École polytechnique - Écoles normales supérieures

Concours d'admission 2016 - filière MP

Corrigé de l'épreuve de mathématiques A

Première partie

1a. On a $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,{}^t\mathrm{Com}(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, puisque M étant à coefficients entiers, son déterminant et ses mineurs sont également entiers.

1b. Si M^{-1} est à coefficients entiers, son déterminant est entier: on en déduit que $\det(M)$ est un entier non nul dont l'inverse est également entier, soit $\det(M) = 1$ ou -1.

Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = \pm{}^t\mathrm{Com}(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ puisque les mineurs de M sont des entiers.

2a. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $M(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et $M^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. On en déduit que $\mathbb{Z}^n = M(M^{-1}(\mathbb{Z}^n)) \subset M(\mathbb{Z}^n)$, d'où l'égalité $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

Réciproquement, supposons que $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout i, $e_i \in \mathbb{Z}^n$ donc $x_i = Me_i \in \mathbb{Z}^n$. D'autre part, comme $e_i \in \mathbb{Z}^n = M(\mathbb{Z}^n)$, il existe $y_i \in \mathbb{Z}^n$ tel que $e_i = M(z_i)$. Comme M est inversible, $M^{-1} = (y_1|\ldots|y_n)$ et nous avons prouvé que M et M^{-1} étaient à coefficients entiers.

2b. Supposons que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. On a alors $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, ce qui s'écrit ($M$ est inversible):

$$\forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in \mathbb{Z}^n \Longleftrightarrow t \in \mathbb{Z}^n.$$

On en déduit donc:

$$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ t_i \in [0,1] \cap \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \varepsilon_i \in \{0,1\} \right\}.$$

Cet ensemble est bien de cardinal 2^n car la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, supposons que ii) est vérifié. On a tout d'abord $x_i \in \mathbb{Z}^n$ pour tout i (avec $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_j = 0$ pour $j \neq i$), donc $M(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$.

Il reste à montrer que $M^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$: soit donc $t = (t_1, \ldots, t_n) \in M^{-1}(\mathbb{Z}^n)$, i.e. tel que $M(t) \in \mathbb{Z}^n$. On peut alors écrire $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$ en posant $\lfloor t \rfloor = (\lfloor t_1 \rfloor, \ldots, \lfloor t_n \rfloor)$ et $\{t\} = (\{t_1\}, \ldots \{t_n\})$. On a alors:

$$M(\{t\}) = M(t) - M(\lfloor t \rfloor) \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{P}$$

donc $\{t\} \in \{0,1\}^n$, ce qui impose $\{t\} = (0, \ldots, 0)$ et $t \in \mathbb{Z}^n$. On a donc $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ et M est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

3. Question de cours: le produit à gauche de M par $I_n + \alpha E_{i,j}$ correspond à l'opération élémentaire "ajouter à la i-ème ligne de M α fois sa j-ème ligne", soit $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$; le produit à droite correspond à l'opération "ajouter à la j-ème colonne de M α fois sa i-ème colonne", soit $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$.

4a. Notons $N = (y_1|\dots|y_{n-1})$. En développant $\det(M)$ par rapport à sa première ligne, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\det(M) &= a_1 \det\big(y_2,\dots,y_{n-1},vy_1\big) + (-1)^{n+1}u\det(N)\\ &= va_1(-1)^{n-2}\det\big(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\big) + (-1)^{n+1}u\det(N)\end{aligned}$$

puisqu'il faut effectuer $n-2$ permutations de vecteurs pour passer de $\det\big(y_2,\dots,y_{n-1},y_1\big)$ à $\det\big(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}\big)$. Nous obtenons ainsi:

$$\det(M) = (-1)^n\ (va_1 - u)\ \det(N).$$

4b. Notons $b = pgcd(a_2,\dots,a_n)$ et $d = pgcd(a_1,b) = pgcd(a_1,a_2,\dots,a_n)$. Comme $d \in d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, il existe $U, V \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1U + bV = d$. Si les $a_2,\dots,a_n$ sont non tous nuls, leur pgcd b est non nul. On peut donc poser

$$v = (-1)^n\frac{U}{b} \quad \text{et} \quad u = (-1)^{n+1}V$$

et ces deux rationnels donnent une matrice M à coefficients entiers (car b divise $a_2,\dots,a_n$), dont la première colonne est $(a_1,a_2,\dots a_n)$ et dont le déterminant vaut $(-1)^n\ (va_1-u)\ \det(N) = Ua_1 + Vb = d$.

