

Corrigé X 2014 filière MP sujet B

Première partie

Pour simplifier, on posera dans cette partie $M = M_{p,q,r}$ et $N = M_{p',q',r'}$. On utilisera les calculs suivants :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (I + M)(I + N) = \begin{pmatrix} 1 & p + p' & r + r' + pq' \\ 0 & 1 & q + q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Comme $M^3 = 0$, on a $\exp M_{p,q,r} = I_3 + M_{p,q,r} + M_{p,q,r}^2 = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{pq}{2} + r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) $M_{p,q,r} * M_{p',q',r'} = \begin{pmatrix} 0 & p + p' & \frac{pq' - p'q}{2} + r + r' \\ 0 & 0 & q + q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L$, donc la loi $*$ est interne dans L .

L'élément neutre est $0 = M_{0,0,0}$.

$$(M * N) * P = \begin{pmatrix} 0 & p + p' + p'' & x \\ 0 & 0 & q + q' + q'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x = r + r' + r'' + \frac{1}{2}(pq' + pq'' + p'q'' - qp' -$$

$qp'' - q'p'')$. Par symétrie dans l'expression de x , on constate que $(M * N) * P = M * (N * P)$, donc $*$ est associative.

Enfin, $M_{p,q,r} * M_{-p,-q,-r} = M_{-p,-q,-r} * M_{p,q,r} = 0$, donc $(L, *)$ est un groupe.

(b) $M_{p,q,r}$ commute avec tout élément $M_{p',q',r'}$ de L si et seulement si $pq' - p'q = p'q - pq'$ pour tout (p', q', r') , c'est-à-dire $pq' = p'q$, donc $p = q = 0$. Les éléments solutions décrivent la droite vectorielle $\mathbb{R}M_{0,0,1}$. En particulier, $(L, *)$ n'est pas abélien.

3. $\exp M \times \exp N = \begin{pmatrix} 1 & p + p' & y \\ 0 & 1 & q + q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $y = \frac{1}{2}(pq + p'q') + pq' + r + r'$.

En utilisant 2a et 1, $\exp(M * N) = \begin{pmatrix} 1 & p + p' & z \\ 0 & 1 & q + q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z = \frac{1}{2}(p + p')(q + q') + r + r' + \frac{1}{2}(pq' - qp') = y$, donc $\exp M \times \exp N = \exp(M * N)$.

4. $[M, N] = (pq' - qp')M_{0,0,1}$, dont le carré est nul, d'où $\exp([M, N]) = I_3 + [M, N] = I_3 + (pq' - qp')M_{0,0,1}$.

$\exp M \exp N = M_{p+p', q+q', a}$ avec $a = \frac{1}{2}(pq + p'q') + pq' + r + r'$, et de même $\exp(-M) \exp(-N) = M_{-p-p', -q-q', b}$ avec $b = \frac{1}{2}(pq + p'q') + pq' - r - r'$.

D'après les calculs initiaux, $\exp M \exp N \exp(-M) \exp(-N) = I_3 + (a+b + (p+p')(-q-q'))M_{0,0,1} = I_3 + (\frac{1}{2}(pq + p'q') + pq' + r + r' + \frac{1}{2}(pq + p'q') + pq' - r - r' + (p+p')(-q-q'))M_{0,0,1} = I_3 + (pq' - qp')M_{0,0,1}$, d'où $\exp M \exp N \exp(-M) \exp(-N) = \exp([M, N])$.

5. $I_3 + M$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux 1, donc $\det(I_3 + M) = 1$, d'où $H \subset SL_3(\mathbb{R})$.

$(I_3 + M)(I_3 + N) = I_3 + M_{p+p', q+q', pq'+r+r'}$, qui appartient à H .

$(I_3 + M)^{-1} = I_3 + M_{-p, -q, pq-r} \in H$, et $I \in H$, donc H est un sous-groupe de $SL_3(\mathbb{R})$.

Pour tout $M \in L$, $\exp M \in H$. D'après la question 3, \exp est un morphisme de groupes de $(L, *)$ dans (H, \times) .

