**École Normale Supérieure**

**Concours d'admission 2015** **Filière MP**

# Composition de Mathématiques D – (U)

(Durée : 6 heures)

*L'utilisation des calculatrices est interdite*

*Sujet saisi par Michel Quercia (*`michel.quercia@prepas.org`*) d'après l'original.*

* * *

Le problème est consacré à l'étude de la répartition de certains ensembles d'entiers dans les suites arithmétiques. Les deux premières parties sont consacrées à des ensembles arbitraires, et les deux suivantes à l'ensemble des nombres premiers.

Les parties **I**, **II** et **III** sont indépendantes. La partie **IV** utilise les résultats de la partie **III**.

## Préambule

Le cardinal d'un ensemble fini $X$ est noté $|X|$. Si $E$ et $F$ sont deux ensembles quelconques, on note $E \setminus F$ l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$.

On dira qu'une suite finie $a_1, \dots, a_r$ d'entiers relatifs est en progression arithmétique si l'on peut trouver deux entiers $a$ et $b$ tels que $a_i = a + bi$ pour $i = 1, \dots, r$. L'entier $b$ est alors la *raison* de cette progression arithmétique.

## I

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, la *discrépance* de $F$ par rapport à $E$ est l'entier positif

$$\Delta(E, F) = \big||F \cap E| - |E \setminus F|\big|.$$

**1)** Soit $X$ un ensemble fini de cardinal $d$. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de $X$.

**a)** Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(X)$.

**b)** Calculer en fonction de $d$ les sommes $\sum_{k=0}^{d} k\binom{d}{k}$ et $\sum_{k=0}^{d} k(k-1)\binom{d}{k}$.

**c)** Calculer les sommes $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}|Y|$ et $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}|Y|^2$.

**d)** Montrer l'égalité $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}\Delta(X,Y)^2 = d$.

**2)** Si $N$ et $q$ sont deux entiers strictement positifs, et si $a$ est un entier relatif, on note $S_{q,a}(N)$ l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, N\}$ qui sont congrus à $a$ modulo $q$. On note $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(\{1, \dots, N\})$.

**a)** Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant N$, le cardinal de $S_{q,a}(N)$ est strictement inférieur à $1 + N/q$.

**b)** Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant t \leqslant N$, on a

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(N)}\sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{q}\Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 \leqslant 2Nt.$$

**3)** Déduire de la question précédente qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $N$ strictement positif, il existe un sous-ensemble $Y$ de $\{1, \dots, N\}$ vérifiant, pour tout $q$ compris entre $1$ et $N$ et tout $a$ entre $1$ et $q$, l'inégalité $\Delta(S_{q,a}(N, Y) \leqslant CN^{2/3}$. On pourra pour cela choisir judicieusement la valeur de $t$ dans l'inégalité ci-dessus.

## II

Dans cette partie, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui sont nulles en dehors d'un ensemble fini. Si $c$ est un élément de $\mathcal{E}$, on note $\widehat{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n)e^{2i\pi nx}$. On pourra remarquer que, par définition de l'espace $\mathcal{E}$, le membre de droite de l'expression ci-dessus est une somme finie.

**1)** **a)** Soit $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, montrer les égalités

$$\int_{x=0}^{1} \widehat{c}(x)e^{-2i\pi nx}\, dx = c(n) \text{ et } \int_{x=0}^{1} |\widehat{c}(x)|^2\, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|^2.$$

**b)** Soient $c$ et $d$ deux éléments de $\mathcal{E}$. On définit leur produit de convolution $c * d : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$(c * d)(n) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ p+q=n} c(p)d(q).$$

Montrer que $c * d$ est bien défini et appartient à $\mathcal{E}$.

**c)** Avec les notations de la question précédente, montrer l'égalité $\widehat{c * d} = \widehat{c}\widehat{d}$.

Dans ce qui suit, soit $N$ un entier strictement positif et soit $Y$ un sous-ensemble de $\{1, \dots, N\}$ de cardinal $r$. On note $\eta = r/N$ et $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\chi(k) = 1 - \eta$ si $k \in Y$, $\chi(k) = -\eta$ si $k \in \{1, \dots, N\} \setminus Y$ et $\chi(k) = 0$ sinon.

**2)** Montrer l'égalité $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) = 0$.

**3)** Si $E$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$, on note $V(E)$ la quantité $|E \cap Y| - \eta |E \cap \{1, \dots, N\}|$. Soit $c_{-E}$ la fonction caractéristique de $-E$, qui vaut $1$ en $n$ si $-n \in E$, et $0$ sinon. Montrer l'égalité $V(E) = (\chi * c_{-E})(0)$.

Soit $s$ un entier positif inférieur ou égal à $N$. On s'autorisera plus tard à choisir $s$ de manière adaptée en fonction de $N$.

**4)** Soit $q$ un entier strictement positif. On note $c_q$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$$E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } q \text{ divise } n \text{ et } |n| \leqslant sq\}.$$

**a)** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe deux entiers distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$, et un entier relatif $h \in \mathbb{Z}$, tels que $|\alpha_i - \alpha_j - h| \leqslant 1/n$.

