Composition de mathématiques, B, (X), filière MP, année 2014-2015. Proposition de corrigé.

Ait Lhouusain Mohamed, centre Salmane El Farissi, Salé, Maroc.

12 mai 2015

Première partie

1a. Soit $y \in]0, +\infty[$. L'application $u_y : t \mapsto t^{y-1}e^{-t}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, on a $u_y(t) \sim t^{y-1}$ et $1 - y < 1$, donc l'intégrale $\int_0^t u_y(t)dt$ est convergente par comparaison avec une intégrale convergente de Riemann. Au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 u_y(t) = t^{y+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\int_1^{+\infty} u_y(t)dt$ est convergente par critère de comparaison avec l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ convergente de Riemann. Il en découle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u_y(t)dt$ est convergente et que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
On a, par integration par parties :

$$\Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} t^y e^{-t}dt = [-t^y e^{-t}]_0^{+\infty} + y\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt$$

Integration par parties validée par le fait que $t \mapsto t^y e^{-t}$ admet des limites finies (nulles) aux bornes de l'intégrale. Donc $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tel que $u_n = \Gamma(n+1)$ satisfait $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$ donc elle coincide avec $(n!)_{n\geq 0}$, donc $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

———————————————————————————

1.b On a $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt = \frac{1}{y}\Gamma(y+1) = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^y dt$. Donc :

$$\Gamma(y) = y^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^y dt \tag{1}$$

On a $\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds = \int_{-1}^{+\infty} e^{-ys+y\ln(1+s)}ds = \int_{-1}^{+\infty} e^{-ys}(1+s)^y ds$
Par le changement de variable $s + 1 = t$ il vient :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds = \int_0^{+\infty} e^{-y(t-1)}t^y dt = e^y\int_0^{+\infty} e^{-yt}t^y dt$$

On a par ailleurs , en effectuant le changement de variable $yt = u$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-yt}t^y dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^y y^{-y}y^{-1}du = y^{-y}y^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^y du$$

Donc :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds = e^y y^{-y}\left(y^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^y du\right)$$

Compte tenu de la relation (1) il vient :

$$\Gamma(y) = e^{-y}y^y\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)}ds$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

2a. L'application $v_x : t \mapsto e^{-\frac{t}{x}}t^\alpha$ est positive continue sur $[\delta, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 v_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-\frac{t}{x}} = 0$. il en découle que l'intégrale $\int_\delta^{+\infty} v_x(t)dt$ est convergente, donc v_x étant positive, elle est integrable sur $[\delta, +\infty[$.
On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathscr{P}(n)$:

$$\mathscr{P}(n) : \forall\alpha \in \mathbb{R}, \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^\alpha dt = o(x^n) \text{ quand } x \to 0^+$$

• **Démarrage :** $\mathscr{P}(0)$ n'est autre que :

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^\alpha dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Soit (x_n) une suite à valeurs dans $]0, 1]$ tel que $x_n \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, démontrons que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x_n}}t^\alpha dt = 0 \tag{2}$$

pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominée. posons $f_n(t) = e^{-\frac{t}{x_n}}t^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [\delta, +\infty[$. Chaque f_n est continue sur $[\delta, +\infty[$ et il est aisé de voir que (f_n) converge simplement vers l'application nulle sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$.
Puisque $x_n \in]0, 1]$ on a $\frac{t}{x_n} \geq t$ donc $e^{-\frac{t}{x_n}} \leq e^{-t}$ de sorte que $|f_n(t)| \leq g(t) = e^{-t}t^\alpha$ pour tout $t \in [\delta, +\infty[$. L'application g est continue integrable sur $[\delta, +\infty[$· le théorème de convergence dominée s'applique et on a le résultat désiré.
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Une integration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^\alpha dt &= \left[-xe^{-\frac{t}{x}}t^\alpha\right]_\delta^{+\infty} + x\alpha\int_\delta^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{\alpha-1}dt \\ &= \underbrace{x\delta^\alpha e^{-\frac{\delta}{x}}}_{U(x)} + \underbrace{\alpha x\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{\alpha-1}dt}_{V(x)}\end{aligned}$$

On a, quand x tends vers 0^+ : $U(x) = o(x^{n+1})$ car : $\frac{U(x)}{x^{n+1}} = \delta^\alpha x^{-n} e^{-\frac{\delta}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et, par hypothèse de récurrence, on a $V(x) = o(x^n)$ donc $\alpha x V(x) = o(x^{n+1})$. Notons que $\mathscr{P}(n)$ est formulée de sorte que la propriété concerne toute valeur réelle de α pour n entier donnée. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et cela finit d'établir le résultat demandé.

Déduction :

On a $\rho_N(t) = f(t) - \sum\limits_{k=0}^{N} a_k t^{\alpha_k}$ où $\alpha_k = \frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

Remarquons que si $\delta < 1$ alors f étant continue sur $[\delta, 1]$, ell y est bornée . Si $C_1 = \max\limits_{[\delta,1]} |f|$ on a :

$$\forall t \geq \delta \quad |f(t)| \leq C_1 + Ct^K$$

inégalité valable aussi dans le cas où $\delta \geq 1$. Alors, pour tout $t \geq \delta$, on a :

$$|\rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}}| \leq C_1 e^{-\frac{t}{x}} + Ct^K e^{-\frac{t}{x}} + \sum_{k=0}^{N} |a_k| t^{\alpha_k} e^{-\frac{t}{x}}$$

Par conséquent, on a :

$$\left| \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{N+2} \int_\delta^{+\infty} b_k t^{\beta_k} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

avec $b_k = |a_k|$ et $\beta_k = \alpha_k$ si $0 \leq k \leq N$ et $(b_{N+1}, \beta_{N+1}, b_{N+2}, \beta_{N+2}) = (C_1, 0, C, K)$
D'après le résultat obtenu ci-dessus, on a

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt = o(x^n)$$

quand $x \to 0^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

―――――――――――――――――――――――――――――――――

2b. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\rho_N(t) = o(t^\alpha)$ avec $\alpha = \frac{N+\lambda-\mu}{\mu}$ quand $t \to 0^+$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0, \delta[\quad |\rho_N(t)| \leq \varepsilon t^\alpha$$

Alors, on a pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} |\rho_N(t)| dt \leq \varepsilon \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt$$

Par le changement de variable $\frac{t}{x} = u$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt &= \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} x^\alpha u^\alpha x du \\
&= x^{\alpha+1} \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} u^\alpha du \\
&\leq x^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^\alpha du \\
&= x^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)
\end{aligned}$$

En remarquant que $\alpha+1=\frac{N+\lambda}{\mu}$, on obtient :

$$\forall x>0 \quad \left|\int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt\right| \leq C'\varepsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \tag{3}$$

avec $C'=\Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

2c. Soit $\varepsilon>0$. d'après la question **2b.**, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x>0$:

$$\left|\int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

(On a appliqué le **2b.** pour $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2C'}$.)
Pour δ ainsi trouvé, on a d'après **2a.** :

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt=o(x^n) \text{ quand } x\to 0^+$$

où

$$n=1+\operatorname{Ent}\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$$

(Ent désigne l'application partie entière.)
On a alors $o(x^n)=o(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}})$, donc il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x\in]0,\eta[\quad \left|\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \tag{4}$$

En combinant (3) et (4) on obtient :

$$\forall x\in]0,\eta[\quad \left|\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt\right| \leq \varepsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

Ce qui exprime le fait que quand $x\to 0^+$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\rho_N(t)dt=o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

2d. $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}f(t)dt$. Fixons $x>0$. L'application $u: t\mapsto f(t)e^{-\frac{t}{x}}$ est continue sur $I=]0,+\infty[$. L'intégrale en question est impropres aux deux bornes 0 et $+\infty$ de l'intervalle I.
En 0, on sait que l'on a au voisinage de 0 :

$$f(t)=\sum_{k=0}^{N} a_k t^{\alpha_k}+o(t^{\alpha_N})$$

avec $\alpha_k=\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k\in[\![0,N]\!]$.