Il reste à rédiger la preuve par récurrence:

- Si $n=1$, la matrice $M = (a_1)$ est solution du problème posé. On voit ici qu'il y a un petit problème: on doit plutôt dire que $\det(M)$ est **un** pgcd de $(a_1,\dots,a_n)$ puisque pour $n=1$, on ne pourra pas avoir $\det(M) = |a_1|$, valeur habituellement considérée comme étant **le** pgcd de a_1.

- Soit $n \geq 2$ et supposons que la propriété ait été démontrée pour toute famille de $n-1$ entiers non tous nuls. Soit $(a_1,\dots,a_n)$ une famille de n entiers non tous nuls. Si $a_2 = \dots = a_n = 0$, $pgcd(a_1,\dots,a_n) = a_1$ et la matrice diagonale $\operatorname{diag}(a_1,1,\dots,1)$ est solution du problème. Sinon, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(a_2,\dots,a_n)$ et appliquer la construction précédente: la propriété est vérifiée au rang n.

5. Il y a une maladresse dans l'énoncé, qui n'impose pas la condition $c_{1,1} > 0$ quand $n=1$ (il n'existe pas de couple i,j tel que $1 \leq i < j \leq 1$). Nous ajouterons donc cette condition, bien pratique pour que la preuve par récurrence fonctionne au rang $n=2$.

5a. $(x'_1,\dots,x'_n)$ est une famille de n vecteurs du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}^{n-1}$, de dimension $n-1$: cette famille est donc liée et il existe une famille $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Q}^{n-1}\setminus\{0\}$ telle que $a_1x'_1 + \dots + a_nx'_n = 0$. Quitte à multiplier tous les a_i par le ppcm de leurs dénominateurs, on peut supposer qu'ils sont tous entiers. Il reste alors à remplacer chaque a_i par $\dfrac{a_i}{pgcd(a_1,\dots,a_n)}$ pour obtenir des a_i entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

5b. On peut appliquer le résultat de la question 4 à la famille $(a_1,\dots,a_n)$ obtenu au 5a: il existe $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est $(a_1,\dots,a_n)$ et dont le déterminant vaut ± 1 (les a_i sont premiers dans leur ensemble): on en déduit que $A_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et la première colonne de MA_1 est $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, vecteur dont seule la première coordonnée est non nulle (comme M et A_1 sont inversibles, MA_1 l'est également et ne peut avoir une première colonne nulle). Quitte à remplacer $(a_1,\dots,a_n)$ par $(-a_1,\dots,-a_n)$, on peut supposer que le coefficient $\tilde{c}_{1,1}$ est strictement positif.

5c. Posons $MA_1 = (y_1|\dots|y_n)$. En remplaçant A_1 par $A_1(I_n - q_2E_{1,2})\dots(I_n - q_nE_{1,n}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, nous obtenons donc la matrice $(y_1|y_2 - q_2y_1|\dots|y_n - q_ny_1)$, dont les coefficients de la première ligne sont $(\tilde{c}_{1,1}, r_2, \dots r_n)$. Quitte à changer A_1, nous pouvons donc supposer que $\tilde{c}_{1,1} > \tilde{c}_{1,j} \geq 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$.

5d. La récurrence se fait sans problème, mais il ne faut appliquer la question 5c qu'après avoir rendu triangulaire le bloc inférieur.

- Si $n = 1$, il suffit de choisir $A = (\varepsilon) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z})$ où ε est le signe de $m_{1,1}$ pour obtenir $c_{1,1} = |m_{1,1}| > 0$;

