Corrigé X/ENS Maths A 2013

1. (a) L'ensemble V contient la suite nulle et est stable par addition et multiplication externe (car $\mathrm{Supp}\,(f+g) \subset \mathrm{Supp}\,(f) \cup \mathrm{Supp}\,(g)$ et $\mathrm{Supp}\,(\alpha f) = \mathrm{Supp}\,(f)$ pour $\alpha \neq 0$) donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

   (b) L'opérateur de décalage E est linéaire. Si f est nulle en dehors d'une partie finie J, alors $E(f)$ est nulle en dehors de $J' = \{k-1 \mid k \in J\}$, donc V est stable par E.

2. L'application $E' : f \mapsto g$ définie par $g(k) = f(k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ est un endomorphisme de V tel que $E \circ E' = E' \circ E = \mathrm{Id}$ donc $E \in \mathrm{GL}(V)$ et $E' = E^{-1}$.

3. (a) Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ à support fini telle que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i v_i = 0$. En appliquant cette relation à l'indice k, on obtient $a_k = 0$, ceci pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est libre.

   Soit $f \in V$, de support J. On constate en testant l'égalité qui suit sur chaque entier que $f = \sum_{i\in J} f(i) v_i$ donc $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est génératrice, et finalement est une base de V.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $E(v_i)(k) = \delta_{i,k+1} = \delta_{i-1,k}$, d'où $E(v_i) = v_{i-1}$.

4. On utilisera souvent dans la suite le fait que deux endomorphismes de V sont égaux si et seulement si ils coïncident sur chaque v_i.

   $(H \circ E)(v_i) = \lambda(i-1) v_{i-1}$. $(E \circ H + 2E)(v_i) = (\lambda(i)+2) v_{i-1}$.

   $H \circ E = E \circ H + 2E \iff \forall i \in \mathbb{Z},\ \lambda(i) = \lambda(i-1) - 2$.

   On utilisera dans la suite l'équivalence (immédiate à prouver) suivante :

   $\forall i \in \mathbb{Z},\ f(i) = f(i-1) + u_i$ équivaut à

   $\forall i \in \mathbb{N},\ f(i) = f(0) + \sum_{j=1}^{i} u_j$ et $\forall i \in \mathbb{Z}^-,\ f(i) = f(0) - \sum_{j=i+1}^{0} u_j$.

   En appliquant cette propriété avec $u_i = -2$ pour tout i, on obtient $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ pour $i \in \mathbb{Z}$.

5. $(E \circ F)(v_i) = \mu(i) v_i$. $(F \circ E + H)(v_i) = (\mu(i-1) + \lambda(0) - 2i) v_i$. L'égalité $E \circ F = F \circ E + H$ équivaut à $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0) - 2i$, donc à $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(0) + \lambda(0) i - i(i+1) = \mu(0) + i(\lambda(0)-1) - i^2$.

6. (a) Soit $f \in V$, de support J. On a $f = \sum_{i\in J} f(i) v_i$ donc par récurrence sur n, $H^n(f) = \sum_{i\in J} \lambda(i)^n f(i) v_i$. Il en résulte que $\mathrm{Vect}\{H^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Vect}\{v_i \mid i \in J\}$, qui est de dimension finie égale à $\mathrm{card}\, J$, donc $\mathrm{Vect}\{H^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est aussi de dimension finie.

   (b) Soit W stable par H et $f \in W \setminus \{0\}$. Le sous-espace vectoriel W' engendré par les $H^n(f)$ est stable par f et de dimension finie d'après a). Le corps de base étant $\mathbb{C}$, l'endomorphisme induit par H sur W' admet un vecteur propre. Or, les $\lambda(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, étant deux à deux distincts d'après la relation $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$, les vecteurs propres de H sont les vecteurs non nuls colinéaires à l'un des v_i. Donc W', et par conséquent W, contient l'un des v_i.