En particulier on a $f(t)=O(t^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}})$ avec $\frac{\lambda-\mu}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu}-1$ donc $t^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}=\frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha<1$, ce qui donne $u(t)=O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha<1$, donc l'intégrale $\int_0^1 u(t)dt$ est convergente.
En $+\infty$: On sait par hypothèse que $\forall t\geq 1$ on a $|f(t)|\leq Ct^K$, il en découle que $|u(t)|\leq Ce^{-\frac{t}{x}}t^K$ et comme $t^2(Ce^{-\frac{t}{x}}t^K)=Ce^{-\frac{t}{x}}t^{K+2}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty}u(t)dt$ converge. En conclusion F est bien définie sur $]0,+\infty[$.
• On a $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_kt^{\alpha_k}+\rho_N(t)$ où $\alpha_k=\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k\in[\![0,N]\!]$.
Donc pour tout $x>0$, on a :

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}f(t)dt=\left(\sum_{k=0}^{N}a_k\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}t^{\alpha_k}dt\right)+\int_0^{+\infty}\rho_N(t)e^{-\frac{t}{x}}dt$$

D'après la question **2c.**, on a

$$\int_0^{+\infty}\rho_N(t)e^{-\frac{t}{x}}dt=o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

quand $x\to0^+$.
Par ailleurs, $\forall k\in[\![0,N]\!]$, on a : par le changement de variables $\frac{t}{x}=u$:

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{x}}t^{\alpha_k}dt=x^{\alpha_k+1}\int_0^{+\infty}u^{\alpha_k}e^{-u}du=x^{\alpha_k+1}\Gamma(\alpha_k+1)$$

Comme $\alpha_k+1=\frac{k+\lambda}{\mu}$ il vient :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right)x^{\frac{k+\lambda}{\mu}}+o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

quand $x\to0^+$.

----

3. rappelons que $\phi(s)=s-\ln(s+1),\forall s\in]-1,+\infty[$.
3a. ϕ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall s\in]-1,+\infty[,\quad \phi'(s)=\frac{s}{s+1}$$

Donc φ' a le même signe que $s\mapsto s$. Dons $\phi'<0$ sur $]-1,0[$ et $\phi'>0$ sur $]0,+\infty[$ et s'annule au point 0. On a $\lim\limits_{-1^+}\phi(s)=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\phi(s)=+\infty$ car $\phi(s)\sim s$
On a, au voisinage de $+\infty$: $\frac{\phi(s)}{s}\sim1$ et $\phi(s)-s\sim-\ln(s+1)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$, donc le graphe de ϕ admet une branche parabolique de directions la première bissectrice au voisinage de $+\infty$.
ϕ restreinte à $]-1,0]$ (resp. $[0,+\infty[$) est continue strictement décroissante (resp. croissante) donc réalise une bijection de $]-1,0]$ (resp. $[0,+\infty[$) vers $[0,+\infty[$.

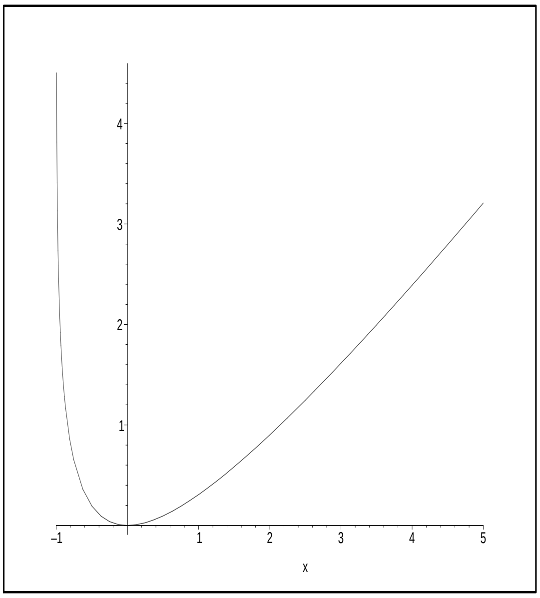

FIGURE 1 – Graphe de ϕ

3b. On sait que $s \mapsto \ln(1+s)$ est développable en série entière à l'origine avec le rayon de convergence $R = 1$, et que

$$\forall s \in]-1,1[, \quad \ln(1+s) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{s^k}{k}.$$

Donc pour tout $s \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned} \phi(s) &= s - \ln(1+s) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k} \\ &= s^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^{k-2}}{k} \\ &= s^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k+2} \end{aligned}$$

3c. On dispose des développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\phi(s) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{4}s^4 + o(s^4) \tag{5}$$

$$g(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k q^k = A(q) + o(q^4) \tag{6}$$

où $A(q)=\sum\limits_{k=1}^{4} a_k q^k$ et la suite (a_k) désigne l'une des suites (b_k) ou (c_k).
Par composition des dl, on en déduit, en notant $\operatorname{Tronc}_4(P)$ la troncature au degré 4 du polynôme P :
$\phi(g(q))=\frac{1}{2}\operatorname{Tronc}_4(A^2(q))-\frac{1}{3}\operatorname{Tronc}_4(A^3(q))+\frac{1}{4}\operatorname{Tronc}_4(A^4(q))+o(q^4)$
On a : $A(q)=a_1q+a_2q^2+a_3q^3+a_4q^4$ donc

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Tronc}_4(A^2(q)) & = & a_1^2q^2+2a_1a_2q^3+(a_2^2+2a_1a_3)q^4\\ \operatorname{Tronc}_4(A^3(q)) & = & a_1^3q^3+3a_1^2a_2q^4\\ \operatorname{Tronc}_4(A^4(q)) & = & a_1^4q^4\end{array}$$

donc
$$q^2=\frac{1}{2}a_1^2q^2+(a_1a_2-\frac{1}{3}a_1^3)q^3+(\frac{1}{2}a_2^2+a_1a_3-a_1^2a_2+\frac{1}{4}a_1^4)q^4+o(q^4).$$
Par unicité d'un tel dl, il vient :

$$\begin{cases} a_1^2=2\\ 3a_1a_2-a_1^3=0\\ 2a_2^2+4a_1a_3-4a_1^2a_2+a_1^4=0\end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} a_1^2=2\\ a_2=\frac{2}{3}\\ a_1a_3=\frac{1}{9}\end{cases}$$
ce qui fournit les solutions :
$\begin{cases} a_1=\sqrt{2}\\ a_2=\frac{2}{3}\\ a_3=\frac{1}{9\sqrt{2}}\end{cases}$ ou $\begin{cases} a_1=-\sqrt{2}\\ a_2=\frac{2}{3}\\ a_3=-\frac{1}{9\sqrt{2}}\end{cases}$