D'après 1, $\exp M = I_3$ implique $p = q = r = 0$, d'où $M = 0$.

Enfin, $\exp M_{p,q,r-\frac{1}{2}pq} = I + M_{p,q,r}$, donc on a un isomorphisme.

Deuxième partie

On rappelle pour cette partie que pour toute matrice M , $\exp M$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$.

6. (a) On montre d'abord par récurrence sur $k \geq 1$ que $AB^k - B^kA = kB^{k-1}[A, B]$.

C'est vrai pour $k = 1$.

Supposons le vrai au rang k . Alors $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) = kB^{k-1}[A, B]B + B^k[A, B] = (k+1)B^k[A, B]$ car $[A, B]$ commute avec B .

Le lemme annoncé est démontré.

Il en résulte que pour $k \geq 1$, $A \frac{B^k}{k!} - \frac{B^k}{k!}A = \frac{B^{k-1}}{(k-1)!}[A, B]$. On somme de $k = 1$ à $+\infty$. En utilisant que $AI_d - I_dA = 0$, on obtient $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A, B]$.

- (b) On rappelle que $(\exp(tA))' = A \exp(tA) = \exp(tA)A$.

Posons $\varphi(t) = \exp(tA) \exp(tB)$. Alors $\varphi'(t) = \exp(tA)(A \exp(tB) + \exp(tB)B)$.

En appliquant 6a à tA et tB (qui commutent avec $[tA, tB]$), on obtient en simplifiant par t que $A \exp(tB) - \exp(tB)A = \exp(tB)tAB$.

D'où $\varphi'(t) = \exp(tA) \exp(tB)(A + B + t[A, B]) = \varphi(t)(A + B + t[A, B])$.

- (c) On pose $\psi(t) = \varphi(t) \exp(-t(A + B) - \frac{t^2}{2}[A, B])$.

Alors $\psi'(t) = (\varphi'(t) - \varphi(t)(A + B + t[A, B])) \exp(-t(A + B) - \frac{t^2}{2}[A, B]) = 0$. Par suite, ψ est constante. Or $\psi(1) = \exp(A) \exp(B) \exp(-((A + B + \frac{1}{2}[A, B])))$ et $\psi(0) = I_d$, d'où $\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B])$.

7. (a) Posons $M = pA + qB + r[A, B]$ et $N = p'A + q'B + r'[A, B]$. Les matrices A, B et $[A, B]$ commutent avec $[A, B]$ donc par linéarité, M et N commutent avec $[A, B]$.

Le crochet est distributif, antisymétrique ($[A, B] = -[B, A]$, d'où $[A, A] = 0$) et $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ par hypothèse, donc $[M, N] = (pq' - qp')[A, B]$, ce qui entraîne que M et N commutent avec $[M, N]$.

- (b) G est inclus dans $GL_d(\mathbb{R})$. $I = \exp 0 \in G$.

Soient M et N dans \mathcal{L} . $[M, N]$ commute avec M et N , donc d'après 6a, $\exp(M) \exp(N) = \exp(P)$ avec $P = M + N + \frac{1}{2}[M, N]$ qui appartient à \mathcal{L} , donc $\exp(M) \exp(N) \in G$.

Enfin, $-M \in \mathcal{L}$ et $\exp(M)^{-1} = \exp(-M) \in G$. Donc G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

(*) $M_{p,q,r} M_{p',q',r'} = M_{p+p',q+q',r+r'+\frac{1}{2}(pq'-qp')}$.

En appliquant la formule du 6c à $M = pA + qB + r[A, B]$ et $N = p'A + q'B + r'[A, B]$ qui commutent avec $[M, N]$ d'après 7a, on obtient $\exp(M) \exp(N) = \exp(M + N + \frac{1}{2}[M, N]) = \exp((p+p')A + (q+q')B + (r+r'+\frac{1}{2}(pq'-qp'))[A, B])$.