   Autre solution :

   Soit W un tel sous-espace. On considère un élément f non nul de W s'écrivant $\sum_{i\in J} f(i) v_i$ où J est fini et $f(i) \neq 0$ pour tout $i \in J$ **pour lequel le cardinal de J est minimal.**

   On fixe $j \in J$. Soit $g = (\lambda(0) - 2j) f - H(f)$. Alors $g = \sum_{i\in J\setminus\{j\}} ((\lambda(0) - 2j) f(i) - (\lambda(0) - 2i) f(i)) v_i = \sum_{i\in J\setminus\{j\}} 2(i-j) f(i) v_i$. Les coefficients sont non nuls, donc si $\mathrm{card}\, J > 1$, on a trouvé un élément de W non nul dont le support est strictement inclus dans J, ce qui est absurde. Il en résulte que $J = \{j\}$, donc $f(j) v_j \in W$, or $f(j) \neq 0$, d'où $v_j \in W$.

7. (a) Ici, $\mu(i) = 1 - i - i^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc $\mu(i)$ n'est jamais nul. L'image par F de la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est $(\mu(i) v_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ qui est encore une base de V, donc F est bijective.

   (b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, $E^n(v_0) = v_{-n}$ et $F^n(v_0) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mu(k)\right) v_n$. Ces deux vecteurs sont toujours distincts de v_0, donc E et F ne sont pas d'ordre fini.

(c) Avec les notations précédentes, $H(f)=0 \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ f(i)\lambda(i)=0$. Or $\lambda(i)=-2i$ qui est non nul pour $i \neq 0$, donc $H(f)=0 \iff \forall i \in \mathbb{Z}^*,\ f(i)=0$, d'où $\operatorname{Ker} H=\mathbb{C}v_0$.
Pour tout $r \geqslant 1,\ H^r(v_0)=0$, donc $H^r \neq \mathrm{Id}$.

8. Soit $U \in \mathcal{L}(V)$. On sait que l'application $P \mapsto P(U)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathcal{L}(V)$ dont l'image est la sous-algèbre $\mathbb{C}[U]$. On observe que si la famille $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{L}(V)$, alors ce morphisme est injectif, donc sera un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[U]$.

Ce sera en particulier le cas si la famille $(U^n(v_0))_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre dans V, car toute relation de liaison sur les U^n produit la même relation de liaison sur les $U^n(v_0)$.

(a) $E^n(v_0)=v_{-n}$, donc par ce qui précède, $\mathbb{C}[E]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

(b) $F^n(v_0)=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\mu(k)\right)v_n$. Le coefficient devant v_n est non nul, donc de même qu'avant, $\mathbb{C}[F]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

(c) On suppose que $\sum_{n=0}^{d} a_n H^n=0$. Appliqué à v_i, on obtient $\left(\sum_{n=0}^{d} a_n(-2i)^n\right)v_i=0$, d'où $\sum_{n=0}^{d} a_n(-2i)^n=0$. En faisant varier i de 0 à d, on obtient un système linéaire de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues $(a_0,\dots,a_d)$, dont le déterminant est non nul car de Vandermonde relativement aux valeurs $(-2i)_{0\leqslant i\leqslant d}$ qui sont 2 à 2 distinctes (il vaut précisément $\prod_{0\leqslant i<j\leqslant d}(-2j+2i)$). Le système est de Cramer, donc les a_n sont nuls pour $n \in [\![0\,,d]\!]$, d'où $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre, donc $\mathbb{C}[H]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

9. En tant que racine primitive ℓ-ième de l'unité, q s'écrit sous la forme $\exp(\frac{2ik\pi}{\ell})$ avec k premier avec ℓ. Mais alors $q^2=\exp(\frac{4ik\pi}{\ell})$ et $2k$ est premier avec ℓ donc q^2 est encore racine primitive ℓ-ième de l'unité.