Comme $b_1>0$ et $c_1<0$ on en déduit que :$\begin{cases} b_1=\sqrt{2}\\ b_2=\frac{2}{3}\\ b_3=\frac{1}{9\sqrt{2}}\end{cases}$ et $\begin{cases} c_1=-\sqrt{2}\\ c_2=\frac{2}{3}\\ c_3=-\frac{1}{9\sqrt{2}}\end{cases}$
D'après l'énoncé, il existe $\rho>0$ tel que les séries entières $\sum b_nq^n$ et $\sum c_nq^n$ convergent sur $I_\rho=]-\rho,\rho[$. Notons φ_1 et φ_2 les applications associées à ses séries. Alors au voisinage de 0, on a :
$$\begin{cases}\phi(\varphi_1(q))\sim\sqrt{2}\;q\\ \phi(\varphi_2(q))\sim-\sqrt{2}\;q\end{cases}$$
Pour tout $q\in]-\rho,\rho[$, on a : $\phi\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_kq^k\right)=\phi\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_kq^k\right)=q^2$. Or , au voisinage de 0, on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_kq^k\sim b_1q$ (resp. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_kq^k\sim c_1q$) et on a par hypothèse $b_1>0$ (resp. $c_1<0$) ,il en résulte qu'au voisinage de 0, on a :

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_kq^k=\phi_+^{-1}(q^2)\\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_kq^k=\phi_-^{-1}(q^2)\end{cases}\tag{7}$$

On en déduit, en particulier (compte tenu des données admises de l'énoncé) que l'application $q \mapsto \phi_+^{-1}(q^2)$ (resp. $q \mapsto \phi_-^{-1}(q^2)$) est développable en série entière à l'origine, par suite on peut dériver terme à terme les relations (7) ci-dessus sur l' intervalle $J_\rho =]-\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}[$ On a sur cet intervalle :

$$\begin{cases} 2q(\phi_+^{-1})'(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{k-1} \\ 2q(\phi_-^{-1})'(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{k-1} \end{cases} \tag{8}$$

Ce qui donne pour $q \neq 0$ et $q \in J_\rho$

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{k-2} \\ (\phi_-^{-1})'(q^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{k-2} \end{cases} \tag{9}$$

Donc on a en particulier pour $q \in]0, \rho[$:

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{\frac{k-2}{2}} \\ (\phi_-^{-1})'(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{\frac{k-2}{2}} \end{cases} \tag{10}$$

Ce qui, donne, en particulier les développements asymptotiques suivants pour $q > 0$ voisin de 0 :

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{2}(b_1 q^{-\frac{1}{2}} + 2b_2 + 3b_3 q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}})) \\ (\phi_-^{-1})'(q) = \frac{1}{2}(c_1 q^{-\frac{1}{2}} + 2c_2 + 3c_3 q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}})) \end{cases} \tag{11}$$

Compte tenu des valeurs trouvées ci-dessus, il vient :

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{q} + o(\sqrt{q}) \\ (\phi_-^{-1})'(q) = -\frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{q} + o(\sqrt{q}) \end{cases} \tag{12}$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

3d. D'après **1b.**, on a : $\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt$.
On a :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt = \int_{-1}^{0} e^{-y\phi(t)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt.$$

Dans chacune des intégrales du membre droite, le changement de variable $u = \phi(q)$ est licite puisque la restriction de ϕ à l'intervalle $]-1, 0[$ (resp $]0, +\infty[$) est une application de classe C^1 strictement décroissante(resp.croissante). En adoptant ce changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt &= -\int_{0}^{+\infty} e^{-yq} (\phi_-^{-1})'(q) dq + \int_{0}^{+\infty} e^{-yq} (\phi_+^{-1})'(q) dq \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-yq} ((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q)) dq. \end{aligned}$$

Donc, en conclusion :

$$\Gamma(y) = e^{-y}y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq}((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q))dq.$$

———————————————————————————————

3e. Considérons l'application $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, q \mapsto g(q) = (\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q)$. Alors, on a :

$$\forall y > 0 \quad \Gamma(y) = e^{-y}y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq}g(q)dq \tag{13}$$

D'après la question 3c., l'application g admet au voisinage de 0 le développement limité :

$$g(q) = \sqrt{2}q^{-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6}q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}}). \tag{14}$$

Par ailleurs soit $q \geq 1$ alors $g(q) = \frac{1}{\phi'(u_2)} - \frac{1}{\phi'(u_1)}$ où $u_2 = \phi_+^{-1}(q)$ et $u_1 = \phi_-^{-1}(q)$. Comme $q \in [1, +\infty[$, on a $u_1 \in]-1, \alpha_1]$ et $u_2 \in [\alpha_2, +\infty[$ où $\alpha_1 = \phi_-^{-1}(1)$ et $\alpha_2 = \phi_+^{-1}(1)$. Notons que pour tout $s \in]-1, +\infty[$, on a $\varphi'(s) = \frac{s}{s+1}$ de sorte que pour tout $s \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, on a :$\frac{1}{\phi'(s)} = \frac{s+1}{s}$. En particulier $s \mapsto \frac{1}{\varphi'(s)}$ est bornée sur $]-1, \alpha_1] \cup [\alpha_2, +\infty[$. ce qui permet de dire qu'il existe une constante réelle strictement positive C tel que $|g(q)| \leq C$. Ainsi les hypothèses requises pour appliquer le résultat de la question 2d. sont satisfaites. Précisément :
Pour $N = 2, \lambda = 1, \mu = 2$, on a :

$$g(q) = \sum_{k=0}^{N} a_k q^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} + o(q^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}) \tag{15}$$

Avec $a_0 = \sqrt{2}$, $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Notons que (15) n'est autre que (14) ci-dessus. On a aussi : Il existe une constante $C > 0$ et un entier K (à savoir $K = 0$) tel que pour tout $q \geq 1$, on a $g(q) \leq Cq^K$.
Si pour tout $x > 0$, on pose :

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{q}{x}}g(q)dq = \int_0^{+\infty} e^{-qy}g(q)dq = G(y)$$

où $y = \frac{1}{x}$, on a compte tenu de 2d. : Quand y tends vers $+\infty$ on a :

$$G(y) = \sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + o\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

On a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, donc :

$$\begin{aligned} G(y) &= \sqrt{\frac{2\pi}{y}}\frac{1}{y} + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{y}}\frac{1}{y} + o\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

Finalement, et compte tenu de (13) ci-dessus on a, quand y tends vers $+\infty$:

$$\Gamma(y) = e^{-y}y^y\left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

Deuxième partie

4. Soit $x \in]0, +\infty[$. L'application $u : t \mapsto e^{-\frac{t}{x}}t^{-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale définissant F est donc impropre uniquement à la borne $+\infty$. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2u(t) = 0$, donc par critère de comparaison, l'intégrale en question converge.
Remarquons que pour tout $X > 1$, on a :

$$\int_1^X u(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{X}{x}} \frac{e^{-s}}{s}ds$$

d'où l'on déduit :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}ds = \left(\int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{e^{-s}}{s}ds\right) + c$$

où : $c = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}ds$. On a alors $F = -\Phi \circ v$ où : $v : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, v(x) = \frac{1}{x}$ et $\Phi :]01] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = c - \int_1^x \frac{e^{-s}}{s}ds$ et on voit que :
• Φ est de classe C^∞ sur $]0, 1][$ car elle y est dérivable et sa dérivée est de classe C^∞.
• v est de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$. Donc F est de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$.