En comparant avec (*), on en déduit que $\Phi(\exp(M_{p,q,r} M_{p',q',r'})) = \Phi(\exp(M_{p,q,r})) \Phi(\exp(M_{p',q',r'}))$, donc Φ est un morphisme de groupes.

8. (a) $\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{k-1}{n})$ appartient à $[0, 1]$ d'où $0 \leq 1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k} \leq 1$.

On pose $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_n^k - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n$. D'après ce qui précède, $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) D_n^k$

d'où $\left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D_n^k - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \lambda^k = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$ en remontant le calcul dans l'autre sens. On sait que $n \ln(1 + \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ donc par continuité de

l'exponentielle, $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\lambda$, donc ε_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- (b) On prouve l'inégalité par récurrence sur k .

Elle est vérifiée pour $k = 1$. Supposons la vraie au rang k .

Alors $D_n^{k+1} - D^{k+1} = D_n(D_n^k - D^k) + (D_n - D)D^k$. Comme la norme est sous-multiplicative, on en déduit en utilisant l'hypothèse de récurrence que :

$$\|D_n^{k+1} - D^{k+1}\| \leq \|D_n\| \|D_n^k - D^k\| + \|D_n - D\| \|D\|^k \leq \lambda k \lambda^{k-1} \|D_n - D\| + \lambda^k \|D_n - D\|.$$

D'où finalement $\|D_n^{k+1} - D^{k+1}\| \leq (k+1)\lambda^k \|D_n - D\|$.

$$(c) \exp(D) - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k - D_n^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{D_n^k}{k!} - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_n^k}{k!} \text{ d'où}$$

$$\|\exp(D) - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n\| \leq \|\varepsilon_n\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{k!} \|D_n - D\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \|\varepsilon_n\| + e^\lambda \|D_n - D\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$9. (a) \|\exp(D) - I_d - D\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|D\|^n}{n!} \leq \|D\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-2)\|D\|^2, \text{ d'où le résultat}$$

avec $\mu = e-2$.

(b) On pose $\exp(A) = I_d + \frac{A}{n} + A_n$ et $\exp(B) = I_d + \frac{B}{n} + B_n$. Soit n_0 le premier entier naturel supérieur ou égal à $\|A\|$ et $\|B\|$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a d'après 9a que $\|A_n\| \leq \mu \frac{\|A\|^2}{n^2}$ et $\|B_n\| \leq \mu \frac{\|B\|^2}{n^2}$. On en déduit :

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A+B}{n} + C_n \text{ avec } C_n = A_n + B_n + \frac{AB}{n^2} + \frac{A_n B}{n} + \frac{A B_n}{n} + \frac{A_n B_n}{n^2}.$$

D'après a, pour tout $n \geq n_0$, on obtient $\|C_n\| \leq \frac{\nu_0}{n^2}$ où on a posé par exemple $\nu_0 = \|AB\| + \mu(\|A\|^2 + \|B\|^2 + \|A\|^2\|B\| + \|A\|\|B\|^2 + \mu\|A\|^2\|B\|^2)$.

En prenant $\nu_1 = \max_{1 \leq n < n_0} (n^2 \|\exp(\frac{A}{n}) \exp(\frac{B}{n}) - I_d - \frac{A}{n} - \frac{B}{n}\|)$ et $\nu = \max(\nu_0, \nu_1)$, on obtient finalement l'égalité voulue avec $\|C_n\| \leq \frac{\nu}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

10. On applique 8c avec $D_n = A + B + nC_n$ qui converge vers $A + B$ d'après 9b :

$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n \text{ converge vers } \exp(A+B) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Troisième partie

11. (a) L'équation différentielle ED proposée est linéaire à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients continus sur $[0, T]$, donc en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, le problème de Cauchy proposé par ED et $\gamma(0) = I_3$ admet une unique solution sur $[0, T]$.

