

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2012

FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet à traiter ci-après comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.

Notations

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} l'anneau des entiers relatifs et \mathbb{C} le corps des nombres complexes. Si $0 \leq k \leq n$ sont des entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathbb{C} , on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de déterminant non nul et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de déterminant 1.

On note $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des fonctions polynômiales de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i désigne la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}$. La famille $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ est une base de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel.

Pour tout entier $k \geq 0$, on note $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ l'ensemble des fonctions polynômiales homogènes d'ordre k , c'est-à-dire des fonctions $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ telles qu'on ait $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}^n$.

I

Soit un entier $n \geq 1$.

1. Montrer que $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_0$ est composé des fonctions constantes sur \mathbb{C}^n .
2. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, l'ensemble $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, et calculer sa dimension en fonction de n et k .
3. Montrer que $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est la somme directe des sous-espaces $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$, $k \geq 0$.
4. Soit un entier $m \geq 1$, et soit u une application linéaire de \mathbb{C}^m dans \mathbb{C}^n .
 - 4.a. Montrer que, pour tout $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, la fonction composée $f \circ u$ appartient à $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$.
 - 4.b. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ u$ est une application linéaire de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$, et que c'est un isomorphisme si et seulement si u est un isomorphisme.

II

Dans cette partie, on note \mathcal{V} le \mathbb{C} -espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Une fonction Φ de \mathcal{V} dans \mathbb{C} est dite polynômiale si la fonction :

$$(a, b, c) \mapsto \Phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right)$$

de \mathbb{C}^3 dans \mathbb{C} est polynômiale. Pour toute matrice $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, on note tA la transposée de A .

1. Soit $M \in \mathcal{V}$ inversible.
 - 1.a. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme tAMA avec $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.
 - 1.b. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme tAMA avec $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.
2. Soit Φ une fonction polynômiale de \mathcal{V} dans \mathbb{C} .
 - 2.a. Montrer que, pour tout $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, la fonction Φ^A de \mathcal{V} dans \mathbb{C} définie par :

$$\Phi^A : M \mapsto \Phi({}^tAMA)$$

est polynômiale sur \mathcal{V} .

- 2.b. Montrer que la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$x \mapsto \Phi \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est polynômiale sur \mathbb{C} .

3. Soit f une fonction polynômiale de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Montrer que la fonction $\Phi = f \circ \det$ est polynômiale de \mathcal{V} dans \mathbb{C} et vérifie $\Phi^A = \Phi$ pour tout $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.
4. Montrer que toute fonction polynômiale de \mathcal{V} dans \mathbb{C} est continue sur \mathcal{V} .
5. Soit Φ une fonction polynômiale de \mathcal{V} dans \mathbb{C} vérifiant $\Phi^A = \Phi$ pour tout $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} telle que $\Phi = f \circ \det$.

III

Soit un entier $n \geq 1$. Un *monôme* de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ est un élément de la forme λX^α avec $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Étant donné $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ dans \mathbb{N}^n , on note :

$$\alpha \prec \beta$$

si $\alpha \neq \beta$, et si le premier coefficient non nul de $\beta - \alpha$ est strictement positif, c'est-à-dire si le plus petit entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ vérifie $\beta_i - \alpha_i > 0$. On note $\alpha \preceq \beta$ si l'on a soit $\alpha = \beta$, soit $\alpha \prec \beta$.

1. Montrer que \preceq est une relation d'ordre total sur \mathbb{N}^n .
2. Montrer que toute partie finie non vide de \mathbb{N}^n possède un plus grand élément pour la relation d'ordre \preceq .
3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Montrer que $\alpha \preceq \beta$ si et seulement si $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$.
4. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ non nulle, on note $\deg(f)$ le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}^n$ pour la relation d'ordre \preceq tel que le coefficient de f dans la base $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ soit non nul, qu'on appelle le *degré* de f . Montrer que, pour toutes $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ non nulles, on a $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
5. Soit $k \geq 1$ un entier et soient $f, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ non nulles. Montrer qu'il existe $r, q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant les deux conditions suivantes :
 1. $f = b_1 q_1 + \dots + b_k q_k + r$;
 2. si r contient un monôme de degré $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors pour tout entier $i \in \{1, \dots, k\}$ l'un des coefficients de $\alpha - \deg(b_i)$ est strictement négatif.
6. Pour toute partie Λ de \mathbb{N}^n , on note $I(\Lambda)$ l'idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les X^α , $\alpha \in \Lambda$. Soit Λ une partie de \mathbb{N}^n .
 - 6.a. Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer que $X^\beta \in I(\Lambda)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \Lambda$ tel qu'on ait $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$.
 - 6.b. Soit $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que $f \in I(\Lambda)$ si et seulement si tous les monômes de f appartiennent à $I(\Lambda)$.
 - 6.c. Montrer qu'il existe une partie finie Λ_0 de Λ telle que $I(\Lambda_0) = I(\Lambda)$.
7. Soit I un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. En considérant l'idéal engendré par les $X^{\deg(f)}$ pour $f \in I$ non nuls, montrer qu'il existe une partie finie F de I qui engendre I .
8. Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, et soit I l'idéal de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les f_k , $k \geq 0$. Montrer qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que I soit engendré par f_0, \dots, f_r .