————————————————————————————

5. Par récurrence sur N :
• Pour $N = 1$: On a : $F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-1}dt$. Comme l'application $t \mapsto -xe^{-\frac{t}{x}}t^{-1}$ admet des limites en 1 et en $+\infty$, une integration par partie est validée :

$$F(x) = \left[-xe^{-\frac{t}{x}}t^{-1}\right]_1^{+\infty} - x\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-2}dt = xe^{-\frac{1}{x}} - x\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-2}dt$$

Donc : $F(x) = S_1(x) + R_1(x)$.
• Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $F(x) = S_N(x) + R_N(x), \forall x > 0$. Une integration par parties donne :

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-(N+1)}dt = xe^{-\frac{1}{x}} - x\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-(N+2)}dt$$

Donc

$$R_N(x) = (-1)^N N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}} + (-1)^{N+1}x^{N+1}\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}t^{-(N+2)}dt$$

Par suite $F(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x), \forall x > 0$. Ce qui achève la démonstration du résultat demandé par récurrence.

————————————————————————————

6a. Il s'agit d'une série entière de coefficient $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$, donc

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est nul, donc la série demandée converge uniquement pour $x = 0$.
On a $|R_N(x)| = N!x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)}dt$. Par le changement de variable $s = \frac{t}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= N!x^N \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s}x^{-(N+1)}x^{-(N+1)}xds \\ &= N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s}s^{-(N+1)}ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\geq N!e^{-\frac{1}{x}} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} s^{-(N+1)}ds \\ &= N!e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{Nx^N} \\ &= \frac{(N-1)!}{x^{N-1}} xe^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ est convergente son terme général tends vers 0 donc on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{(N-1)!}{x^{N-1}} = +\infty$ et par suite, $\forall x > 0$, la suite $(R_N(x))_{N\geq1}$ n'est pas bornée.

——————————————————————————

6b. On a vu en **6a.** la relation :

$$|R_N(x)| = N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s}s^{-(N+1)}ds$$

L'application $s \mapsto s^{N+1}$ est croissante sur l'intervalle $I_x = [\frac{1}{x}, +\infty[$, donc la valeur maximale de $s^{-(N+1)}$ sur l'intervalle I_x correspond à $s = \frac{1}{x}$, ce qui fournit :

$$|R_N(x)| \leq x^{N+1}N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s}ds = x^{N+1}N!e^{-\frac{1}{x}} = |r_N(x)|$$

Montrons que $R_{N+1}(x) = o(r_N(x))$ quand $x \to 0$.
On a d'après le résultat ci-dessus : $|R_{N+1}(x)| \leq |r_{N+1}(x)|$.
On a par ailleurs : $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1)x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, donc $r_{N+1}(x) = o(r_N(x))$ quand $x \to 0$ et le résultat désiré en découle.

——————————————————————————

6c. D'après la question **5.**, on a :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = S_N(x) + R_N(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x).$$

En particulier, on a :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad R_N(x) = R_{N+1}(x) + S_{N+1}(x) - S_N(x) = r_N(x)$$

donc, compte tenu de **6b.**, on a :

$$|R_N(x) - r_N(x)| = |R_{N+1}(x)| = o(r_N(x))$$

quand $x \to 0$, ce qui prouve que

$$R_N(x) \sim r_N(x)$$

quand $x \to 0$.

———————————————————————————

6d. On a $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1)x$. Donc : $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} \leq 1 \Leftrightarrow N \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow N \leq N_x$ où $N_x = \text{Ent}\,\frac{1}{x}$. Il en résulte que la suite $(|r_N(x)|$ est décroissante jusqu'au rang N_x et elle devient croissante à partir de $N_x + 1$. Notons que N_x est bien un entier naturel non nul puisqu'on a supposé que $x < \frac{1}{2}$.

———————————————————————————

7a. On a $N = 2M$. puisque $0 < x \leq \frac{1}{N}$, la suite $(|r_n(x)|)_{1 \leq n \leq N}$ est décroissante.
On a $E_N(x) = \frac{|R_N(x)|}{|F(x)|}$.
$|R_N(x)| \leq |r_N(x)| = N! x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}} \leq N! x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}}$. Ainsi :

$$|R_N(x)| \leq N! x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}} \tag{16}$$

$F(x) = S_N(x) + R_N(x)$. Notons que $R_N(x) \geq 0$ car N est pair, donc

$$R_N(x) = (-1)^N N! x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt = N! x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt$$

D'autre part :

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} r_k(x) = \widehat{S}_N(x) + r_N(x)$$

où

$$\widehat{S}_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k(x)$$

et comme $(-1)^k r_k(x) > 0$, on a $r_k(x) = (-1)^k |r_k(x)|$, donc :

$$\widehat{S}_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k |r_k(x)| = \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} |r_{2\ell}(x)| - |r_{2\ell+1}(x)| \right)$$

Compte tenu de la décroissance de $(|r_n(x)|)_{1\leq n\leq N}$ il en découle que $\widehat{S}_N(x) > 0$, cette inégalité étant stricte car $r_0(x) + r_1(x) = (x - x^2)e^{-\frac{1}{x}} > 0$.
Ce qui précède montre que l'on a : on a $|F(x)| = \widehat{S}_N(x) + r_{2M}(x) + R_N(x)$ et $\widehat{S}_n(x) > 0$ et et $r_{2M}(x) \geq 0$ et $R_N(x) \geq 0$, donc :

$$|F(x)| \geq \widehat{S}_N(x) > 0 \tag{17}$$

Il résulte de (16) et (17) que :

$$|E_N(x)| \leq \frac{N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}}}{\widehat{S}_N(x)}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_N(x) &= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} r_{2\ell}(x) + r_{2\ell+1}(x)\right) e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} \left((2\ell)!x^{2\ell+1} - (2\ell+1)!x^{2\ell+2}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} \left((2\ell)!x^{2\ell+1}(1 - (2\ell+1)x\right)\right) e^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

−−

7b. Si on applique l'inégalité précédente à $N = 4$ et $x = \frac{1}{10}$ on obtient :

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{24.10^{-5}}{(1-\frac{1}{10})10^{-1} + \left(1-\frac{3}{10}\right)2.10^{-3}} \leq \frac{24}{9}10^{-3} \leq 3.10^{-3}.$$

Troisième partie

8. Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. On va démontrer qu'il existe un polynôme trigonométrique en deux variables P tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Par définition, f est défini par :