- Soit $n \geq 2$ et supposons la propriété démontrée pour toute matrice entière inversible de taille $n-1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul. Il existe alors une matrice $A_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que:

$$MA_1 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1,1} & \tilde{c}_{1,2} & \dots & \tilde{c}_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad N \quad} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

  avec $\tilde{c}_{1,1} \in \mathbb{N}^*$. Comme $\det(M)$ est non nul, on a également $\det(N)$ non nul et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})$ telle que $NB = (c_{i,j})_{2\leq i,j\leq n}$ soit triangulaire supérieure, avec $0 \leq c_{i,j} < c_{i,i}$ pour tous i, j tels que $2 \leq i < j \leq n$ (et $c_{2,2} > 0$ si $n = 2$). On note alors:

$$A_2 = A_1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad B \quad} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

  et la matrice $MA_2 = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est triangulaire supérieure, à diagonale strictement positive et $0 \leq c_{i,j} < c_{i,j}$ pour tout $i \geq 2$ et pour tout $j > i$. Il reste alors à appliquer la méthode explicitée à la question 5c pour imposer $0 \leq c_{1,j} < c_{1,1}$ sans modifier les autres lignes (les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - q_jC_1$ ne modifient que la première ligne de la matrice car seul la première composante de C_1 est non nulle).

6. Cette question est fausse: par transposition, le résultat de la question 5 permet d'obtenir une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $MA = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire inférieure, à diagonale strictement positive et telle que $0 \leq c_{i,j} < c_{j,j}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $j < i$. Le concepteur a peut-être fait une erreur d'indice, mais la question 13 utilise bien la propriété fausse énoncée à la question 6.

Contre-exemple: avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, on a $AM = \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ 2c+d & d \end{pmatrix}$. On veut donc avoir: $b = 0$, $ad = \pm 1$, $2a > 0$ et $0 \leq 2c + d < d$, soit $b = 0, a = d = 1$ et $-1 = 2c$. Il n'existe donc pas de telle matrice A.

Deuxième partie

Petite faute de frappe: dans la première définition de $\mathcal{S}$ ainsi qu'à la question 7b, il faut lire $\forall i = 0, \dots, n$ au lieu de $\forall i = 1, \dots, n$.

7a. L'ensemble $K_n = \{(t_i)_{0\leq i\leq n},\ \forall i = 0 \dots n,\ t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$ est une partie fermée bornée, donc compacte, de $\mathbb{R}^n$ (espace vectoriel normé de dimension finie). $\mathcal{S}$ est alors compact comme image de K_n par l'application continue $(t_i)_{0\leq i\leq n} \longmapsto \sum_{i=0}^{n} t_i s_i$.

Soient $t \in [0,1]$ et $x, x' \in \mathcal{S}$, avec $x = \sum_{i=0}^{n} t_i s_i$ et $x' = \sum_{i=0}^{n} t'_i s_i$, où $(t_i)_{0\leq i\leq n}, (t'_i)_{0\leq i\leq n} \in K_n$. On a:

$$(1-t)x + tx' = \sum_{i=0}^{n}((1-t)t_i + tt'_i)s_i \in \mathcal{S}$$

car $\forall i = 0 \ldots n,\ (1-t)t_i + tt'_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n}\Big((1-t)t_i + tt'_i\Big) = (1-t)\sum_{i=0}^{n} t_i + t\sum_{i=0}^{n} t'_i = 1$.

$\mathcal{S}$ est donc un compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

7b. L'application $\varphi :\ (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i s_i$ est un isomorphisme affine de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même: elle est donc continue, ainsi que sa réciproque. En notant

$$\mathcal{S}_0 = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \mid \forall i = 1 \ldots n,\ t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1\right\},$$

nous avons $\mathcal{S} = \varphi(\mathcal{S}_0)$ et $\mathring{\mathcal{S}} = \varphi(\mathring{\mathcal{S}}_0)$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathring{\mathcal{S}}_0 = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \mid \forall i = 1 \ldots n,\ t_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i < 1\right\} = \Omega$$

pour obtenir le résultat demandé. Remarquons tout d'abord que Ω est un ouvert, comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[^{n+1}$ par l'application continue $(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto (t_1, \ldots, t_n, t_1 + \cdots + t_n)$. Comme $\Omega \subset \mathcal{S}_0$, on a $\Omega \subset \mathring{\mathcal{S}}_0$.

Pour montrer l'autre inclusion, nous allons munir $\mathbb{R}^n$ de la norme $|| \ ||_\infty$. Soit $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_0 \setminus \Omega$ et $r > 0$. On a deux cas possibles:

- s'il existe i tel que $t_i = 0$, $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i - r/2, t_{i+1}, \ldots, t_n) \in B_\infty(t, r) \setminus \mathcal{S}_0$;
- sinon, $t_1 + \ldots + t_n = 1$ et $(t_1 + r/2, t_2, \ldots, t_n) \in B_\infty(t, r) \setminus \mathcal{S}_0$.