10. (a) $G_a(v_i)=v_{i+1}$ pour $0\leqslant i\leqslant \ell-2$ et $G_a(v_{\ell-1})=av_0$, donc $G_a^{\ell-i}(v_i)=av_0$, d'où $G_a^{\ell}(v_i)=G_a^{i}(av_0)=av_i$ pour i compris entre 0 et $\ell-1$. Il en résulte que $G_a^\ell=a\,\mathrm{Id}$, donc G_a est annulé par le polynôme $X^\ell-a$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (car $a\neq 0$), donc G_a est diagonalisable, à spectre inclus dans l'ensemble des racines ℓ-ièmes de a, c'est-à-dire $\{bq^k \mid 0\leqslant k\leqslant \ell-1\}$.

(b) On cherche à résoudre (E) : $G_a(f)=bq^kf$ avec $f=\sum_{i=0}^{\ell-1} f(i)v_i\neq 0$. Comme $G_a(f)=\sum_{i=0}^{\ell-2} f(i)v_{i+1}+af(\ell-1)v_0$, (E) se traduit par $f(i)=bq^kf(i+1)$ pour $0\leqslant i\leqslant \ell-2$ et $af(\ell-1)=bq^kf(0)$. On en déduit $f(i)=(bq^k)^{-i}f(0)$ pour tout $i\in[\![0\,,\ell-1]\!]$.
Par suite, le spectre de G_a est $\{bq^k \mid 0\leqslant k\leqslant \ell-1\}$ et $\operatorname{Ker}(G_a-bq^k\,\mathrm{Id})=\mathbb{C}f_k$ où $f_k=\sum_{i=0}^{\ell-1}(bq^k)^{-i}v_i$.

11. Déjà, $P_a(v_r)=v_r$ lorsque $0\leqslant r<\ell$ et $\Im P_a\subset W_\ell$ par définition, donc $\Im P_a=W_\ell$.
De plus, $P_a^2(v_i)=a^pP_a(v_r)=a^pv_r$ car $r<\ell$, d'où $P_a^2=P_a$, donc P_a est un projecteur d'image W_ℓ.

12. $(H\circ E)(v_i)=H(v_{i-1})=\lambda(i-1)v_{i-1}$. $(E\circ H)(v_i)=\lambda(i)E(v_i)=\lambda(i)v_{i-1}$, donc
$H\circ E=q^2E\circ H \iff \forall i\in\mathbb{Z},\ \lambda(i)=q^{-2}\lambda(i-1) \iff \forall i\in\mathbb{Z},\ \lambda(i)=q^{-2i}\lambda(0)$.

13. $\lambda(0)\neq 0$ donc $\forall i\in\mathbb{Z},\ \lambda(i)\neq 0$, donc l'image par H de la base $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une base, d'où $H\in \mathrm{GL}(V)$.

14. On a $H^{-1}(v_i)=\lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i$, $(E\circ F)(v_i)=\mu(i)v_i$ et $(F\circ E+H-H^{-1})(v_i)=(\mu(i-1)+\lambda(0)q^{-2i}-\lambda(0)^{-1}q^{2i})v_i$, donc $E\circ F=F\circ E+H-H^{-1} \iff \forall i\in\mathbb{Z},\ \mu(i)=\mu(i-1)+\lambda(0)q^{-2i}-\lambda(0)^{-1}q^{2i}$.

15. (a) Pour $i\in\mathbb{Z}$, $\lambda(i+\ell)=\lambda(i)q^{-2\ell}=\lambda(i)$.
$\mu(i+\ell)-\mu(i)=\sum_{j=i+1}^{i+\ell}\mu(j)-\mu(j-1)=\lambda(0)\sum_{j=i+1}^{i+\ell}q^{-2j}-\lambda(0)^{-1}\sum_{j=i+1}^{i+\ell}q^{2j}=0$ car $\sum_{j=1}^{\ell}q^{-2j}=q^{-2}\frac{q^{-2\ell}-1}{q^{-2}-1}=0$ et de même $\sum_{j=1}^{\ell}q^{2j}=0$.
Par suite, λ et μ sont périodiques, ℓ étant une période. L'ensemble des périodes d'une suite périodique étant un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$, il est de la forme $a\mathbb{Z}$ (avec $a\in\mathbb{N}^*$), donc les périodes minimales de λ et μ divisent ℓ.
Attention, quand l'énoncé parle de la période, il s'agit de la période minimale.