IV

Soit un entier $m \geq 0$. On note $\mathcal{B}_m = \mathbb{C}[U, V]_m$ l'espace des fonctions polynômiales de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} qui sont homogènes d'ordre m . Pour chaque entier $i \in \{0, \dots, m\}$, on note e_i la fonction polynômiale :

$$\binom{m}{i} U^{m-i} V^i : (u, v) \mapsto \binom{m}{i} u^{m-i} v^i.$$

Les fonctions e_0, e_1, \dots, e_m forment une base de \mathcal{B}_m . On identifiera \mathcal{B}_m à \mathbb{C}^{m+1} au moyen de cette base. Une fonction Φ de \mathcal{B}_m dans \mathbb{C} sera donc dite polynômiale si la fonction :

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto \Phi(x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_m e_m)$$

de \mathbb{C}^{m+1} dans \mathbb{C} est polynômiale. On note $\mathcal{E}_m = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_m]$ l'algèbre des fonctions polynômiales de \mathcal{B}_m dans \mathbb{C} . Enfin, si $f \in \mathcal{B}_m$ et si :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

on note f^A la fonction de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} définie par :

$$f^A : (u, v) \mapsto f(A(u, v)) = f(au + bv, cu + dv).$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1.a. Montrer que l'application $f \mapsto f^A$ définit un endomorphisme linéaire de \mathcal{B}_m .

1.b. Pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_m$, on note Φ^A la fonction de \mathcal{B}_m dans \mathbb{C} définie par :

$$\Phi^A : f \mapsto \Phi(f^A).$$

Montrer que l'application $\Phi \mapsto \Phi^A$ définit un endomorphisme linéaire de \mathcal{E}_m .

2. Pour tout $k \geq 0$, on note $\mathcal{E}_{m,k}$ le sous-espace de \mathcal{E}_m composé des fonctions homogènes d'ordre k . Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\Phi \mapsto \Phi^A$ laisse stable chacun des sous-espaces $\mathcal{E}_{m,k}$, $k \geq 0$.

3. Soient des entiers $k, p \geq 0$. On note $\mathcal{E}_{m,k,p}$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{m,k}$ engendré par les X^ν avec $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ tels que $\nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_m = k$ et $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + m\nu_m = p$. Montrer que $\mathcal{E}_{m,k}$ est la somme directe des $\mathcal{E}_{m,k,p}$ pour $p \geq 0$.

4. Pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, on note D_i l'application linéaire de \mathcal{E}_m dans \mathcal{E}_m de dérivation par rapport à X_i . On définit deux endomorphismes linéaires D et D' de \mathcal{E}_m par :

$$D(\Phi) = \sum_{i=1}^m iX_{i-1}D_i(\Phi), \quad D'(\Phi) = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)X_{i+1}D_i(\Phi)$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_m$. Soient des entiers $k \geq 0$ et $p \geq 0$.

4.a. Montrer qu'on a $D(\mathcal{E}_{m,k,p+1}) \subseteq \mathcal{E}_{m,k,p}$ et $D'(\mathcal{E}_{m,k,p}) \subseteq \mathcal{E}_{m,k,p+1}$.

4.b. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$, on a :

$$(DD' - D'D)(\Phi) = (mk - 2p)\Phi.$$

4.c. Pour tout entier $n \geq 0$, on note respectivement D^n et D'^n les puissances n -ièmes des endomorphismes D et D' . Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$ et tout $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$, on a :

$$(D^r D' - D' D^r)(\Phi) = r(mk - 2p + r - 1)D^{r-1}(\Phi) \quad (1)$$

et :

$$(DD'^r - D'^r D)(\Phi) = r(mk - 2p - r + 1)D'^{r-1}(\Phi). \quad (2)$$

4.d. On suppose que $mk - 2p = 0$. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$, on a $D(\Phi) = 0$ si et seulement si $D'(\Phi) = 0$. (On pourra commencer par montrer que D et D' sont des endomorphismes nilpotents de $\mathcal{E}_{m,k}$.)