Ceci prouve que $t \notin \mathring{\mathcal{S}}_0$, ce qui donne $\mathring{\mathcal{S}}_0 \subset \Omega$.

Supposons que $0 \in \mathring{\mathcal{S}}$ et que $\lambda \in [0, 1[$. On peut alors écrire $0 = \sum_{i=0}^{n} t'_i s_i$ avec $t'_0, \ldots, t'_n > 0$ et $t'_0 + \cdots + t'_n = 1$.

Pour tout $x = \sum_{i=0}^{n} t_i s_i \in \mathcal{S}$, on peut écrire:

$$\lambda x = \lambda x + (1-\lambda)0 = \sum_{i=0}^{n}\Big(\lambda t_i + (1-\lambda)t'_i\Big)s_i \in \mathring{\mathcal{S}}$$

car $\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ \lambda t_i + (1-\lambda)t'_i \geq (1-\lambda)t'_i > 0$ et $\sum_{i=0}^{n} \lambda t_i + (1-\lambda)t'_i = \lambda\sum_{i=0}^{n} t_i + (1-\lambda)\sum_{i=0}^{n} t'_i = 1$.

Ceci prouve donc que si 0 est intérieur à $\mathcal{S}$, $\lambda\mathcal{S} \subset \mathring{\mathcal{S}}$ pour tout $\lambda \in [0,1[$.

7c. En soustrayant la première colonne à toutes les autres colonnes et en développant le déterminant par rapport à la première ligne, nous obtenons:

$$|\det(\hat{s}_0,\ldots,\hat{s}_n)| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_0 & s_1 - s_0 & \ldots & s_n - s_0 \end{pmatrix}\right| = |\det(s_1 - s_0,\ldots,s_n - s_0)| = n!\,\mathrm{Vol}(\mathcal{S}).$$

On en déduit que le volume de $\mathcal{S}$ ne dépend pas de l'ordre des sommets, puisque qu'une permutation des s_i ne fera que permuter les $\hat{s}_i$, ce qui ne modifiera que le signe de $\det(\hat{s}_0,\ldots,\hat{s}_n)$.

L'énoncé passe un peu de temps à justifier la définition du volume de $\mathcal{S}$, qui ne dépend donc que de la partie $\mathcal{S}$, mais il oublie aussi de justifier que l'ensemble des sommets du simplexe $\mathcal{S}$ ne dépend également que de $\mathcal{S}$. Autrement-dit, si $(s_i)_{0\le i\le n}$ et $(s'_i)_{0\le i\le n}$ sont deux familles de points affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$ définissant le même simplexe $\mathcal{S}$, les deux familles sont égales à l'ordre près (les s_i sont les points extrémaux du convexe $\mathcal{S}$). Cette propriété difficile à démontrer aurait dû être énoncée et admise, d'autant qu'elle sera utilisée pour traiter le sens indirect de l'équivalence de la question 11.

8a. Pour tout entier $n \ge 1$, le simplexe $\mathcal{S}_n$ défini par les sommets $s_0 = (0,0)$, $s_1 = (0,1)$ et $s_2 = (n,0)$ est un simplexe entier n'ayant aucun point intérieur entier (ses points intérieurs sont les points (nt_2, t_1) avec $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ et $t_1 + t_2 < 1$, qui ne sont pas entiers puisque $0 < t_1 < 1$). Comme $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}_n) = n/2$, on obtient un simplexe entier de $\mathbb{R}^2$ de volume supérieur ou égal à V sans point entier intérieur en choisissant n suffisamment grand.