(b) q^{-2} est racine primitive ℓ-ième de l'unité donc les complexes q^{-2i} pour i variant de 0 à $\ell-1$ sont 2 à 2 distincts, donc λ est de période minimale ℓ.

(c) On suppose $0 < k < \ell$: par un calcul analogue au précédent,
$\mu(i+k) - \mu(i) = \lambda(0)q^{-2(i+1)} \sum_{j=0}^{k-1} q^{-2j} - \lambda(0)^{-1} q^{2(i+1)} \sum_{j=0}^{k-1} q^{2j}$.

Après simplification, $\mu(i+k) - \mu(i) = \dfrac{q^{2k}-1}{q^2-1} \left(\lambda(0)q^{-2(i+k)} - \lambda(0)^{-1}q^{2(i+1)}\right)$.

Si k est une période de μ, comme $q^{2k} \neq 1$ car $k < \ell$ et q est primitive, on aura pour tout i, $\lambda(0)^2 = q^{2(2i+k+1)}$.

En prenant $i = -1$ puis $i = 0$, il vient $q^{2(k-1)} = q^{2(k+1)}$ d'où $q^4 = 1$ ce qui est absurde car ℓ est impair. Il en résulte que ℓ est la période minimale de μ.

16. (a) $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ donc $C = (q - q^{-1})F \circ E + (q - q^{-1} + q^{-1})H + (-q + q^{-1} + q)H^{-1}$, d'où $C = (q - q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1}$.

(b) $Cv_i = ((q - q^{-1})\mu(i) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1})v_i$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on a :
$\mu(i) = \mu(0) + \lambda(0)q^{-2} \sum_{j=0}^{i-1} q^{-2j} - \lambda(0)^{-1}q^2 \sum_{j=0}^{i-1} q^{2j} = \mu(0) + \lambda(0)q^{-2} \frac{1-q^{-2i}}{1-q^{-2}} - \lambda(0)^{-1}q^2 \frac{q^{2i}-1}{q^2-1}$.
Après un rapide calcul, $Cv_i = \left((q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}\right) v_i$.

Pour $i < 0$, en utilisant la remarque du 4, le calcul se mène de façon analogue et conduit au même résultat.

(c) La valeur propre de C associée à v_i obtenue ci-dessus ne dépend pas de i, donc comme $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V, C est l'homothétie de rapport $R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$.

(d) L'application $\mu(0) \mapsto (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$ est affine de coefficient directeur $q - q^{-1}$ non nul car ℓ est impair, donc est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

(e) Soit $z' \in \mathbb{C}$. L'équation $z' = q^{-1}z + qz^{-1}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $q^{-1}z^2 - z'z + q = 0$ donc est du second degré de coefficient constant non nul donc admet au moins une racine non nulle dans $\mathbb{C}$, donc l'application $\lambda(0) \mapsto (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$ est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$. Lorsque $z' \neq \pm 2$, l'équation possède 2 racines dans $\mathbb{C}^*$, donc l'application ci-dessus n'est pas injective.

17. (a) Si P_a commute avec ϕ, alors $P_a \circ \phi \circ P_a = P_a^2 \circ \phi = P_a \circ \phi$, donc ϕ est compatible avec P_a.

(b) Avec les notations de l'énoncé, $P_a \circ H \circ P_a(v_i) = P_a(a^p H(v_r)) = a^p \lambda(0) q^{-2r} P_a(v_r) = a^p \lambda(0) q^{-2r} v_r$.
$P_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(0)q^{-2i}v_i) = a^p \lambda(0) q^{-2i} v_r$. Or $i = p\ell + r$ donc $q^{-2i} = q^{-2\ell p} q^{-2r} = q^{-2r}$, donc $P_a \circ H \circ P_a = P_a \circ H$.

