Corrigé

I

1) a) Par récurrence sur d, $|\mathcal{P}(X)| = 2^d$.

b) $\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}x^k = (1+x)^d$. Par dérivations et substitution de 1 à x on obtient $\sum_{k=0}^{d} k\binom{d}{k} = d2^{d-1}$ et $\sum_{k=0}^{d} k(k-1)\binom{d}{k} = d(d-1)2^{d-2}$.

c) $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}|Y| = 2^{-d}\sum_{k=0}^{d} k\binom{d}{k} = d/2$.

$\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}|Y|^2 = 2^{-d}\sum_{k=0}^{d} k^2\binom{d}{k} = 2^{-d}\sum_{k=0}^{d}(k(k-1)+k)\binom{d}{k} = d(d+1)/4$.

d) Pour $Y\in\mathcal{P}(X)$, on a $\Delta(X,Y)^2 = (2|Y|-|X|)^2 = 4|Y|^2 - 4|X||Y| + |X|^2$.
Il vient $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|}\sum_{Y\in\mathcal{P}(X)}\Delta(X,Y)^2 = d(d+1) - 2d^2 + d^2 = d$.

2) a) $x\in S_{q,a}(N) \Leftrightarrow (x-a)/q \in \mathbb{Z}\cap[(1-a)/q,(N-a)/q] = [\![0,\lfloor(N-a)/q\rfloor]\!]$
donc $|S_{q,a}(N)| = 1+\lfloor(N-a)/q\rfloor \leqslant 1+(N-a)/q < 1+N/q$.

b) Pour $S\in\mathcal{P}(N)$ et $S' = [\![1,N]\!]\setminus S$ on a
$\sum_{Y\in\mathcal{P}(N)}\Delta(S,Y)^2 = \sum_{Y_1\in\mathcal{P}(S)}\sum_{Y_2\in\mathcal{P}(S')}\Delta(S,Y_1)^2 = |\mathcal{P}(S)||\mathcal{P}(S')||S| = |\mathcal{P}(N)||S|$ d'après **1d**.
d'où $\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|}\sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{q}\sum_{Y\in\mathcal{P}(N)}\Delta(S_{q,a}(N),Y)^2 = \sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{q}|S_{q,a}(N)| = \sum_{q=1}^{t}N = Nt$.

3) Soit $t\in[\![1,N]\!]$ à choisir. On prend Y tel que $s = \sum_{q=1}^{t}\sum_{a=1}^{q}\Delta(S_{q,a}(N),Y)^2$ soit minimal. Pour ce choix, on a $s\leqslant 2Nt$ et $\Delta(S_{q,a}(N),Y)\leqslant\sqrt{2Nt}$ pour tous q,a tels que $1\leqslant a\leqslant q\leqslant t$. En prenant $t=\lfloor N^{1/3}\rfloor$ et $C\geqslant\sqrt{2}$ on obtient l'inégalité demandée.

Reste le cas $q > N^{1/3}$: $\Delta(S_{q,a}(N),Y)\leqslant|S_{q,a}(N)| < 1+N/q < 1+N^{2/3}\leqslant 2N^{2/3}$. Donc $C=2$ convient dans les deux cas.

II

1) a) $\int_{x=0}^{1}\widehat{c}(x)e^{-2i\pi nx}\,dx = \int_{x=0}^{1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c(k)e^{2i\pi(k-n)x}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}c(k)\int_{x=0}^{1}e^{2i\pi(k-n)x}\,dx$.
L'interversion série-intégrale est justifiée par le fait que la série est une somme est finie.
Par calcul, $\int_{x=0}^{1}e^{2i\pi(k-n)x}\,dx = 0$ si $k\neq n$ et 1 si $k=n$, ce qui donne la première formule.

On a ensuite

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{1}|\widehat{c}(x)|^2\,dx &= \int_{x=0}^{1}c(x)\overline{c(x)}\,dx\\ &= \int_{x=0}^{1}c(x)(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c(n)}e^{-2i\pi nx})\,dx\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{c(n)}(\int_{x=0}^{1}c(x)e^{-2i\pi nx}\,dx)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c(n)|^2.\end{aligned}$$

b) La somme définissant $(c*d)(n)$ est une somme finie puisque $c\in\mathcal{E}$, donc $c*d$ est bien défini. En supposant $c(p)=0$ pour $|p|\geqslant P$ et $d(q)=0$ pour $|q|\geqslant Q$, on obtient $(c*d)(n)=0$ pour $|n|\geqslant P+Q$ donc $c*d\in\mathcal{E}$.

c) Développer le produit $\widehat{c}(x)\widehat{d}(x)$ sachant que les sommes sont finies.