8b. Pour tout entier $n \ge 1$,soit $\mathcal{S}_n$ le simplexe entier de sommets $s_0 = (0,0,0)$, $s_1 = (0,0,1)$, $s_2 = (0,1,1)$ et $s_3 = (n,1,0)$. Ses éléments sont les points $x = (nt_3, t_2 + t_3, t_1 + t_2)$ avec $t_1, t_2, t_3 \ge 0$ et $t_1 + t_2 + t_3 \le 1$. Si un tel point est entier, on a $0 \le t_1 + t_2 \le t_1 + t_2 + t_3 \le 1$ et $t_1 + t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1 + t_2 \in \{0,1\}$. De même, $t_2 + t_3 \in \{0,1\}$. Nous avons alors trois cas possibles:

- $t_1 + t_2 = 0$, ce qui impose $t_1 = t_2 = 0$ et $t_3 \in \{0,1\}$;
- $t_2 + t_3 = 0$, ce qui impose $t_2 = t_3 = 0$ et $t_1 \in \{0,1\}$;
- $t_1 + t_2 = t_2 + t_3 = 1$, d'où $2 = t_1 + 2t_2 + t_3 \le 2(t_1 + t_2 + t_3) \le 2$: ces inégalités sont donc des égalités, ce qui impose $t_1 = t_3 = 0$ et $t_2 = 1$.

Dans tous les cas, les seuls points entiers de $\mathcal{S}$ sont ses sommets. Comme $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}_n) = n/6$, on obtient un simplexe entier de $\mathbb{R}^3$ de volume supérieur ou égal à V dont les seuls points entiers sont ses sommets en choisissant n suffisamment grand.

9a. Remarquons déjà que la partie $I = \{\lambda \ge 0,\ -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$ est non vide, puisqu'elle contient 0. Si λ_1 et λ_2 sont deux éléments de I et si $t \in [0,1]$:

$$\forall x \in \mathcal{K},\ -((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2)x = (1-t)(-\lambda_1 x) + t(-\lambda_2 x) \in \mathcal{K}$$

car $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ et $\mathcal{K}$ est convexe. I est donc un intervalle.

9b. Remarquons que $a(\mathcal{K})$ est bien défini (a *priori* dans $[0,+\infty]$) car I est non vide.

Comme K est compact, il est borné. Il existe donc un réel $M \ge 0$ tel que $||x||_\infty \le M$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. Comme 0 est intérieur à $\mathcal{K}$, il existe $x_0 \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$. Pour $\lambda \in I$, on a $-\lambda x_0 \in \mathcal{K}$, donc $||-\lambda x_0||_\infty \le M$ et $\lambda \le \dfrac{M}{||x_0||_\infty}$: ceci prouve que I est majoré, i.e. que $a(\mathcal{K}) < +\infty$.

D'autre part, comme $0 \in \mathring{\mathcal{K}}$, il existe un réel $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset \mathcal{K}$. Pour $x \in \mathcal{K}$, nous avons alors $-\dfrac{r}{M}\, x \in \overline{B(0,r)} \subset \mathcal{K}$, donc $\dfrac{r}{M}$ est un élément strictement positif de I et $a(\mathcal{K}) > 0$. Il reste à montrer que cette borne supérieure est atteinte. Soit $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ une suite d'éléments de I qui converge vers $a(\mathcal{K})$. On a:

$$\forall x \in \mathcal{K},\ \forall i \in \mathbb{N},\ -\lambda_i x \in \mathcal{K}$$

À x fixé, $(-\lambda_i\, x)_{i\geq 0}$ converge vers $-a(\mathcal{K})x$, qui est donc élément de $\mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est compact donc fermé. Ceci prouve que $a(\mathcal{K}) \in I$, i.e. que $a(\mathcal{K}) = \max\{\lambda > 0 \mid -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$.

9c. Comme $\mathcal{K}$ est un compact non vide et non réduit à $\{0\}$, il existe $y \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ tel que $||y||_\infty = \sup_{x\in\mathcal{K}} ||x||_\infty$ (l'application $x \longmapsto ||x||_\infty$ est continue sur le compact $\mathcal{K}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes). Si $\lambda > 1$, $-\lambda y \notin \mathcal{K}$ puisque $||-\lambda y||_\infty > ||y||_\infty$. On en déduit que $I \subset [0,1]$, ce qui donne $0 < a(\mathcal{K}) \leq 1$ (on a vu à la question précédente que $a(\mathcal{K})$ était strictement positif).

Si $\mathcal{K}$ est symétrique par rapport à 0, $-\mathcal{K} = \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ donc $1 \in I$ et $1 \leq a(\mathcal{K}) \leq 1$.