(b) On pose $\gamma(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 3}$. En explicitant ED, on arrive à :

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \end{pmatrix} + v(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & 0 & a_{32} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $a'_{11} = 0$ et $a_{11}(0) = 1$, donc $a_{11} = 1$. $a'_{21} = a'_{31} = 0$ et $a_{21}(0) = a_{31}(0) = 0$, donc $a_{21} = a_{31} = 0$. Ensuite, $a'_{22} = 0$ et $a_{22}(0) = 1$, d'où $a_{22} = 1$. $a'_{32} = 0$ et $a_{32}(0) = 0$ donc $a_{32} = 0$ et $a'_{33} = 0$ et $a_{33}(0) = 1$, d'où $a_{33} = 1$. Il en résulte que $\gamma(t) \in H$ pour tout $t \in [0, T]$.

$$\text{On peut donc écrire } \gamma(t) = \exp(M_{p(t), q(t), r(t)}) = \begin{pmatrix} 1 & p(t) & \frac{1}{2}p(t)q(t) + r(t) \\ 0 & 1 & q(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en tire $p' = u$, $q' = v$ et $r' = pv - \frac{1}{2}(p'q + pq')$, d'où avec les conditions initiales :

$$p(t) = \int_0^t u(s) ds, q(t) = \int_0^t v(s) ds \text{ et } r(t) = \frac{1}{2} \int_0^t v(s) \left(\int_0^s u(y) dy \right) ds - \frac{1}{2} \int_0^t u(s) \left(\int_0^s v(y) dy \right) ds.$$

$$12. \quad (a) \quad p(t) = \int_0^t \sin(\theta - \varphi s) ds = \frac{\cos(\theta - t\varphi) - \cos \theta}{\varphi}. \quad q(t) = \int_0^t \cos(\theta - \varphi s) ds = \frac{\sin \theta - \sin(\theta - t\varphi)}{\varphi}.$$

On pose $R : t \mapsto \frac{t\varphi - \sin(t\varphi)}{2\varphi^2}$ avec $R(0) = 0$. Alors R est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $R'(t) = \frac{1 - \cos(t\varphi)}{2\varphi}$.

$\frac{1}{2}v(t)p(t) - \frac{1}{2}u(t)q(t) = \cos(\theta - t\varphi) \frac{\cos(\theta - t\varphi)}{2\varphi} - \sin(\theta - t\varphi) \frac{\sin \theta - \sin(\theta - t\varphi)}{\varphi} = R'(t)$, d'où par les formules du 11b, $r(t) = R(t)$.

(b) Dans cette question, $\varphi = 0$. En reprenant les formules du 11b, on obtient $p(t) = t \sin \theta$,

$$q(t) = t \cos \theta, \quad r(t) = 0, \quad \text{c'est-à-dire } \gamma_{\theta,0}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \sin \theta & \frac{1}{2}t^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 1 & t \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et $\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 1$, $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 0$ (en fait f et g ainsi prolongées sont développables en série entière sur \mathbb{R} donc \mathcal{C}^∞).

$f'(s) = \frac{2}{s^3}\varphi(s)$ avec $\varphi(s) = s \sin s + 2 \cos s - 2$. $\varphi'(s) = -\sin s + s \cos s$, $\varphi''(s) = -s \sin s$. $\varphi'' < 0$ sur $]0, \pi[$ et $\varphi'' > 0$ sur $]\pi, 2\pi[$, donc φ' décroît sur $[0, \pi]$ et croît sur $[\pi, 2\pi]$, strictement. Comme $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = 0$, $\varphi' < 0$ sur $]0, 2\pi[$, donc φ décroît strictement et $\varphi(0) = 0$ donc $f' < 0$ sur $]0, 2\pi[$, donc f est un homéomorphisme décroissant de $[0, 2\pi]$ sur $[0, 1]$.

$g'(s) = \frac{1}{2s^3}(-s(1 + \cos s) + 2 \sin s) = -\frac{2 \cos \frac{s}{2}}{s^3} \varphi'(\frac{s}{2})$ qui est du signe de $\cos \frac{s}{2}$, donc g croît sur $[0, \pi]$ et décroît sur $[\pi, 2\pi]$ donc atteint son maximum en π , avec $g(0) = 0$, $g(\pi) = \frac{1}{2\pi}$ et $g(2\pi) = \frac{1}{4\pi}$.