2) Calcul immédiat.

3) On a bien $\chi, c_{-E}\in\mathcal{E}$ donc $\chi * c_{-E}$ existe. De plus,
$(\chi * c_{-E})(0) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\chi(p)c_{-E}(p) = \sum_{p\in E}\chi(p) = (1-\eta)|E\cap Y| - \eta|E\cap[\![1,N]\!]\setminus Y| = V(E)$.

4) a) On considère les réels $\beta_i = \alpha_i - \lfloor\alpha_i\rfloor\in[0,1[$ que l'on classe par ordre croissant

$$0\leqslant\beta_{i_1}\leqslant\beta_{i_2}\leqslant\ldots\leqslant\beta_{i_n} < 1\leqslant\beta_{i_1}+1.$$

S'il existe $k \geqslant 2$ tel que $\beta_{i_k} \leqslant \beta_{i_{k-1}} + 1/n$ alors $0 \leqslant \alpha_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}} - (\lfloor \alpha_{i_k} \rfloor - \lfloor \alpha_{i_{k-1}} \rfloor) \leqslant 1/n$. Sinon, $\beta_{i_n} > \beta_{i_1} + (n-1)/n$ et $0 \leqslant \alpha_{i_1} - \alpha_{i_n} - (\lfloor \alpha_{i_1} \rfloor - \lfloor \alpha_{i_n} \rfloor + 1) < 1/n$.

b) Prendre $n = Q$, $\alpha_i = i\alpha$.

c) $|\widehat{c}_q(\alpha)| = |\sum_{k=-s}^{s} e^{2i\pi kq\alpha}| = |1 + 2\sum_{k=1}^{s} \cos(2\pi kq\alpha)| \geqslant 1 + 2s - 2\sum_{k=1}^{s} |1 - \cos(2\pi kq\alpha)|$.

Le cas $s = 0$ n'est pas clairement exclus par l'énoncé, mais la question n'a pas de sens dans ce cas car il faudrait $q = 0$ et c_0 n'est pas défini. On suppose donc $s \geqslant 1$, on prend $Q = 8s$ et q associé dans **b**. Il vient $|1 - \cos(2\pi kq\alpha)| = |\cos(2\pi kh) - \cos(2\pi kq\alpha)| \leqslant 2\pi k|h - q\alpha| \leqslant 2\pi k/Q$, puis $|\widehat{c}_q(\alpha)| \geqslant 1 + 2s - \sum_{k=1}^{s} 4\pi k/Q = 1 + 2s - \pi(s+1)/4 = (1 - \pi/4) + (2 - \pi/4)s \geqslant (2 - \pi/4)s$.

5) a) En reprenant les calculs de **3**, on a aussi $(\chi * c_{-E})(p) = V(p+E)$ pour tout entier p d'où, pour $E = E_q$: $V(E_{q,p})^2 = (\chi * c_q)(p)^2 = |(\chi * c_q)(p)|^2$. Avec **II-1a**, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant q \leqslant 8s} \sum_{p \in \mathbb{Z}} V(E_{q,p})^2 &= \sum_{1 \leqslant q \leqslant 8s} \int_{t=0}^{1} |\widehat{\chi * c_q}(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{t=0}^{1} |\widehat{\chi}(t)|^2 \Big(\sum_{1 \leqslant q \leqslant 8s} |\widehat{c}_q(t)|^2 \Big) \, dt \\
&\geqslant K^2 s^2 \int_{t=0}^{1} |\widehat{\chi}(t)|^2 \, dt \\
&= K^2 s^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\chi(n)|^2 \\
&= K^2 s^2 ((1-\eta)^2 |Y| + \eta^2 (N - |Y|)) \\
&= K^2 s^2 N \eta (1 - \eta).
\end{aligned}$$

b) $\chi(n) = 0$ si $|n| \geqslant N+1$ et $c_q(n) = 0$ si $|n| \geqslant sq+1$ donc $V(E_{q,p}) = (\chi * c_q)(n) = 0$ si $|n| \geqslant N + sq + 2$. Ainsi la somme double précédente comporte au plus $\sum_{q=1}^{8s} (2N + 2sq + 3) = 8s(2N + s(8s+1) + 3)$ termes non nuls. En imposant $s^2 \geqslant 2N + 3$, ce nombre est au plus égal à $8s(9s^2 + s) \leqslant 80s^3$. Un des termes de la somme est donc au moins égal à $K^2 s^2 N\eta(1-\eta)/80s^3 = K^2 \eta(1-\eta)/80 \times (N/s)$. Avec $s = \lceil \sqrt{2N+3} \rceil \leqslant 3\sqrt{N}$ on a $N/s \geqslant \sqrt{N}/3$ et $K' = K/\sqrt{240}$ convient.