Si $a(\mathcal{K}) = 1$, $-\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ (car $a(\mathcal{K}) \in I$) et pour tout $x \in \mathcal{K}$, $-x \in \mathcal{K}$: $\mathcal{K}$ est symétrique par rapport à 0.

10a. Il y a une nouvelle fois une maladresse dans l'énoncé: si $\beta = 0$, $\beta\mathcal{S}$ n'est pas un simplexe et $\mathrm{Vol}(\beta\mathcal{S})$ n'est pas défini. Notons $(s_0, \ldots, s_n)$ les sommets de $\mathcal{S}_n$ et fixons $\beta \neq 0$. La partie $\beta\mathcal{S}$ est alors un simplexe de sommets $(\beta s_0, \ldots, \beta s_n)$, d'où, par n-linéarité du déterminant:

$$\mathrm{Vol}(\beta\mathcal{S}) = \frac{1}{n!}\, |\det(\beta(s_1 - s_0), \ldots, \beta(s_n - s_0))| = \frac{1}{n!}\, |\beta^n \det(s_1 - s_0, \ldots, s_n - s_0)| = |\beta|^n\, \mathrm{Vol}(\mathcal{S}).$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} - x$ est le simplexe de sommet $(s_0 - x, \ldots, s_n - x)$, donc:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S} - x) = \big|\det\big(s_1 - x - s_0 + x, \ldots, s_n - x - s_0 + x\big)\big| = \big|\det\big(s_1 - s_0, \ldots, s_n - s_0\big)\big| = \mathrm{Vol}(\mathcal{S}).$$

Pour $\lambda \in]0,1]$ (il faut une nouvelle fois avoir $\lambda \neq 0$), nous en déduisons:

$$\mathrm{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) = \lambda^n \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \xrightarrow[\lambda\to 1^-]{} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) > k$$

donc il existe $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\mathrm{Vol}\left(\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, 1]$.

10b. Une nouvelle fois l'énoncé est maladroit: il sous-entend que l'on choisit λ assez proche de 1 pour avoir $\mathrm{Vol}\left(\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$, mais il oublie de préciser que $\lambda \in]0,1[$. Enfin, on devrait écrire "soient $v_0, \ldots, v_k$ $k+1$ points distincts" au lieu de "soient $v_0, \ldots, v_k$ **les** $k+1$ points distincts".

Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $x_i \in \mathcal{S}$ tel que $v_i = \dfrac{\lambda a}{a+1} x_i$. On a alors, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\frac{a(v_i - v_j)}{a+1} = \frac{\lambda a}{a+1}\left(\frac{a}{a+1}x_i + \frac{1}{a+1}(-a x_j)\right)$$

Comme $-a\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, $-a x_j \in \mathcal{S}$. Ainsi, x_i et $-a x_j$ sont éléments de $\mathcal{S}$ et $\dfrac{a}{a+1}$ et $\dfrac{1}{a+1}$ sont deux réels positifs de somme 1: $\dfrac{a}{a+1}x_i + \dfrac{1}{a+1}(-a x_j) \in \mathcal{S}$ par convexité de $\mathcal{S}$, soit $\dfrac{a(v_i - v_j)}{a+1} \in \dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}$.

On en déduit que $v_i - v_j \in \lambda S \subset \mathring{\mathcal{S}}$, en appliquant 7b (c'est ici qu'apparaît la condition $\lambda < 1$).

10c. Soit j tel que v_j soit le maximum des (v_i) pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{R}^n$. Cet ordre est défini par récurrence sur n: si $n = 1$, c'est l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$; si $n \geq 2$, on a $(a_1, \dots a_n) < (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $(a_1 < b_1)$ ou $(a_1 = b_1$ et $(a_2, \dots, a_n) < (b_2, \dots, b_n))$. Dans la suite de la preuve, nous noterons $x[i]$ la i-ème composante d'un vecteur x.

Comme les v_i sont deux à deux distincts, les vecteurs $(v_i - v_j)_{0 \leq i \leq n}$ sont également deux à deux distincts, ainsi que les vecteurs $(v_j - v_i)_{0 \leq i \leq n}$. Il reste à montrer que 0 est le seul vecteur commun à ces deux familles. Soient donc $i, k \in \{0, \dots, n\}$ tels $v_i - v_j = v_j + v_i$, i.e. $v_i + v_k = 2v_j$.