**b)** Soit $\alpha$ un nombre réel, et soit $Q$ un nombre entier strictement positif. Montrer qu'il existe un entier $q \in \{1, \dots, Q\}$ et un entier $h$ tels que $|q\alpha - h| \leqslant 1/Q$.

**c)** Soit $\alpha$ un nombre réel. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de $N$ et $s$, et un entier $q \leqslant 8s$ tel que $|\widehat{c}_q(\alpha)| \geqslant Ks$.

**5)** Soit $p$ un entier. On note $E_{q,p} = p + E_q = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tq } n - p \in E_q\}$.

**a)** En utilisant la question **II-1a**, montrer l'inégalité

$$\sum_{1 \leqslant q \leqslant 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 \geqslant K^2 \eta (1 - \eta) N s^2.$$

**b)** En choisissant judicieusement $s$, montrer que l'on peut trouver une constante $K' > 0$ indépendante de $N$ et de $Y$, et un sous-ensemble $Z$ d'éléments de $\{1, \dots, N\}$ en progression arithmétique tels que

$$\big||Y \cap Z| - \eta |Z|\big| \geqslant K' \sqrt{\eta(1 - \eta)} N^{1/4}.$$

## III

**1)** Soit $\omega : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\omega(u) = 1/u$ si $1 \leqslant u \leqslant 2$ et

$$\omega(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{u}\int_{t=1}^{u-1} \omega(t)\,dt$$

pour $u > 2$.

**a)** Montrer que la formule ci-dessus définit bien une fonction continue sur $[1,\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]2,\infty[$.

**b)** Montrer que pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $1/u \leqslant \omega(u) \leqslant 1$.

**c)** Montrer que $u\omega'(u) = -\int_{t=u-1}^{u} \omega'(t)\,dt$ pour tout réel $u > 3$.

**d)** Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a $\lim_{u\to\infty} u^k\omega'(u) = 0$.

**e)** Montrer que $\omega$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans la suite du problème, on notera $L$ cette limite.

**f)** Soit $\tilde\omega$ la fonction $u \mapsto \omega(u) - L$. Montrer l'égalité

$$\forall\, u > 3,\ u\tilde\omega(u) = -\int_{t=u-1}^{\infty} \tilde\omega(t)\,dt.$$

**g)** Montrer que pour tout réel $C \geqslant 1$, il existe deux nombres réels $u, v > C$ tels que $\omega(u) < L < \omega(v)$.

Dans la suite du problème, si $x$ est un nombre réel strictement positif, on notera $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$. On admettra le théorème suivant, dit *théorème des nombres premiers.*

**Théorème III.1** *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall\, x > 1,\ \left|\pi(x) - \frac{x}{\ln x}\right| \leqslant C\frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Dans la suite on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

**2)** Montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leqslant b$, on ait

$$\left|\pi(b) - \pi(a) - \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{1}{\ln n}\right| \leqslant K\frac{b}{(\ln b)^2}.$$

**3)** Soit $f : ]1,\infty[ \to [0,\infty[$ une fonction, et soient $1 < a \leqslant b$ deux nombres réels. Soit $a^-$ le plus grand entier strictement inférieur à $a$, et soit $b^0$ le plus grand entier inférieur ou égal à $b$, c'est-à-dire la partie entière de $b$.

**a)** Montrer l'égalité

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\ a\leqslant p\leqslant b} f(p) = \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \pi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \pi(b^0)f(1+b^0).$$

**b)** Montrer l'égalité

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{f(n)}{\ln n} = \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \psi(n)(f(n) - f(n+1)) - \pi(a^-)f(1+a^-) + \psi(b^0)f(1+b^0),$$

où l'on définit, pour tout réel $x$ entre $a$ et $b$, $\psi(x) = \pi(a^-) + \sum_{a\leqslant k\leqslant x} 1/\ln(k)$.

**c)** En déduire l'inégalité

$$\left|\sum_{p\in\mathcal{P},\ a\leqslant p\leqslant b} f(p) - \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{f(n)}{\ln n}\right| \leqslant K\frac{bf(1+b^0)}{(\ln b)^2} + K\sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{n}{(\ln n)^2}|f(n+1) - f(n)|,$$

où K est la constante introduite dans la question **2**.

**d)** Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n(\ln n)^k)$ converge et que pour tout réel $a > 1$, on a

$$\sum_{n\geqslant a} \frac{1}{n(\ln n)^k} \leqslant \frac{1}{(k-1)(\ln a)^{k-1}} + \frac{1}{a(\ln a)^k}.$$

**e)** En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tous réels $1 < a \leqslant b$, on ait

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\ a\leqslant p\leqslant b} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leqslant \frac{1}{2(\ln a)^2} + \frac{K'}{(\ln a)^3}.$$

**4)** Montrer l'existence d'une constante $K'' > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$, on ait

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{(\ln n)^2} \leqslant K'' \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Si $x$ et $y$ sont deux réels strictement positifs, on notera $\Phi(x, y)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et $x$ au sens large dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à $y$. Par convention, pour tout réel $y > 0$, on pose $\Phi(1, y) = 1$.