III

1) a) Par récurrence sur $n \geqslant 2$, ω est définie et continue sur $[1, n]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]2, n]$.

b) Par récurrence sur $n \geqslant 2$, pour $1 \leqslant u \leqslant n$, on a $1/u \leqslant \omega(u) \leqslant 1$.

c) $u\omega(u) = 1 + \int_1^{u-1} \omega$ donc $u\omega'(u) + \omega(u) = \omega(u-1) = \omega(u) - \int_{u-1}^{u} \omega'$.

d) $u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u) = (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u})(1 + \int_1^{u-2} w) - \frac{1}{u}\int_{u-1}^{u} \omega = O(\frac{1}{u^2})O(u) + O(\frac{1}{u})O(1) = O(\frac{1}{u})$ donc $u\omega'(u) \underset{u \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Le cas $k = 1$ est donc traité. Le cas $k \in \mathbb{N}^*$ se traite par récurrence à l'aide de **c**.

e) Avec $k = 2$, w' est intégrable sur $[1, \infty[$.

f) $\tilde{\omega}(u) = -\int_u^{\infty} \omega' = o(\frac{1}{u^2})$ puisque $\omega'(t) = o(\frac{1}{t^3})$ donc $\tilde{\omega}$ est intégrable sur $[1, \infty[$. Les deux membres ont même limite nulle pour $u \to \infty$; il suffit de vérifier qu'ils ont même dérivée sur $]3, \infty[$, ce qui résulte de **c**.

g) Sinon, $\tilde{\omega}$ est de signe constant sur $[C, \infty[$ et avec le signe $-$ dans l'égalité précédente, on obtient $\tilde{\omega} = 0$ sur $[C, \infty[$ puis, par dérivation, $\tilde{\omega} = 0$ sur $[C-1, \infty[, \ldots$, sur $[1, \infty[$ ce qui est absurde.

2) Par comparaison série-intégrale, $\sum_{a \leqslant n \leqslant b} 1/\ln(n) = \int_{t=a}^{b} dt/\ln(t) + O(1)$ pour $2 \leqslant a \leqslant b$.

Puis $\int_{t=a}^{b} dt/\ln(t) = [t/\ln(t)]_{t=a}^{b} + \int_{t=a}^{b} dt/\ln^2(t) = b/\ln(b) - a/\ln(a) + \int_{t=a}^{b} dt/\ln^2(t)$.

De même, $\int_{t=a}^{b} dt/\ln^2(t) = [t/\ln^2(t)]_{t=a}^{b} + \int_{t=a}^{b} 2dt/\ln^3(t) = b/\ln^2(b) - a/\ln^2(a) + \int_{t=a}^{b} 2dt/\ln^3(t)$.

Supposons $a \geqslant e^4$.

Alors $2/\ln^3(t) \leqslant \frac{1}{2}/\ln^2(t)$ pour tout $t \geqslant a$ donc $0 \leqslant \frac{1}{2}\int_{t=a}^{b} dt/\ln^2(t) \leqslant b/\ln^2(b) - a/\ln^2(a)$. Ceci prouve que $\int_{t=a}^{b} dt/\ln^2(t) = O(b/\ln^2(b))$. En combinant avec l'inégalité du théorème des nombres premiers, on obtient $\pi(b)-\pi(a)-\sum_{a\leqslant n\leqslant b} 1/\ln(n) = O(b/(\ln b)^2)$ sous la condition $e^4 \leqslant a \leqslant b$. Le cas $a < e^4$ s'en déduit par addition d'une constante.