En particulier, $v_i[1] + v_k[1] = 2v_j[1]$, ce qui impose $v_i[1] = v_k[1] = v_j[1]$, car $v_j[1]$ est le maximum des $v_m[1]$ pour $m \in \{0, \dots, n\}$. Les inégalités $v_i \leq v_j$ et $v_k \leq v_j$ donnent ensuite $v_i[2] \leq v_j[2]$ et $v_k[2] \leq v_j[2]$, d'où $v_i[2] = v_k[2] = v_j[2]$ car $v_i[2] + v_k[2] = 2v_j[2]$. Nous obtenons par itération que $v_i = v_j = v_k$, soit $i = j = k$: le seul vecteur commun aux deux familles est bien le vecteur nul.

Nous avons donc explicité $2k+1$ points entiers distincts appartenant à $\mathring{\mathcal{S}}$, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

Notons $x = \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$. Nous avons $k < x \leq k+1$, d'où $2k+1 \geq 2x - 1$. Si $x \geq 1$, $2x - 1 \geq x$, ce qui donne

$$\mathrm{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 2k + 1 \geq x.$$

Sinon, comme 0 est un point intérieur à $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 1 > x.$$

Nous avons donc dans tous les cas, en remarquant que $1 + a \leq 2$:

$$\mathrm{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \geq \mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a(\mathcal{S})}{2}\right)^n.$$

Troisième partie

11. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux simplexes entiers, de sommets (entiers) respectifs $(s_0, \dots, s_n)$ et $(s'_0, \dots, s'_n)$.

Supposons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents et fixons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (quitte à réordonner les sommets) telle que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout i. Nous avons alors:

$$\forall j \in \{0, \dots, n\},\ s'_i = As_i - (As_0 - s'_0)$$

En posant $b = As_0 - s'_0 \in \mathbb{Z}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned} A\mathcal{S} - b &= \left\{ A\left(\sum_{i=0}^n t_i s_i\right) - b,\ \forall i = 0 \dots n,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i A s_i - \sum_{i=0}^n t_i b,\ \forall i = 0 \dots n,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i s'_i,\ \forall i = 0 \dots n,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \mathcal{S}' \end{aligned}$$

Il existe donc une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et un vecteur entier b tel que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$. On montre facilement que $A\mathcal{S} - b$ est le simplexe de sommets $(As_0 - b, \ldots, As_n - b)$. On en déduit (voir remarque de la question 7c) que quitte à permuter les s'_i, on peut supposer que $s'_i = As_i - b$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, ce qui donne bien $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents.

12. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux simplexes équivalents: il existe des numérotations de leurs sommets $(s_0, \ldots, s_n)$ et $(s'_0, \ldots, s'_n)$ et une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telles que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout i. Nous avons alors:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}') = |\det(A(s_1 - s_0), \ldots, A(s_n - s_0))| = |\det(A)\det(s_1 - s_0, \ldots, s_n - s_0)| = \mathrm{Vol}(\mathcal{S})$$

car $\det(A) = \pm 1$.

Il existe d'autre part $b \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$. Notons φ la bijection affine de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même qui à x associe $Ax - b$. Comme φ réalise également une bijection de $\mathbb{Z}^n$ sur lui-même, on a:

$$\varphi(\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{S}) = \varphi(\mathbb{Z}^n) \cap \varphi(\mathcal{S}) = \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{S}'$$

donc $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ contiennent autant de points entiers.

D'autre part, φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathring{\mathcal{S}'})$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{S}$, donc $\varphi^{-1}(\mathring{\mathcal{S}'}) \subset \mathring{\mathcal{S}}$, soit $\mathring{\mathcal{S}'} \subset \varphi(\mathring{\mathcal{S}})$.

De même, φ^{-1} est continue, donc $\varphi(\mathring{\mathcal{S}}) = \left(\varphi^{-1}\right)^{-1}(\mathring{\mathcal{S}})$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{S}'$, donc $\varphi(\mathring{\mathcal{S}}) \subset \mathring{\mathcal{S}'}$.

On en déduit donc:

$$\varphi(\mathbb{Z}^n \cap \mathring{\mathcal{S}}) = \varphi(\mathbb{Z}^n) \cap \varphi(\mathring{\mathcal{S}}) = \mathbb{Z}^n \cap \mathring{\mathcal{S}'}$$

et les simplexes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ contiennent le même nombre de points intérieurs entiers.