**5)** Pour tous réels $1 < y < x$ tels que $\sqrt{x} < y$, montrer l'inégalité $|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leqslant 1$ et en déduire qu'il existe une constante $D_1 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel $y$ satisfaisant $\sqrt{x} \leqslant y < x$, on ait

$$\left|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln x}\right| \leqslant D_1\left(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y}\right).$$

**6)** Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs. Pour tout $y' \geqslant y$, montrer l'égalité

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y') + \sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<y'} \Phi\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

**7) a)** Pour tout réel $x > 1$ et tout réel $y$ satisfaisant $x^{1/3} \leqslant y < x^{1/2}$, montrer l'égalité

$$1 + \int_{t=y}^{\sqrt{x}} \frac{(\ln x)\,dt}{t(\ln t)^2((\ln x)/(\ln t) - 1)} = \frac{\ln x}{\ln y}\,\omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right).$$

**b)** Montrer l'existence d'une constante $D_2 > 0$ telle que pour tout réel $x > 1$ et tout réel $y$ satisfaisant $x^{1/3} \leqslant y < x^{1/2}$, on ait

$$\left|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y}\,\omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)\right| \leqslant D_2 \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On appliquera la question **III-6** avec $y' = \sqrt{x}$.

**c)** Montrer l'existence d'une constante $D > 0$ telle que pour tous réels $1 < y < \sqrt{x}$, on ait

$$\left|\Phi(x, y) - \frac{x}{\ln y}\,\omega\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)\right| \leqslant D \frac{x}{(\ln y)^2}.$$

On pourra pour cela raisonner par récurrence sur l'unique entier $n \geqslant 2$ tel que $x^{1/(n+1)} \leqslant y < x^{1/n}$.

## IV

Dans cette partie, si $q$ est un entier strictement supérieur à 1, on note $\varphi(q)$ le nombre d'entiers $n \in \{1, \dots, q\}$ qui sont premiers à $q$.

**1) a)** Soit $y > 2$ un nombre réel. On note $q(y)$ le produit des nombres premiers strictement inférieurs à $y$. Montrer que, quand $x$ tend vers $+\infty$, on a

$$\Phi(x, y) \sim x\frac{\varphi(q(y))}{q(y)}.$$

**b)** En utilisant la partie précédente, en déduire

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\varphi(q(y))}{q(y)} \ln(y) = L$$

où $L$ est le nombre réel défini dans la question **III-1e**.

**c)** En utilisant les questions **3** et **4** de la partie précédente, montrer par ailleurs que quand $y$ tend vers $+\infty$, on a

$$\ln(q(y)) \sim y.$$

**2)** Soit $y > 2$ un nombre réel. Afin d'alléger les notations, on notera $q = q(y)$. Soient $m$ et $n$ deux entiers strictement positifs. On considère la matrice rectangulaire $M(m, n, q)$ de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indice $(i, j)$ est

$$M(m, n, q)_{ij} = i + (m + j)q$$

pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, et l'on suppose $n < q$.

**a)** Montrer que le nombre de lignes de $M(m, n, q)$ contenant au moins un nombre premier est inférieur ou égal à $\Phi(n, y)$.

**b)** Soit $N$ le nombre de nombres premiers apparaissant comme coefficients de la matrice $M(m, n, q)$. Montrer l'égalité

$$N = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \big(\pi(n + (m + j)q) - \pi((m + j)q)\big).$$

**c)** On note $M_s = N/m$ et $M_a = N/\Phi(n, y)$. En supposant $N > 0$, montrer l'égalité

$$M_s\Big(\frac{n}{\ln(mq)}\Big)^{-1} \times M_a^{-1}\frac{mq}{\varphi(q)\ln(mq)} = \frac{\Phi(n, y)}{n} \times \frac{q}{\varphi(q)}.$$

**3)** En appliquant les résultats ci-dessus à des valeurs de $m$ et $n$ bien choisies en fonction de $y$, montrer que l'un des deux énoncés suivants est vrai :

– Soit $\alpha_0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre réel $\alpha > \alpha_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $x > 1$ tels que

$$(\ln x)(\pi(x + (\ln x)^\alpha) - \pi(x)) > \lambda(\ln x)^\alpha.$$

– Soit $\beta_0 > 0$ un nombre réel. On peut trouver un nombre entier $\beta > \beta_0$, une constante $\lambda > 1$ et une infinité d'entiers $q > 1$ tels qu'il existe une suite d'entiers $a_1, \dots, a_{q^\beta}$ premiers à $q$, en progression arithmétique de raison $q$, avec $q^\beta < a_1 < 2q^{\beta+1}$, pour laquelle le nombre de nombres premiers parmi les $a_i$ soit strictement inférieur à

$$\lambda^{-1}\frac{q^\beta}{\ln(q^\beta)\varphi(q)}.$$

On commencera par estimer le membre de droite dans l'égalité de la question précédente, et on appliquera la question **1g** de la partie **III**.

* *
*