon \frac{e^{t-s+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))} \\ &\leq \varepsilon \frac{e^{1+K}}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}. \end{aligned} \tag{question 3c}$$

- c) g' est continue et à support compact. Elle est donc bornée. Il en résulte que la série des dérivées $\sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x - y_i)$ est normalement convergente sur tout segment de \mathbb{R} comme en 9a, donc que f est de classe C^1 avec $f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i g'(x - y_i)$. On a ensuite

$$|f'(x)| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \in [x-H, x]} q_i \|g'\|_{\infty} = \mathbb{E}(N(x - K, x)) \|g'\|_{\infty} \leq \frac{e^K \|g'\|_{\infty}}{1 - \mathbb{E}(e^{-X})}$$

donc f' est bornée. La continuité uniforme de f' se démontre comme en 9b. Enfin, comme la série $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente, on peut dériver (E) terme à terme ce qui donne la dernière relation.

Troisième partie

- 10) a) $nx + k(y - x) = (n - k)x + ky$ et $n - k, k$ ne sont pas simultanément nuls.
 b) \mathbb{N}^* et $]0, +\infty[$ sont stables par addition avec $r(\mathbb{N}^*) = 1$ et $r(]0, +\infty[) = 0$.
- 11) a) C'est une propriété de la borne inférieure.
 b) Les deux points $na + kd, na + (k + 1)d$ appartiennent bien à l'intersection d'après 10a et tout autre point de $[na + kd, na + (k + 1)d]$ est à une distance moindre que $d/2$ de l'une des deux bornes. Comme $d/2 < r(\Lambda)$, il n'appartient pas à Λ .
 c) Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } nd > a\}$, qui existe et est supérieur ou égal à 1 car a et d sont strictement positifs. On a $n_0 a + n_0 d > (n_0 + 1)a$ par construction, et $n_0 a + (n_0 - 1)d \leq (n_0 + 1)a < n_0 a + n_0 d$. Ces trois nombres appartiennent à Λ donc les deux premiers sont égaux d'après la question précédente. Ainsi $a = (n_0 - 1)d$.
 d) Soit $x \in \Lambda$ tel que $x \geq n_0 a$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \leq x < (n + 1)a$ puis il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $na + kd \leq x < na + (k + 1)d$. On a $n \geq n_0$ et $k \leq n$ car $na + (n + 1)d > na + n_0 d > (n + 1)a > x$ donc $x = na + kd$ d'après 11b. Ainsi tout élément de Λ suffisamment grand est divisible par d . Pour $x \in \Lambda$ quelconque il existe deux multiples successifs $mx, (m + 1)x$ qui relèvent du cas précédent. Ils sont divisibles par d et leur différence, x , l'est aussi. Ainsi $\Lambda \subset d\mathbb{Z}$.
- 12) a) Soient $a, b \in \Lambda$ tels que $0 < b - a < \eta$. Λ contient toutes les combinaisons $na + k(b - a)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$. En particulier, tout segment de longueur η dont la borne inférieure appartient à $[na, nb]$ contient un élément de Λ . On a $(n + 1)a \leq nb$ si $a \leq n(b - a)$, ce qui a lieu dès que n est assez grand, mettons $n \geq n_0$. Alors $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} [na, nb] = [n_0 a, +\infty[$ donc $\Lambda = n_0 a$ convient.
 b) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Considérons une suite de réels (x_n) telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Pour n assez grand ($n \geq n_0$) il existe $y_n \in \Lambda$ tel que $x_n \leq y_n \leq x_n + \eta$. La suite $(y_n)_{n \geq n_0}$ est à valeurs dans Λ et tend vers l'infini donc pour n encore plus grand ($n \geq n_1$) on a $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$ et $|f(y_n)| \leq \varepsilon$ d'où $|f(x_n)| \leq 2\varepsilon$. On a ainsi prouvé que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, puis $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par caractérisation séquentielle de la limite.

Quatrième partie

- 13) a)

$$\begin{aligned} h(0) &= \mathbb{E}(h(-S_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} h(-y_i) \mathbb{P}(S_n = i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \neq x} h(-y_i) \mathbb{P}(S_n = i) + h(-x) \mathbb{P}(S_n = x) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}, y_i \neq x} h(0) \mathbb{P}(S_n = i) + h(-x) \mathbb{P}(S_n = x) \\ &= h(0) \mathbb{P}(S_n \neq x) + h(-x) \mathbb{P}(S_n = x). \end{aligned}$$

On en déduit $(h(0) - h(-x))\mathbb{P}(S_n = x) \leq 0$, puis $h(0) \leq h(-x)$ et enfin l'égalité.