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\theta_1)g_k(\theta_2)$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_k, g_k \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
Sans nuire à la généralité on peut supposer que tous les f_k sont non nuls (en effet, la formule ci-dessus donnant $f(\theta)$ est valable si on somme sur les indices k tel que $f_k \neq 0$. si tous les f_k sont nuls alors $f = 0$ et $P = 0$ convient.) Soit alors

$$M = \sum_{k=1}^{n}(2\|f_k\|_\infty + \|g_k\|_\infty)$$

et
$$\varepsilon' = \min(\frac{\varepsilon}{2M}, \min_{1\leq k\leq n} \|f_k\|_\infty)$$
Par densité dans le cas de $d = 1$, il existe des polynômes trigonométriques en une variables P_k, Q_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ tel que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \begin{cases} \|f_k - P_k\|_\infty < \varepsilon' \\ \|g_k - Q_k\|_\infty < \varepsilon' \end{cases}$$
Soit P l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie par :
$$P(\theta) = P(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2)$$
Alors P est un polynôme trigonométriques en deux variables car si on écrit (K_1, K_2 étant des parties finies de $\mathbb{Z}$) :
$$\begin{cases} P_k(\theta_1) = \sum\limits_{k\in K_1} c_k e^{2i\pi j\theta_1} \\ Q_k(\theta_2) = \sum\limits_{\ell\in K_2} d_\ell e^{2i\pi\ell\theta_2} \end{cases}$$
alors
$$P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2) = \sum_{(k,\ell)\in K_1\times K_2} c_k d_\ell e^{2i\pi(k\theta_1+\ell\theta_2)}.$$
Par combinaison linéaire, P est un polynôme trigonométrique en les variables θ_1 et θ_2. Pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ on a :
$$\begin{aligned} |f(\theta) - P(\theta)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(f_k(\theta_1)g_k(\theta_2) - P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2)\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}(f_k(\theta_1) - P_k(\theta_1)g_k(\theta_2) + P_k(\theta_1)(g_k(\theta_2) - Q_k(\theta_2))\right| \\ &\leq \varepsilon'\left(\sum_{k=1}^{n}(\|g_k\|_\infty + \|P_k\|_\infty\right) \end{aligned}$$
Notons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\|P_k\|_\infty \leq \varepsilon' + \|f_k\|_\infty \leq 2\|f_k\|_\infty$, donc :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2 \quad |f(\theta) - P(\theta)| \leq \varepsilon'\left(\sum_{k=1}^{n}(\|g_k\|_\infty 2\|f_k\|_\infty\right) = \varepsilon' M$$
Par passage à la borne supérieure sur $\theta \in \mathbb{R}^2$, il vient :
$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon' M \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

———————————————————————————

9. L'application ψ_j est continue sur $I =]0, \frac{1}{2}]$ car $u : t \mapsto u(t) = 0$ et $v : t \mapsto v(t) = 1 - j|t|$ sont continues sur I donc l'application $\max(u, v)$ est continue sur I, en particulier on a $\lim_{t \to -\frac{1}{2}^+} \psi_j(t) = \max(0, v(-\frac{1}{2})) = \max(0, v(\frac{1}{2})) = \psi(-\frac{1}{2})$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}$.
L'application $t \mapsto t - \frac{k}{j}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car affine. Par composition, l'application $\psi_{j,k}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi_{j,k}(t+1) = \psi_j(t + 1 - \frac{k}{j}) = \psi_j(t - \frac{k}{j}) = \psi_{j,k}(t)$. Finalement on a $\psi_{j,k} \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$ pour tout couple (k, j) d'entiers tel que $0 \leq k < j$.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

10. On a par définition de $S_j(f)$, pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$S_j(f)(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}(\theta_1)\psi_{j,k_2}(\theta_2)$$

10a. Il est clair que pour tout $k = (k_1, k_2) \in [\![0, j-1]\!]^2$, les applications

$$f_k : \theta_1 \mapsto f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}(\theta_1)$$

et

$$g_k : t \mapsto \psi_{j,k_2}(\theta_2)$$

sont continues 1-périodiques et que

$$f(\theta) = \sum_{(k_1,k_2) \in [\![0,j-1]\!]^2} f_{k_1}(\theta_1) g_{k_2}(\theta_2)$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, donc $f \in \mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$.
Soit $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2$. On a ;

$$\begin{aligned} S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}\left(\frac{\ell_1}{j}\right) \psi_{j,k_2}\left(\frac{\ell_2}{j}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_j\left(\frac{\ell_1 - k_1}{j}\right) \psi_j\left(\frac{\ell_2 - k_2}{j}\right) \end{aligned}$$

Si $r_1(k)$ et $r_2(k)$ dénotent les restes respectifs de la division euclidienne de $\ell_1 - k$ et $\ell_2 - k$ par j alors par périodicité de ψ_j, on a :

$$S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) = \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_j\left(\frac{r_1(k_1)}{j}\right) \psi_j\left(\frac{r_2(k_2)}{j}\right) \tag{18}$$

Remarquons que pour tout $\nu \in \{1, 2\}$ et tout $k \in [\![0, j-1]\!]$, on a $0 \leq r_\nu(k) < j$ de sorte que $\frac{r_\nu(k)}{j} \in [0, 1[$ et deux cas sont possibles :

• Si $\frac{r_\nu(k)}{j} \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) = \max(0, 1 - r_\nu(k))$ par suite $\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) \neq 0$ uniquement si $r_\nu(k) = 0$ ce qui veut dire k est le reste de la division euclidienne de ℓ_ν par j.
• Si $\frac{r_\nu(k)}{j} \in]\frac{1}{2}, 1[$ alors $\frac{r_\nu(k)}{j} - 1 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ ce qui donne

$$\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) = \psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j} - 1\right) = \psi_j\left(\frac{r_\nu(k) - j}{j}\right) = \max(0, 1 - j + r_\nu(k)) = 0$$

puisque $r_\nu(k) \leq j - 1$ donc $1 - j + r_\nu(k) \leq 0$.
Cette étude montre que les termes du second membre de la relation (18) sont tous nuls sauf celui d'indice (k_1, k_2) tel que $(r_1(k_1), r_2(k_2)) = (0, 0)$, ce qui veut dire que k_1 et k_2 sont les restes respectifs de ℓ_1 et ℓ_2 dans la division euclidienne par j, de sorte que :

$$S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) = f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right)\psi_j\left(\frac{0}{j}\right)\psi_j\left(\frac{0}{j}\right) = f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) = f\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right)$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

10b. Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right[$, alors il existe $(t_1, t_2) \in [0, 1[^2$ tel que :

$$\begin{cases} \theta_1 = (1 - t_1)\frac{k_1}{j} + t_1\frac{k_1+1}{j} \\ \theta_2 = (1 - t_2)\frac{k_1}{j} + t_2\frac{k_2+1}{j} \end{cases}$$

On a :

$$S_j(f)(\theta) = \sum_{\ell_1=0}^{j-1}\sum_{\ell_1=0}^{j-1} f\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right)\psi_{j,\ell_1}(\theta_1)\psi_{j,\ell_2}(\theta_2)$$

Soit $\ell \in [\![0, j - 1]\!]$. On a :

$$\psi_{j,\ell}(\theta_1) = \psi_j\left(\theta_1 - \frac{\ell}{j}\right) = \max(0, 1 - |j\theta_1 - \ell|)$$