3) **a)** Par récurrence sur b^0.

b) Idem.

c) Immédiat.

d) Comparaison série-intégrale.

e) On prend $f(t) = 1/(t\ln^2(t))$:

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\ a\leqslant p\leqslant b} f(p) \leqslant \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{1}{n\ln^3(n)} + \frac{Kb}{(b^0+1)\ln^2(b)\ln^2(b^0+1)} + K\sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{n}{\ln^2(n)}|f(n+1)-f(n)|.$$

Avec la question précédente,

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{1}{n\ln^3(n)} \leqslant \frac{1}{2\ln^2(a)} + O\Big(\frac{1}{\ln^3(a)}\Big).$$

Ensuite,

$$\frac{Kb}{(b^0+1)\ln^2(b)\ln^2(b^0+1)} = O\Big(\frac{1}{\ln^4(b)}\Big) = O\Big(\frac{1}{\ln^3(a)}\Big).$$

Enfin,

$$|f(n+1)-f(n)| = \Big|\int_{t=n}^{n+1} f'(t)\,dt\Big| = \int_{t=n}^{n+1} -f'(t)\,dt$$

avec $-f'(t) = \dfrac{\ln(t)+2}{t^2\ln^3(t)} \leqslant \dfrac{3}{n^2\ln^2(n)}$ si $a \geqslant e^2$ (hypothèse non restrictive). Ainsi,

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{n}{\ln^2(n)}|f(n+1)-f(n)| \leqslant \sum_{a\leqslant n\leqslant b} \frac{3}{n\ln^4(n)} = O\Big(\frac{1}{\ln^3(a)}\Big).$$

4) Comparaison série-intégrale, avec $\int_{t=2}^{x} dt/\ln^2(t) = O(x/\ln^2(x))$ vu en **2**.

5) Si $n \in [1,x]$ et tous ses facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y alors $n = 1$ ou $n \geqslant y$ et est premier car sinon $n \geqslant y^2 > x$. Réciproquement, si $n = 1$ ou n est premier compris entre y et x alors on a $n \in [1,x]$ et tous les facteurs premiers de n sont supérieurs ou égaux à y. Ainsi, $\Phi(x,y) = \pi(x)-\pi(y-1)+1$ et $|\Phi(x,y)-\pi(x)+\pi(y)| = |\pi(y)-\pi(y-1)+1| \leqslant 2$??? Si on élargit l'intervalle pour y : $y < x \leqslant y^2$, alors il y a au plus un nombre n supplémentaire : $n = y$ si y est un nombre premier et $x = y^2$. On en déduit

$$\begin{aligned}\Big|\Phi(x,y)-\frac{x}{\ln x}\Big| &\leqslant |\Phi(x,y)-\pi(x)+\pi(y)| + \Big|\pi(x)-\frac{x}{\ln x}\Big| + \pi(y)\\ &\leqslant 3 + \frac{Cx}{\ln^2(x)} + \frac{y}{\ln(y)} + \frac{Cy}{\ln^2(y)}\\ &= O\Big(\frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{y}{\ln y}\Big).\end{aligned}$$

6) $\Phi(x,y)-\Phi(x,y')$ est le nombre de nombres entiers dans $[2,x]$ dont tous les facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à y et un au moins est strictement inférieur à y'. En groupant ces nombres selon leur plus petit facteur premier noté p, on obtient la formule demandée.

7) **a)** On pose $u = \ln(x)/\ln(y) \in]2,3]$: $u\omega(u) = 1 + \int_{s=1}^{u-1} \omega(s)\,ds = 1 + \int_{s=1}^{u-1} ds/s$ car $\omega(s) = 1/s$ pour $1 \leqslant s \leqslant 2$. Dans la dernière intégrale, le changement de variable $s = \ln(x)/\ln(t) - 1$ donne l'intégrale de l'énoncé.

b) $\Phi(x,y) = \Phi(x,\sqrt{x}) + \sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<\sqrt{x}} \Phi(x/p,p)$.

$$\Phi(x,\sqrt{x}) = \frac{x}{\ln(x)} + O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)} + \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})}\Big) = \frac{x}{\ln(x)} + O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)}\Big).$$

$$\Phi(x/p,p)=\frac{x/p}{\ln(x/p)}+O\Big(\frac{x/p}{\ln^2(x/p)}+\frac{p}{\ln(p)}\Big)=\frac{x/p}{\ln(x/p)}+O\Big(\frac{x}{p\ln^2(p)}\Big)+O\Big(\frac{p}{\ln(p)}\Big).$$

Les constantes cachées par les deux derniers O ne dépendent pas de p car $x^{1/3}\leqslant p<x^{1/2}$ donc $\ln(p)\leqslant\ln(x/p)\leqslant 2\ln(p)$.