14. On part de $\gamma_{\theta,\varphi}(1) = \exp(M_{p,q,r})$.

Si $\varphi = 0$, d'après 12b, $p^2 + q^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ et $r = 0 = g(0) = (g \circ f^{-1})(1)$.

Supposons $\varphi \neq 0$. $p^2 + q^2 = \left(\frac{\cos(\theta - \varphi) - \cos \theta}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta - \sin(\theta - \varphi)}{\varphi}\right)^2 = \frac{2 - 2 \cos \varphi}{\varphi^2} = f(\varphi)$,

d'où $(g \circ f^{-1})(p^2 + q^2) = g(\varphi) = r$ d'après 12a.

Enoncé de la réciproque : Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 + q^2 = 1$. Soit $r = (g \circ f^{-1})(p^2 + q^2)$. Alors $r \geq 0$ et $(p, q, r) \in B(1)$.

Preuve :

- Si $p^2 + q^2 = 1$, alors $\exists \theta \in [-\pi, \pi]$, $p = \cos \theta$ et $q = \sin \theta$, d'où $\gamma_{\theta,0}(1) = \exp(M_{p,q,0})$ d'où $(p, q, 0) \in B(1)$.

- Si $p^2 + q^2 < 1$, posons $\varphi = f^{-1}(p^2 + q^2)$, de sorte que $r = g(\varphi)$, soit $\left(\frac{p\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{q\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2 = 1$.

Il existe donc $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $p\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin(\theta - \frac{\varphi}{2})$ et $q\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos(\theta - \frac{\varphi}{2})$, c'est-à-dire

$p = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \cos \theta}{\varphi}$ et $q = \frac{\sin \theta - \sin(\theta - \varphi)}{\varphi}$. Avec les formules du 12a, on en déduit que $(p, q, r) \in B(1)$.

15. En reprenant 12a, on remarque que $r(1) > 0$ pour $\varphi \in]0, 2\pi[$ et $r(1)$ est impair par rapport à φ .

Si $\exp(M_{p,q,r}) = \gamma_{\theta,\varphi}(1)$, alors les formules du 12a donnent que $\exp(M_{-p,q,-r}) = \gamma_{-\theta,-\varphi}(1)$, donc pour encadrer $p^2 + q^2 + |r|$ dans $B(1)$, on peut se limiter à $r \geq 0$. Dans ce cas, $p^2 + q^2 + r = x + (g \circ f^{-1})(x)$ avec $x = p^2 + q^2$ décrivant $[0, 1]$.

Les fonctions id et $g \circ f^{-1}$ sont continues positives sur le compact $[0, 1]$, et s'annulent respectivement uniquement en 0 et 1. On en déduit que leur somme ne s'annule pas, donc atteint sa borne inférieure $m > 0$ et sa borne supérieure M , d'où l'encadrement $c_1^{-1} \leq p^2 + q^2 + |r| \leq c_1$, avec $c_1 = \max(m^{-1}, M)$.

16. (a) - Supposons $p = q = 0$.

Si $r > 0$, d'après 14, $(0, 0, \lambda^2 r) \in B(1) \iff \lambda^2 r = (g \circ f^{-1})(0)$. Or $(g \circ f^{-1})(0) = \frac{1}{4\pi}$ donc

la seule valeur de λ solution est $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

Si $r < 0$, $(0, 0, -\frac{1}{4\pi}r) \in B(1)$ d'après la remarque du 15.

- Supposons $(p, q) \neq (0, 0)$.

D'après la remarque du 15, $(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1)$ si et seulement si $(-\lambda p, \lambda q, -\lambda^2 r) \in B(1)$, donc on peut se limiter à $r \geq 0$.

D'après 14, $(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1) \iff \lambda^2(p^2 + q^2) \leq 1$ et $\lambda^2 r = (g \circ f^{-1})(\lambda^2 p^2 + \lambda^2 q^2)$.