Or : $j\theta_1 - \ell = (1 - t_1)k_1 + t_1(k_1 + 1) - \ell = (k_1 - \ell) + t_1$
• Si $\ell = k_1$ on obtient $j\theta_1 - \ell = t_1$ donc $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 1 - t_1$
• Si $\ell = k_1 + 1$ on obtient $j\theta_1 - \ell = t_1 - 1$ donc $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = t_1$
• Si $\ell \notin \{k_1, k_1 + 1\}$ alors deux cas sont possibles :
- soit $\ell < k_1$, donc $\ell \leq k_1 - 1$ et $1 \leq k_1 - \ell$ donc $|j\theta_1 - \ell| = (k_1 - \ell) + t_1 \geq 1$ et par suite : $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 0$
- Soi $k_1 + 1 < \ell$ donc $k_1 + 2 \leq \ell$ et par suite $k_1 - \ell \leq -2$ et $k_1 - \ell + t_1 \leq -1$ d'où $|j\theta_1 - \ell| \geq 1$ et $(k_1 - \ell) + t_1 \geq 1$ et par suite : $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 0$
En conclusion, on a :

$$\forall \ell \in [\![0, j - 1]\!] \quad \psi_{j,\ell}(\theta_1) = \begin{cases} 1 - t_1 & \text{si} \quad \ell = k_1 \\ t_1 & \text{si} \quad \ell = k_1 + 1 \\ 0 & \text{si} \quad \ell \notin \{k_1, k_1 + 1\} \end{cases}$$

Une étude similaire pour $\psi_{j,\ell}(\theta_2)$ donne les même résultats à savoir :

$$\forall \ell \in [\![0, j - 1]\!] \quad \psi_{j,\ell}(\theta_2) = \begin{cases} 1 - t_2 & \text{si} \quad \ell = k_2 \\ t_2 & \text{si} \quad \ell = k_2 + 1 \\ 0 & \text{si} \quad \ell \notin \{k_2, k_2 + 1\} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$S_j(f)(\theta) = \lambda_1 f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right)+\lambda_2 f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2}{j}\right)+\lambda_3 f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right)+\lambda_4 f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right)$$

où $\lambda_1 = t_1t_2, \lambda_2 = t_1(1-t_2), \lambda_3 = (1-t_1)t_2, \lambda_4 = (1-t_1)(1-t_2)$
On remarque que $\forall k \in [\![1,4]\!] \quad \lambda_k \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$, ce qui prouve que $f(\theta)$ est la barycentre des points

$$f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right), f\left(\frac{k_1+1}{j},\frac{k_2}{j}\right), f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2+1}{j}\right), f\left(\frac{k_1}{j},\frac{k_2}{j}\right)$$

affectés des poids respectifs : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.
Déduction : Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq 2$. L'application

$$g_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \theta \mapsto |S_j(f)(\theta) - f(\theta)|$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. Notons que si $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe un unique couple (m_1,m_2) d'entiers relatifs et $(x_1,x_2) \in [0,1[^2$ tel que $x_k + m_k = \theta_k, k \in \{1,2\}$. par périodicité on a $g_j(\theta_1,\theta_2) = g_j(x_1,x_2)$ de sorte que $g_j(\mathbb{R}^2) = g_j([0,1]^2)$. par compacité de $[0,1]^2$ et continuité de g_j il existe $\theta_j \in [0,1]^2$ tel que

$$\|S_j(f) - f\|_\infty = |S_j(f)(\theta_j) - f(\theta_j)|$$

D'après la question précédente on a : $S_j(f)(\theta_j) = \sum\limits_{k=1}^{4} \lambda_k f(u_k)$ où λ_k sont positifs et $\sum\limits_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$ et u_k sont des points de $\mathbb{R}^2$ tel que $d(u_k,\theta) \leq \frac{1}{j}$ pour tout $k \in [\![1,4]\!]$.
Il en découle que

$$\|S_j(f) - f\|_\infty = S_j(f)(\theta_j) - f(\theta_j) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k(f(u_k) - f(\theta_j))$$

de sorte que l'on a :

$$\|S_j(f) - f\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{4} |f(u_j) - f(\theta_j)|$$

f étant continue sur le compact $[0,1]^2$, elle y est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]^2$, on a :

$$d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit j_0 un entier tel que $j_0 \geq 2$ et $\frac{1}{j_0} < \eta$.
Pour tout $j \geq j_0$ on a : $d(u_j,\theta_j) \leq \frac{1}{j} < \eta$ donc $|f(u_j) - f(\theta_j)| < \frac{\varepsilon}{4}$ et par suite :

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \Rightarrow \|S_j(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{j\to+\infty} \|S_j(f) - f\|_\infty = 0$.

———————————————————————————

11. Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question **10.** il existe $f_1 \in \mathscr{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\|f - f_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la question **8.**, il existe un polynôme trigonométrique à deux variables P tel que : $\|f_1 - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Il en découle que :

$$\|f - P\|_\infty \leq \|f - f_1\|_\infty + \|f_1 - P\|_\infty < \varepsilon$$

Quatrième partie

12. Comme $x = 0$, le système devient : $\begin{cases} F'(t) = f(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) = \omega \end{cases}$
Il en découle que

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \omega d\tau = t\omega \quad \text{et} \quad F'(t) = f(t\omega).$$

Donc

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(\tau\omega)d\tau$$

et comme $F(0) = 0$ il vient :

$$F(t) = \int_0^t f(\tau\omega)d\tau.$$

———————————————————————————

13. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\theta) = e^{2\pi i(k.\theta)}.$$

où $k = (k_1, k_2)$ défini par l'énoncé tel que $k.\omega = 0$. On voit facilement que f est un polynôme trigonométrique $1-$ périodique.
On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x)dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i k_1 x_1} e^{2\pi i k_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \left(\int_0^1 e^{2\pi i k_1 x_1} dx_1\right)\left(\int_0^1 e^{2\pi i k_2 x_2} dx_2\right) = 1 \end{aligned}$$

Finalement pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $f(t\omega) = e^{2\pi i t(k.\omega)} = 1$ puisque $k.\omega = 0$ d'après l'hypothèse selon laquelle ω est résonnant.
Il en résulte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \int_0^t 1 d\tau = t$$

———————————————————————————

14 On suppose que ω est non résonnant, donc $\forall k \in \mathbb{Z}^2 \quad k.\omega \neq 0$
14a. Posons, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\theta) = \sum_{k\in K} c_k e^{2i\pi(k.\theta)}$$

avec K une partie finie de $\mathbb{Z}^2$ et les c_k des nombres complexes.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(t) = \int_0^t f(\tau\omega)d\tau = \int_0^t \left(\sum_{k\in K} c_k e^{2i\pi\tau(k,\omega)}\right) d\tau$$

Comme $(k,\omega) \neq 0$, on dispose d'une primitive de l'integrande, à savoir :

$$\tau \mapsto \sum_{k\in K} \frac{c_k}{2i\pi(k,\omega)} e^{2i\pi\tau(k,\omega)}$$

ce qui fournit :

$$F(t) = \sum_{k\in K} \frac{c_k}{2i\pi(k,\omega)}(e^{2i\pi t(k,\omega)} - 1)$$

il est aisé de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|F(t)| \leq M$$

avec

$$M = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in K}\frac{|c_k|}{|k.\omega|}$$

Donc F est bornée.