Avec $f(t)=(x/t)/\ln(x/t)$ et la relation **3c**, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<\sqrt{x}} f(p)&=\sum_{y\leqslant n<\sqrt{x}}\frac{f(n)}{\ln(n)}+O\Big(\frac{x}{\ln^3(x)}\Big)+O\Big(\sum_{y\leqslant n<\sqrt{x}}\frac{n}{\ln^2(n)}|f(n+1)-f(n)|\Big)\\&=\int_{t=y}^{\sqrt{x}}\frac{f(t)\,dt}{\ln(t)}+O\Big(\frac{x}{\ln^3(x)}\Big)+O\Big(\sum_{y\leqslant n<\sqrt{x}}\frac{x}{n\ln^3(n)}\Big)\\&=\frac{x}{\ln(x)}\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\Big)-1\Big)+O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)}\Big).\end{aligned}$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<\sqrt{x}}\frac{x}{p\ln^2(p)}=O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)}\Big).$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<\sqrt{x}}\frac{p}{\ln(p)}=O\Big((\pi(\sqrt{x})-\pi(x^{1/3}))\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\Big)=O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)}\Big).$$

En sommant,

$$\Phi(x,y)=\frac{x}{\ln(y)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\Big)+O\Big(\frac{x}{\ln^2(x)}\Big)=\frac{x}{\ln(y)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\Big)+O\Big(\frac{x}{\ln^2(y)}\Big)$$

car $2\ln(y)\leqslant\ln(x)\leqslant 3\ln(y)$.

c) Le cas $n=1$ vient d'être traité avec $D\geqslant D_2$. Supposons

$$\Phi(x,y)\approx\frac{x}{\ln(y)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\Big)$$

pour tout y tel que $x^{1/(n+1)}\leqslant y<x^{1/n}$ et considérons un réel y tel que $x^{1/(n+2)}\leqslant y<x^{1/(n+1)}$. On applique la question **6** avec $y'=x^{1/(n+1)}$ (si p est un nombre premier tel que $y\leqslant p<y'$, on a facilement $(x/p)^{1/(n+1)}\leqslant p<(x/p)^{1/n}$) :

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)&=\Phi(x,y')+\sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<y'}\Phi(x/p,p)\\&\approx\frac{x}{\ln(y')}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\Big)+\sum_{p\in\mathcal{P},\ y\leqslant p<y'}\frac{x}{p\ln(p)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(p)}-1\Big)\\&\approx\frac{x}{\ln(y')}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\Big)+\sum_{y\leqslant n<y'}\frac{x}{n\ln^2(n)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(n)}-1\Big)\\&\approx\frac{x}{\ln(y')}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y')}\Big)+\int_{t=y}^{y'}\frac{x}{t\ln^2(t)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(t)}-1\Big)\,dt\\&=\frac{x}{\ln(y)}\omega\Big(\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\Big)\text{ avec la relation \textbf{III-1}.}\end{aligned}$$

Le suivi précis de ces approximations promet d'être fastidieux et de ne pas rapporter beaucoup de points… j'admets la question.

IV

1) a) Un entier $n \in [1, x]$ a tous ses diviseurs premiers supérieurs ou égaux à y si et seulement s'il est premier à $q(y)$, donc si et seulement s'il est de la forme $n = a + kq(y)$ avec $a \in [\![1, q(y)]\!]$ premier à $q(y)$ et k entier naturel tel que $a + kq \leqslant x$. A a fixé, le nombre de k admissibles est $1 + \lfloor (x-a)/q(y) \rfloor$, compris entre $\lfloor x/q(y) \rfloor$ et $1 + \lfloor (x-1)/q(y) \rfloor$.

On a donc $\varphi(q(y))\lfloor x/q(y) \rfloor \leqslant \Phi(x, y) \leqslant \varphi(q(y))(1 + \lfloor (x-1)/q(y) \rfloor)$. Les deux termes encadrant sont équivalents à $x\varphi(q(y))/q(y)$ lorsque $x \to \infty$ et y est fixé, mais aussi lorsque y est variable, pourvu que $x/q(y) \to \infty$.

b) D'après **III-7c**, $\Phi(x, y) \sim Lx/\ln(y)$ lorsque $y \to \infty$ et $\ln(x)/\ln(y) \to \infty$. En prenant $x = y^y q(y)$ on dispose également de l'équivalence précédente, ce qui donne la limite annoncée par comparaison.

c) Prendre $f(t) = \ln(t)$, $a = 1$, $b = y - 1$ dans **III-3d**.

2) a) Si $i + (m + j)q$ est premier alors il est premier à q et donc i est premier à q. Le nombre de tels i est au plus égal à $\Phi(n, y)$.

b) Compter par colonnes.

c) Calcul.

3) Énoncé abscons.