Le calcul est le même pour H^{-1} en remplaçant q par q^{-1}, donc H et H^{-1} sont compatibles avec P_a.

18. $0 \in \mathcal{U}_q$ et $\mathrm{Id} \in \mathcal{U}_q$. Si ϕ et ψ appartiennent à $\mathcal{U}_q$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, clairement $\alpha\phi$ et $\phi + \psi$ appartiennent à $\mathcal{U}_q$. $P_a \circ \phi \circ \psi \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a \circ \psi \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a \circ \psi = P_a \circ \phi \circ \psi$ (merci à l'associativité), donc $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

19. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on écrit $i = p\ell + r$ avec $0 \leqslant r < \ell$. $P_a \circ E(v_i) = P_a(v_{i-1})$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p P_a(v_{r-1})$.

Si $r \neq 0$: $i - 1 = p\ell + r - 1$ donc $P_a \circ E(v_i) = a^p v_{r-1}$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p v_{r-1}$.

Si $r = 0$: $i - 1 = p\ell - 1 = (p-1)\ell + \ell - 1$ donc $P_a \circ E(v_i) = a^{p-1} v_{\ell-1}$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p P_a(v_{-1}) = a^p a^{-1} v_{\ell-1}$ car $-1 = (-1)\ell + \ell - 1$. Dans tous les cas, $P_a \circ E(v_i) = P_a \circ E \circ P_a(v_i)$ donc $P_a \circ E = P_a \circ E \circ P_a$.

$P_a \circ F(v_i) = \mu(i) P_a(v_{i+1})$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) P_a(v_{r+1})$.

Si $r \neq \ell - 1$: $i + 1 = p\ell + r + 1$ donc $P_a \circ F(v_i) = a^p \mu(i) v_{r+1}$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) v_{r+1}$. Or $i - r$ est multiple de ℓ, période de μ, donc $\mu(i) = \mu(r)$.

Si $r = \ell - 1$: $i + 1 = (p+1)\ell$ donc $P_a \circ F(v_i) = \mu(i) a^{p+1} v_0$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) P_a(v_\ell) = a^{p+1} \mu(r) v_0$, avec là encore $\mu(i) = \mu(r)$.

Dans tous les cas, $P_a \circ F(v_i) = P_a \circ F \circ P_a(v_i)$ donc $P_a \circ F = P_a \circ F \circ P_a$.

20. (a) La composition indiquée dans cette question est incohérente, car on compose un endomorphisme de W_ℓ avec un endomorphisme de V. Cette erreur ne devrait pas avoir trop perturbé les candidats qui s'en sont aperçus.

Comme P_a restreinte à W_ℓ est l'identité, la condition proposée entraîne :

Pour tout $x \in W_\ell,\ \Psi_a(\phi)(x) = P_a(\phi(x))$. Ceci prouve l'unicité de $\Psi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_q, \mathcal{L}(W_\ell))$.

Inversement, pour tout $\phi \in \mathcal{U}_q$, on pose $\boxed{\forall x \in W_\ell,\ \Psi_a(\phi)(x) = P_a(\phi(x))}$.

Ainsi défini, $\Psi_a(\phi)$ est un endomorphisme de W_ℓ, donc l'application Ψ_a ainsi définie est linéaire de $\mathcal{U}_q$ dans $\mathcal{L}(W_\ell)$.

On a alors, pour tout $x \in V,\ \Psi_a(\phi)(P_a(x)) = P_a(\phi(P_a(x))) = P_a(\phi(x))$ car ϕ est compatible avec P_a, d'où $\Psi_a(\phi) \circ P_a = P_a \circ \phi$.

Soient ϕ et ϕ' dans $\mathcal{U}_q$: pour tout x dans $W_\ell,\ \Psi_a(\phi\circ\phi')(x) = P_a((\phi\circ\phi')(x)) = (P_a\circ\phi)(\phi'(x)) = (P_a \circ \phi \circ P_a)(\phi'(x))$ (car ϕ est compatible avec P_a) $= (P_a \circ \phi)(P_a(\phi'(x))) = \Psi_a(\phi)(\Psi_a(\phi')(x))$. On en déduit que $\Psi_a(\phi \circ \phi') = \Psi_a(\phi) \circ \Psi_a(\phi')$, donc Ψ_a est un morphisme d'algèbres.