13 Ce résultat, conséquence de la question (fausse) 6, est également faux. Clément de Seguins Pazzis a proposé le contre-exemple: $\mathcal{S}$ simplexe de $\mathbb{R}^2$ de sommets $s_0 = (0,0)$, $s_1 = (p, a)$ et $s_2 = (0,1)$ avec $p \geq 5$ premier et a compris entre 3 et $p - 1$.

Avec $p = 5$ et $a = 3$, on obtient un simplexe de volume 1, donc on devrait avoir $c_1 c_2 = 6$. Il suffit alors de tester tous les simplexes entiers $\mathcal{S}'$ contenus dans $[0,6]^2$ et de vérifier qu'aucun d'entre eux n'est équivalent à $\mathcal{S}$ (sans oublier de permuter les points s_i). Sans perte de généralité, on peut imposeér à $\mathcal{S}'$ d'avoir l'origine pour sommet. Ce calcul peut se faire informatiquement: on note $M_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (ces trois matrices correspondent aux triplets (s_0, s_1, s_2), (s_1, s_2, s_0) et (s_2, s_1, s_0) et on peut se passer d'étudier les trois autres permutations, obtenues en permutant les colonnes). On génère ensuite toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. Si $ad - bc = \pm 6$, on calcule MM_i^{-1} (matrice de déterminant ± 1) pour chaque i et on vérifie que le résultat obtenu n'est pas élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

On obtient cependant un résultat intéressant en appliquant le résultat modifié de la question 6. Soit donc $\mathcal{S}$ un simplexe entier de sommets $(s_0, \ldots, s_n)$. La matrice $M = (s_1 - s_0 \,|\, \ldots \,|\, s_n - s_0)$ est à coefficients entiers: il existe donc $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AM = (y_1 \,|\, \ldots \,|\, y_n) = (c_{i,j})$ soit triangulaire inférieure, avec $c_{i,i} > 0$ pour tout i et $0 \leq c_{i,j} < c_{j,j}$ pour tous i, j tels que $1 \leq j < i \leq n$. En posant $y_0 = 0$, le simplexe $\mathcal{S}'$ de sommets $(y_0, y_1, \ldots y_n)$ est équivalent à $\mathcal{S}$ (donc entier) et on a bien

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vol}(\mathcal{S}') = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} c_{i,i}$$

14 En appliquant ce résultat modifié, les c_i sont des entiers naturels non nuls, donc $c_j \leq \prod_{i=1}^{n} c_i = n!\,\mathrm{Vol}(\mathcal{C})$ pour tout j. On en déduit que les composantes des vecteurs y_j sont dans l'intervalle $[0, n!\,\mathrm{Vol}(\mathcal{C})]$: tout simplexe entier $\mathcal{S}$ est donc équivalent à un simplexe (entier) contenu dans le cube $[0, n!\,\mathrm{Vol}(\mathcal{C})]^n$.

15. Il y a une dernière erreur d'énoncé: il faut lire "exactement k points intérieurs entiers" au lieu de "exactement k points intérieurs". Un simplexe entier $\mathcal{S}$ possédant exactement k points intérieurs entier est équivalent à un simplexe $\mathcal{S}'$ contenu dans le cube $[0, n!\,C(n,k)]^n$. Comme il n'existe qu'un nombre fini de tels simplexes (les $n+1$ sommets de $\mathcal{S}'$ doivent appartiennent à l'ensemble fini $\{0, \ldots, n!\,C(n,k)\}^n$), il n'existe à équivalence près qu'un nombre fini de simplexes de $\mathbb{R}^n$ ayant exactement k points intérieurs.

On remarquera que la propriété $k \geq 1$ est indispensable, puisque le volume d'un simplexe entier sans point intérieur entier est non bornée dès que $n \geq 2$ (question 8): il existe donc une infinité de simplexes entiers sans points intérieurs entiers et deux à deux non équivalents.

Pour conclure, on peut regretter qu'en plus des erreurs graves (2 résultats faux) et des multiples imprécisions et petites erreurs, l'énoncé admette deux théorèmes délicats, pour en déduire des conséquences assez évidentes (c'est en tout cas manifestement le cas pour cette dernière question).