- b) Si $x, y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(S_n = x) > 0$ et $\mathbb{P}(S_p = y) > 0$. Alors par équidistribution on a aussi $\mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$, d'où

$$\mathbb{P}(S_{n+p} = x + y) \geq \mathbb{P}(S_n = x, S_{n+p} - S_n = y) = \mathbb{P}(S_n = x) \mathbb{P}(S_{n+p} - S_n = y) > 0$$

donc $x + y \in \Lambda_X \setminus \{0\}$, ce qui prouve la stabilité par addition. Ensuite, si $r(\Lambda_X \setminus \{0\}) \neq 0$ alors $\Lambda_X \setminus \{0\} \subset d\mathbb{Z}$ pour un certain $d > 0$ et en particulier $\mathbb{P}(X \in d\mathbb{Z}) = \mathbb{P}(S_1 \in d\mathbb{Z}) = 1$ en contradiction avec l'hypothèse faite sur X .

c) Appliquer **12b** à $x \mapsto h(-x) - h(0)$.

d) h est continue sur \mathbb{R}^- et tend en $-\infty$ vers sa valeur maximale donc il existe un réel $c \leq 0$ tel que $h(c) = \min(h(t), t \leq 0)$. En reprenant **13a**, on prouve que $h(c - x) = h(c)$ pour tout $x \in \Lambda_X$, d'où en faisant tendre x vers $+\infty$ dans Λ_X : $h(c) = h(0)$, c'est-à-dire : h est constante sur \mathbb{R}^- . On peut alors appliquer **7b** à la fonction $x \mapsto h(x) - h(0)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$: cette fonction est nulle et ainsi h est constante sur \mathbb{R} .

14) a) f' étant bornée, la borne supérieure existe et est une fonction de x bornée, décroissante. Une telle fonction admet une limite finie en $+\infty$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver $y_n \geq n$ tel que $|\sup(f'(t), t \geq n) - f'(y_n)| \leq \frac{1}{n}$.

c) On peut intervertir $\lim_{k \rightarrow \infty}$, $\inf_{x \in \mathbb{R}}$ et $\sum_{i=0}^{\infty}$ dans la relation $f'(t+t_k) = g'(t+t_k) + \sum_{i=0}^{\infty} p_i f'(t+t_k-x_i)$ car $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ est absolument convergente et f' est bornée. Il vient : $\forall t \in \mathbb{R}, \xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \xi(t-x_i)$ car g' est nulle au delà de K .

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon$. Par translation, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|x - y| \leq \delta \implies |\xi_k(x) - \xi_k(y)| \leq \varepsilon$ puis, par passage à la limite : $|x - y| \leq \delta \implies |\xi(x) - \xi(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi ξ est uniformément continue sur \mathbb{R} . On montre de même qu'elle est bornée et, par construction, elle atteint son maximum en $t = 0$ avec $\xi(0) = c$. Alors on peut appliquer **13** qui conclut à la constance de ξ .

d) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme il y a convergence uniforme sur tout segment, on peut passer à la limite ($k \rightarrow \infty$, a fixé) dans la relation : $|\int_{u=0}^a f'(t_k+u) du| = |f(t_k+a) - f(t_k)| \leq 2\|f'\|_{\infty}$ ce qui donne : $|ca| \leq 2\|f'\|_{\infty}$. Et a est arbitraire, donc $c = 0$.

e) Car $\inf(f'(u), u \geq t) \leq f'(t) \leq \sup(f'(u), u \geq t)$.

f) Car $\inf(f'(u), u \geq t) \leq \frac{f(t+\ell) - f(t)}{\ell} \leq \sup(f'(u), u \geq t)$ lorsque $\ell > 0$.

18) $\mathbb{E}(N(x, x + \ell)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[0, \ell]}(x + \ell - S_k)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{m}$. Le nombre moyen de sommes comprises dans un intervalle donné de longueur ℓ est de l'ordre de la longueur de cet intervalle divisée par l'écart moyen entre deux sommes successives. Cette propriété est manifestement fautive si X est à valeurs dans $d\mathbb{Z}$ et $\ell < d$.

* *
*