On pose $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $s \mapsto \frac{(g \circ f^{-1})(s^2)}{s^2}$. La fonction h est continue sur $]0, 1]$, $h(1) = 0$ et $\lim_{s \rightarrow 0} h(s) = +\infty$.

En posant $s = \lambda \sqrt{p^2 + q^2}$, la condition se traduit par $h(s) = \frac{r}{p^2 + q^2}$. Il s'agit donc de montrer que h est bijective de $]0, 1]$ sur \mathbb{R}^+ .

Pour $s \in]0, 1]$, posons $x = f^{-1}(s^2)$. On a $s^2 = f(x) = \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}$.

Par suite, $h(s) = \frac{x^2 g(x)}{1 - \cos x} = \frac{x - \sin x}{4(1 - \cos x)} = \frac{u(x)}{4u'(x)}$ avec $u(x) = x - \sin x$. Posons $H = \frac{u}{4u'}$.

On a $H' = \frac{N}{4u'^2}$ avec $N = u'^2 - uu''$. Après calcul, $N(x) = 2 - 2\cos x - x \sin x$, $N'(x) = \sin x - x \cos x$, $N''(x) = x \sin x$ qui est positif sur $[0, \pi]$ et négatif sur $[\pi, 2\pi]$, donc N' croît sur $[0, \pi]$ et décroît sur $[\pi, 2\pi]$. Or $N'(0) = 0$ et $N'(2\pi) = -2\pi$ donc N' s'annule en un certain α entre π et 2π , et N croît sur $[0, \alpha]$ et décroît sur $[\alpha, 2\pi]$, strictement, et $N(0) = N(2\pi) = 0$ donc N est strictement positive sur $]0, 2\pi[$. Comme f^{-1} décroît, h est strictement décroissante donc bijective de $]0, 1]$ sur \mathbb{R}^+ .

On conclut à l'existence et l'unicité de λ dont la valeur est $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} h^{-1}\left(\frac{r}{p^2 + q^2}\right)$.

(b) Soit $A \in H$, il existe $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ unique tel que $A = \exp(M_{p,q,r})$.

D'après a, il existe θ_0, φ_0 et $\lambda > 0$ tels que $\gamma_{\theta_0, \varphi_0}(1) = \exp(M_{\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r})$, ce qui s'écrit :

$$\lambda p = \frac{\cos(\theta_0 - \varphi_0) - \cos \theta_0}{\varphi_0}, \quad \lambda q = \frac{\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \varphi_0)}{\varphi_0}, \quad \lambda^2 r = \frac{\varphi_0 - \sin(\varphi_0)}{2\varphi_0^2}.$$

Il suffit alors de poser $T(A) = \lambda^{-1}$, $\varphi = \lambda \varphi_0$ et $\theta = \theta_0$ pour avoir grâce aux formules du 12 :

$$\gamma_{\theta, \varphi}(T(A)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(\theta - T\varphi) - \cos \theta}{\varphi} & \frac{T\varphi - \sin(T\varphi)}{2\varphi^2} \\ 0 & 1 & \frac{\sin \theta - \sin(\theta - T\varphi)}{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(\theta_0 - \varphi_0) - \cos \theta_0}{\lambda \varphi_0} & \frac{\varphi_0 - \sin(\varphi_0)}{2\lambda^2 \varphi_0^2} \\ 0 & 1 & \frac{\sin \theta_0 - \sin(\theta_0 - \varphi_0)}{\lambda \varphi_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{1}{2}pq + r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

(c) On applique la question 15 au triplet de la question 16a : $c_1^{-1} \leq \lambda^2(p^2 + q^2 + |r|) \leq c_1$, or $T(\exp(M_{p,q,r})) = \lambda^{-1}$, d'où $c_1^{-1/2} \sqrt{p^2 + q^2 + |r|} \leq T(\exp(M_{p,q,r})) \leq c_1^{1/2} \sqrt{p^2 + q^2 + |r|}$, d'où le résultat demandé avec $c_2 = \sqrt{c_1}$.