5. Soit un entier $k \geq 0$, et soit $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k}$ une fonction non nulle.

5.a. Montrer que $\Phi^A = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

si et seulement si mk est pair et $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,mk/2}$.

5.b. Montrer que $\Phi^A = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{C},$$

si et seulement si $D(\Phi) = 0$.

5.c. Montrer que $\Phi^A = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{C},$$

si et seulement si $D'(\Phi) = 0$.

6. On note \mathcal{I}_m l'ensemble des fonctions $\Phi \in \mathcal{E}_m$ telles que $\Phi^A = \Phi$ pour tout $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.
- 6.a. Montrer que \mathcal{I}_m est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de \mathcal{E}_m .
- 6.b. Montrer que \mathcal{I}_m est la somme directe des $\mathcal{I}_{m,k} = \mathcal{I}_m \cap \mathcal{E}_{m,k}$ pour $k \geq 0$.
7. Soit un entier $k \geq 0$ tel que $\mathcal{I}_{m,k}$ soit de dimension ≥ 1 .
- 7.a. Montrer que mk est pair et que $\mathcal{I}_{m,k}$ est inclus dans $\mathcal{E}_{m,k,mk/2}$.
- 7.b. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathcal{I}_{m,k}$ et tout $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $\Phi^A = \det(A)^{mk/2} \Phi$.

V

Une fonction Φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} est dite polynômiale si la fonction :

$$(a, b, c, d) \mapsto \Phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

de \mathbb{C}^4 dans \mathbb{C} est polynômiale. On note \mathcal{P} l'algèbre des fonctions polynômiales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} . On note D_a, D_b, D_c, D_d les endomorphismes de dérivation par rapport à a, b, c, d respectivement, et on pose :

$$\Omega = D_a D_d - D_b D_c,$$

qui est un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{P} .

1. Soit $G \in \mathcal{P}$ et soit $B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. On note F la fonction de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} définie par $F : A \mapsto G(AB)$. Montrer que F est polynômiale et que, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a :

$$\Omega(F)(A) = \Omega(G)(AB) \det(B).$$

2. Soit $\Phi \in \mathcal{E}_m$ et soit un entier $r \geq 0$. Pour tout $f \in \mathcal{B}_m$, on définit une fonction G_f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} par :

$$G_f : A \mapsto \Phi(f^A) \det(A)^r. \quad (3)$$

- 2.a. Soit $f \in \mathcal{B}_m$. Montrer que G_f appartient à \mathcal{P} .
- 2.b. Montrer qu'il y a un entier $q \geq r$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}_m$, la fonction $\Omega^q(G_f)$ soit constante sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, où Ω^q désigne la puissance q -ième de l'endomorphisme Ω .
- 2.c. Soit un entier $q \geq r$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}_m$, la fonction $\Omega^q(G_f)$ soit constante sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la fonction Θ de \mathcal{E}_m dans \mathbb{C} définie par :

$$\Theta : f \mapsto \Omega^q(G_f)$$

appartient à \mathcal{I}_m et vérifie $\Theta(f^A) = \Theta(f) \det(A)^{q-r}$ pour tout $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

3. Soit un entier $q \geq 0$ et soit G la fonction de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} définie par $G(A) = \det(A)^q$. Calculer $\Omega^q(G)$ en fonction de q .
4. Soit un entier $k \geq 0$, et soit $\Psi \in \mathcal{I}_{m,k}$. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{E}_m$ et des entiers $0 \leq r \leq q$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{B}_m$, la fonction $\Omega^q(G_f)$ soit constante sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et de valeur $\Psi(f)$.
5. Soit un entier $r \geq 1$, soient $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathcal{I}_m$ et soient $\Phi_1, \dots, \Phi_r \in \mathcal{E}_m$ tels que :

$$\Psi = \Phi_1 \Psi_1 + \dots + \Phi_r \Psi_r$$

appartienne à \mathcal{I}_m . Montrer qu'il existe $\Pi_1, \dots, \Pi_r \in \mathcal{I}_m$ tels que $\Psi = \Pi_1 \Psi_1 + \dots + \Pi_r \Psi_r$.

6. Montrer qu'il existe un entier $r \geq 1$ et des fonctions $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathcal{I}_m$ telles que, pour toute fonction $\Psi \in \mathcal{I}_m$, il existe $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ telle que $\Psi = f(\Psi_1, \dots, \Psi_r)$.

FIN