(b) $\phi \in \operatorname{Ker} \Psi_a \iff \forall x \in W_\ell,\ P_a(\phi(x)) = 0 \iff P_a \circ \phi \circ P_a = 0$ car $\operatorname{Im} P_a = W_\ell$. Comme ϕ est compatible avec P_a, cela équivaut à $P_a \circ \phi = 0$, c'est-à-dire à $\operatorname{Im} \phi \subset \operatorname{Ker} P_a$.

Il ne reste plus qu'à déterminer le noyau de P_a :

Pour $r \in [\![0\,,\ell-1]\!]$, on pose $V_r = \operatorname{Vect}\{v_i \mid i \equiv r \pmod{\ell}\}$. En groupant les indices selon leur congruence modulo r, il apparaît que $V = \bigoplus_{r=0}^{\ell-1} V_r$ et $P_a(V_r) = \mathbb{C}v_r$. Il en résulte que $\operatorname{Ker} P_a = \bigoplus_{r=0}^{\ell-1} \operatorname{Ker} P_a|_{V_r}$.

Soit $f = \sum_{p\in J} \alpha_p v_{p\ell+r} \in V_r$ avec J fini. On a $P_a(f) = \left(\sum_{p\in J} \alpha_p a^p\right) v_r$, donc
$P_a(f) = 0 \iff \sum_{p\in J} \alpha_p a^p = 0$. Ceci entraîne que $f = \sum_{p\in J\setminus\{0\}} \alpha_p(v_{p\ell+r} - a^p v_r)$.
Inversement, $P_a(v_{p\ell+r} - a^p v_r) = 0$, donc $\operatorname{Ker} P_a|_{V_r} = \operatorname{Vect}\{v_{p\ell+r} - a^p v_r \mid p \in \mathbb{Z}^*\}$. On en déduit que $\operatorname{Ker} P_a = \operatorname{Vect}\{v_{p\ell+r} - a^p v_r \mid p \in \mathbb{Z}^*,\ 0 \leqslant r \leqslant \ell-1\}$.

21. (a) $\Psi_a(E)(v_0) = P_a(E(v_0)) = P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{\ell-1}$.

(b) Pour $1 \leqslant r \leqslant \ell-1$, $\Psi_a(E)(v_r) = P_a(v_{r-1}) = v_{r-1}$ donc $\Psi_a(E)^k(v_r) = v_{r-k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.
$\Psi_a(E^\ell)(v_r) = \Psi_a(E)^\ell(v_r) = (\Psi_a(E)^{\ell-r-1} \circ \Psi_a(E))(\Psi_a(E)^r(v_r)) = \Psi_a(E)^{\ell-r-1}(\Psi_a(E)(v_0)) = a^{-1}\Psi_a(E)^{\ell-r-1}(v_{\ell-1}) = a^{-1}v^r$.
De même, $\Psi_a(E^\ell)(v_0) = a^{-1}\Psi_a(E)^{\ell-1}(v_{\ell-1}) = a^{-1}v_0$.
On en déduit que $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1}\operatorname{Id}$.

(c) Pour $0 \leqslant k \leqslant \ell-1$, $\Psi_a(E)^k(v_{\ell-1}) = v_{\ell-k-1}$, donc la famille $(\Psi_a(E)^k(v_{\ell-1}))_{0\leqslant k\leqslant \ell-1}$ est libre, donc a fortiori la famille $(\Psi_a(E)^k)_{0\leqslant k\leqslant\ell-1}$ est libre. D'après la question précédente, on en déduit que $(\Psi_a(E)^k)_{0\leqslant k\leqslant\ell-1}$ est une base de $\mathbb{C}[\Psi_a(E)]$, qui est donc de dimension ℓ. En outre, le polynôme minimal de $\Psi_a(E)$ est égal à $X^\ell - a^{-1}$.