———————————————————————————————

14b. Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question **11.** il existe $\tilde{f}$ polynôme trigonométrique en deux variables tel que $\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} |F(t)| = \left|\int_0^t f(\tau\omega)d\tau\right| &\leq \int_0^t |f(\tau\omega) - \tilde{f}(\tau\omega)|d\tau + \left|\int_0^t \tilde{f}(\tau\omega)d\tau\right| \\ &\leq t\frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_0^t \tilde{f}(\tau\omega)d\tau\right| \end{aligned}$$

Comme $\tilde{f}$ est un polynôme trigonométrique on a d'après de la question **14a.** l'application $t \mapsto \int_0^t \tilde{f}(\tau\omega)d\tau$ est bornée donc il existe $M_1 > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\int_0^t \tilde{f}(\tau\omega)d\tau\right| \leq M_1$$

Comme $M_1 = o(t)$ au voisinage de $+\infty$, il existe $t_0 > 0$ tel que $t \geq t_0 \Rightarrow M_1 \leq t\frac{\varepsilon}{2}$
Ainsi

$$t \geq t_0 \Rightarrow |F(t)| \leq t\varepsilon$$

ce qui prouve que quand t tends vers $+\infty$, on a $F(t) = o(t)$.

———————————————————————————————

15a. On a
$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2, \quad dh(\theta).\omega + g(\theta) = \nu \tag{19}$$
On sait que $dh(\theta).\omega = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) + \omega_2 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$.
Donc :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 dh(\theta).\omega \; d\theta_1 d\theta_2 &= \omega_1 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 \\
&= \omega_1 \int_0^1 h(1, \theta_2) - h(0, \theta_2) \; d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 h(\theta_1, 1) - h(\theta_1, 0) \; d\theta_1 \\
&= \omega_1 \int_0^1 0 \; d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 0 \; d\theta_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$
puisque h est $1-$périodique par rapport à chacune des deux variables $\theta 1$ et θ_2.
il en résulte qu'en intégrant la relation (19) on obtient :
$$\nu = \int_0^1 \int_0^1 g(\theta) \; d\theta_1 d\theta_2$$
Si les composantes g_1 et g_2 de g sont des polynômes trigonométriques en les variables θ_1 et θ_2 alors il existe une partie finie K de $\mathbb{Z}^2$ et des coefficients complexes $(c_k)_{k \in K}$ et $(c'_k)_{k \in K}$ tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2, \quad g_1(\theta) = \sum_{k \in K} c_k e^{2i\pi(k.\theta)} \quad \text{et} \quad g_2(\theta) = \sum_{k \in K} c'_k e^{2i\pi(k.\theta)}$$
Il en découle que :
$$\int_0^1 \int_0^1 g_1(\theta) \; d\theta_1 d\theta_2 = \sum_{k \in K} c_k \int_0^1 \int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} e^{2i\pi k_2 \theta_2} \; d\theta_1 d\theta_2$$
Remarquons que pour tout $k \in K$, on a :
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} e^{2i\pi k_2 \theta_2} \; d\theta_1 d\theta_2 = \left(\int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} \; d\theta_1 \right) \left(\int_0^1 e^{2i\pi k_2 \theta_2} \; d\theta_2 \right)$$
puis remarquons que pour tout entier relatif m l'intégrale $I_m = \int_0^1 e^{2i\pi m t} \; dt$ vérifie $I_m = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = 0 \\ 0 & \text{si} \quad m \neq 0 \end{cases}$ de manière que finalement :
$$\int_0^1 \int_0^1 g_1(\theta) \; d\theta_1 d\theta_2 = c_{(0,0)}$$
Notons que si $(0,0) \notin K$ alors $c_{(0,0)} = 0$.
Comme cette conclusion concerne aussi g_2, on en déduit que
$$\nu = \int_0^1 \int_0^1 g(\theta) \; d\theta_1 d\theta_2 = (c_{(0,0)}, c'_{(0,0)})$$

Déduction :

Note importante :
Pour démontrer l'existence d'une solution h, il semble qu'il faut ajouter la condition (20) ci-dessous (imposée par la périodicité de h comme le montre le contre-exemple donné ci-dessous.) :

$$g(\theta) = \sum_{k\in K} e^{2i\pi(k,\theta)} C_k, \forall k \in K, \quad C_k \in \mathbb{R}^2$$

avec :

$$\forall k \in K, \quad k.\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \tag{20}$$

Notons que la condition (20) est vérifiée dans le cas particulier où ω est non résonnant.
Dans ce qui suit on va :
☞ démontrer l'existence de h si on ajoute cette condition
☞ Donner un contre-exemple dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée.

Existence de h si la condition (20) est vérifiée

On suppose donc que :

$$g(\theta) = \sum_{k\in K} e^{2i\pi(k,\theta)} C_k$$

Où K est une partie finie de $\mathbb{Z}^2$ et$\forall k \in K$, on a $C_k = (c_k, c'_k) \in \mathbb{R}^2$ avec la condition (20) ci-dessus, à savoir :

$$\forall k \in K, \quad k.\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$$

Cherchons h sous la forme $h = (h_1, h_2)$ avec

$$h_1(\theta) = \sum_{k\in K} b_k e^{2i\pi(k.\theta)} \quad \text{et} \quad h_2(\theta) = \sum_{k\in K} b'_k e^{2i\pi(k.\theta)}$$

Notons ce qui suit :
☞ On a indexé par la même partie K, chose possible quitte à prendre la réunion des deux parties initiales et associer un coefficient nul quand c'est nécessaire.
☞ Puisque g_1 et g_2 sont à valeurs réelles alors K doit être symétrique par rapport à $(0,0)$ et pour tout $k \in K$ on doit $c_{-k} = \overline{c_k}$ et $c'_{-k} = \overline{c'_k}$. C'est juste une remarque, elle ne sera pas nécessaire pour ce qui suit.

On a alors

$$dh(\theta).\omega = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h}{\partial \theta_2} = (\omega_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}, \omega_1 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2})$$

En écrivant :

$$h_1(\theta) = \sum_{k\in K} b_k e^{2i\pi(k_1\theta_1 + k_2\theta_2)}$$

on déduit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) = 2i\pi \sum_{k\in K} b_k k_1 e^{2i\pi(k.\theta)} \\ \\ \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) = 2i\pi \sum_{k\in K} b_k k_2 e^{2i\pi(k.\theta)} \end{cases}$$

$$dh(\theta).\omega = 2i\pi \left(\sum_{k\in K} (k.\omega) b_k e^{2i\pi(k.\theta)}, \sum_{k\in K} (k.\omega) b'_k e^{2i\pi(k.\theta)} \right)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$dh(\theta).\omega = 2i\pi \sum_{k\in K} (k.\omega) e^{2i\pi(k.\theta)} B_k$$

où $B_k = (b_k, b'_k)$ Écrivons de même :

$$g(\theta) = \sum_{k\in K} (k.\omega) e^{2i\pi(k.\theta)} C_k$$

avec $C_k = (c_k, c'_k)$.
La relation (19) ci-dessus, s'écrit alors :

$$\sum_{k\in K} e^{2i\pi(k.\theta)}((k.\omega)B_k + C_k) = \nu$$

Pour qu'elle se réalise, il suffit de prendre

$$\begin{cases} C_0 = \nu \\ \\ \forall k \in K\backslash\{(0,0)\}, \quad B_k = -\dfrac{1}{2i\pi(k.\omega)} C_k \end{cases}$$