(d) Pour $0 \leqslant k \leqslant \ell-2$, $\Psi_a(E)\circ G_a(v_k) = \Psi_a(E)(v_{k+1}) = v_k$ et $\Psi_a(E)\circ G_a(v_{\ell-1}) = a\Psi_a(E)(v_0) = v_{\ell-1}$. On en déduit que $\Psi_a(E) = G_a^{-1}$. Les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont les inverses de celles de G_a, avec les mêmes vecteurs propres.
Pour $0 \leqslant k \leqslant \ell-1$, $\operatorname{Ker}(\Psi_a(E) - b^{-1}q^{-k}\operatorname{Id}) = \mathbb{C}f_k$ avec $f_k = \sum_{i=0}^{\ell-1}(bq^k)^{-i}v_i$.

22. (a) Pour $0 \leqslant i \leqslant \ell-1$, $\Psi_a(H)(v_i) = P_a(H(v_i)) = \lambda(0)q^{-2i}v_i$. Comme W_ℓ est stable par H, $\Psi_a(H)$ est l'endomorphisme induit par H sur W_ℓ. Or, puisque $\lambda_i = \lambda(0)q^{-2i}$, les $\lambda(i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant \ell-1$ sont 2 à 2 distincts, donc $\Psi_a(H)$ admet ℓ valeurs propres distincts et ses vecteurs propres sont les vecteurs non nuls colinéaires aux v_i, $0 \leqslant i \leqslant \ell-1$. Comme un sous-espace non nul de W_ℓ stable par $\Psi_a(H)$ contient un vecteur propre de $\Psi_a(H)$, il contient l'un des v_i.

(b) Il existe r tel que $v_r \in W$. Si W est stable par $\Psi_a(E)$, comme $\Psi_a(E)(v_r) = \begin{cases} v_{r-1} \text{ si } r \neq 0 \\ a^{-1}v_{\ell-1} \text{ si } r = 0 \end{cases}$,
en appliquant successivement $\Psi_a(E)$ à partir du vecteur v_r, on obtient que tous les v_i appartiennent à W pour $i \in [\![0\,,\ell-1]\!]$, donc $W = W_\ell$.

23. $\Psi_a(F)(v_i) = \mu(i)P_a(v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i)v_{i+1} \text{ si } 0 \leqslant i < \ell-1 \\ a\mu(\ell-1)v_0 \text{ si } i = \ell-1 \end{cases}$

Comme $\dim W_\ell = \ell$, l'endomorphisme $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $\Psi_a(F)^\ell = 0$.

Or $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = \Psi_a(F)^{i+1}\Psi_a(F)^{\ell-i-1}(v_i) = \Psi_a(F)^{i+1}(\mu(i)\cdots\mu(\ell-2)v_{\ell-1})$

d'où $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = a\mu(i)\cdots\mu(\ell-1)\Psi_a(F)^i(v_0) = a\mu(0)\cdots\mu(\ell-1)v_i$.

Il en résulte que $\Psi_a(F)^\ell = a\mu(0)\cdots\mu(\ell-1)\operatorname{Id}$, donc $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si le produit $\prod_{i=0}^{\ell-1}\mu(i) = 0$, c'est-à-dire s'il existe i entre 0 et $\ell-1$ tel que $\mu(i) = 0$.

En reprenant l'expression de μ dans la question 15c (avec $i \leftarrow 0$ et $k \leftarrow i$), on obtient $\mu(i) = \mu(0) + \dfrac{q^{2i}-1}{q^2-1}\left(\lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^2\right)$. $(q^2-1)\mu(i) = qR(\lambda(0), \mu(0), q) - \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i+2}$.
La condition cherchée est qu'il existe $i \in [\![0\,, \ell-1]\!]$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = \lambda(0)q^{-2i-1} + \lambda(0)^{-1}q^{2i+1}$.