Contre-exemple dans le cas où la condition (20) n'est pas vérifiée :

Prenons $\omega = (1,1)$ et $g(\theta) = (\cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2), 0)$
Si $h = (h_1, h_2)$ est une solution alors

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} = \cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2)$$

Posons $\begin{cases} t_1 = \theta_1 - \theta_2 \\ t_2 = \theta_2 \end{cases}$, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial \theta_1} = \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1}\dfrac{\partial t_1}{\partial \theta_1} + \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2}\dfrac{\partial t_2}{\partial \theta_1} = \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} \\ \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial \theta_2} = \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1}\dfrac{\partial t_1}{\partial \theta_2} + \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2}\dfrac{\partial t_2}{\partial \theta_2} = -\dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \cos 2\pi t_1$$

Ce qui donne :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{h}_1(t_1, t_2) = t_2 \cos 2\pi t_1 + \varphi(t_1)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, donc :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad h_1(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 \cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2) + \varphi(\theta_1 - \theta_2)$$

Comme h_1 est $1-$périodique par rapport aux variables θ_1, θ_2, on a par exemple :

$$h_1(1,0) = h_1(0,-1) = h(0,0)$$

Or $h_1(1,0) = \varphi(1)$ et $h_1(0,-1) = -1 + \varphi(1)$, ce qui est absurde.

———————————————————————

15b. On a $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + xh(\alpha(t))$, donc $\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t) + xdh(\alpha(t)).(\alpha'(t))$. Compte tenu de $\alpha'(t) = \omega + xg(\alpha(t))$, il vient :

$$\tilde{\alpha}'(t) = \omega + xg(\alpha(t)) + x(dh(\alpha(t)).\omega + xdh(\alpha(t)).g(\alpha(t)))$$

Comme $dh(\alpha(t)).\omega + g(\alpha(t)) = \nu$, on a :

$$\tilde{\alpha}'(t) = \omega + x\nu + x^2 dh(\alpha(t)).g(\alpha(t)))$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\alpha}'(t) = \omega + x\nu + x\varepsilon(x,t) \tag{21}$$

avec

$$\varepsilon(x,t) = xdh(\alpha(t)).g(\alpha(t)) \tag{22}$$

On a

$$dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t)) = g_1(\alpha(t))\frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\alpha(t)) + g_2(\alpha(t))\frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\alpha(t))$$

Comme h est $1-$périodique par rapport aux arguments θ_1 et θ_2, ses dérivées partielles le sont aussi et puisqu'elles sont continues, elles sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, g étant périodique continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}^2$, donc ses composantes g_1 et g_2 aussi. Il en découle que $t \mapsto dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t))$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t))\|$. De (22) , on déduit :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| \leq M|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

———————————————————————

15c. De (21) ci-dessus on déduit :

$$\tilde{\alpha}(t) = t(\omega + x\nu) + \tilde{\alpha}(0) + x\int_0^t \varepsilon(x,s)ds$$

On a $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(0) + xh(\alpha(0)) = xh(0)$ (on note 0 au lieu de $(0,0)$.), donc :

$$\tilde{\alpha}(t) = t(\omega + x\nu) + xh(0) + x\int_0^t \varepsilon(x,s)ds$$

Donc

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) - xh(\alpha(t)) = t(\omega + x\nu) + x(h(0) - h(t\omega)) + x\left(h(t\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x,s)ds\right)$$

Soit

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) - xh(\alpha(t)) = t(\omega + x\nu) + x(h(0) - h(t\omega)) + x\eta(x,t)$$

où

$$\eta(x,t) = h(t\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x,s)ds$$

Soit ψ l'application du compact $[0,1]\times[0,T]$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (t,\tau)\in[0,1]\times[0,T],\quad \psi(t,\tau)=(1-\tau)t\omega+\tau\alpha(t)$$

Soit $t_0\in[0,T]$. Posons $a=t_0\omega$ et $b=\alpha(t_0)$.
Considérons l'application $H:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ définie par

$$H(\tau)=h((1-\tau)a+\tau b)=(h\circ\psi)(t_0,\tau)$$

Alors H est de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$H'(\tau)=dh((1-\tau)a+\tau b).(b-a)=(dh\circ\psi)(t_0,\tau).(b-a)$$

Comme h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ les applications dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial\theta_1}$ et $\frac{\partial h}{\partial\theta_2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc bornées sur le compact

$$K=\psi([0,1]\times[0,T]).$$

Posons

$$M=\left\|\frac{\partial h}{\partial\theta_1}\right\|_{\infty,K}+\left\|\frac{\partial h}{\partial\theta_2}\right\|_{\infty,K}$$

Si on note $a=(a_1,a_2)$ et $b=(b_1,b_2)$ on a :

$$H'(\tau)=(b_1-a_1)\frac{\partial h}{\partial\theta_1}(\psi(t_0,\tau)+(b_2-a_2)\frac{\partial h}{\partial\theta_2}(\psi(t_0,\tau)$$

de sorte que

$$\|H'(\tau)\|\leq M\|b-a\|$$

où $\|b-a\|=\sup(|b_1-a_1|,|b_2-a_2|)$.
Il en découle que

$$\|h(b)-h(a)\|=\|H(1)-H(0)\|=\left\|\int_0^1 H'(\tau)d\tau\right\|\leq\int_0^1\|H'(\tau)\|d\tau\leq M\|b-a\|$$

Puisque $\alpha(0)=0$, on a (rappelons aussi que $\forall s\in\mathbb{R},\quad \alpha'(s)=\omega+xg(\alpha(s)))$

$$b-a=\alpha(t_0)-\omega t_0=[\alpha(s)-\omega s]_0^{t_0}=\int_0^{t_0}(\alpha'(s)-\omega)ds=\int_0^1 xg(\alpha(s))ds$$

donc

$$\|b-a\|\leq\|g\|_\infty|x|$$

Comme t_0 est choisi arbitrairement on a en fin de compte :

$$\forall t\in[0,T],\quad \|h(\alpha(t))-h(t\omega)\|\leq M\|g\|_\infty|x|$$

On a d'autre part

$$\left\|\int_0^t\varepsilon(x,s)ds\right\|\leq T\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varepsilon(x,t)\|$$

Donc

$$\forall t \in [0,T], \quad \|\eta(x,t)\| \leq (M\|g\|_\infty + T)\left(|x| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\|\right)$$

Donc, si on pose

$$M' = M\|g\|_\infty + T \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = |x| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\|$$

on a

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\eta(x,t)\| \leq M'W(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} W(x) = 0$$

car, en vertu du résultat de la question **15b.** on a $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varepsilon(x,t)\| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(\sup_{t\in[0,T]} \|\eta(x,t)\|\right) = 0$$