

Corrigé de l'épreuve : Ubm math D  
 Romain Krust et Michel Quercia

Thème : Théorème de Jordan (1868)

I

1. Soit  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_0$ . On a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f(\lambda x) = f(x)$ . En particulier,  $f(x) = f(0)$  :  $f$  est une fonction constante. Réciproquement, une fonction constante est bien une fonction polynomiale homogène d'ordre 0.
2. Il est clair que  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$  est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . Soit  $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  une famille presque nulle (ie dont tous les termes sont nuls sauf un nombre au plus fini d'entre eux) de complexes et  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$ . C'est un polynôme homogène d'ordre  $k$  si et seulement si, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda X)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \lambda^k X^\alpha$ , ou, en posant  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) X^\alpha = 0$ . Puisque  $(X^\alpha)_\alpha$  est une base, c'est équivalent à  $a_\alpha (\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) = 0$  pour tout  $\alpha$  (et tout  $\lambda$ ). Finalement

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k = \text{Vect}(\{X^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k\}),$$

et la dimension  $d_{n,k}$  de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$  est égale au cardinal de  $C = \{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| = k\}$ . Donnons deux calculs de ce cardinal (bien évidemment, au concours, un seul suffit ; en fournir deux est une perte de temps et risque même, dans certains cas, de donner au correcteur le sentiment que le propos n'est pas assuré) :

1. On a

$$d_{n,k} = \sum_{r=0}^k d_{n-1,k-r} \quad \text{et} \quad d_{n,k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} d_{n-1,k-1-r}$$

d'où  $d_{n,k} = d_{n,k-1} + d_{n-1,k}$ . Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n,0} = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, d_{1,k} = 1$$

Sur les premiers termes du tableau des  $d_{n,k}$ , on voit apparaître en diagonale les lignes successives du triangles de Pascal. Une récurrence sur  $n+k$  permet de confirmer que

$$d_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

2. On peut aussi constater que l'application

$$\alpha \mapsto (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + (n-2))$$

de  $C$  dans l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur  $n-1$  à valeurs dans  $\llbracket 0, k+n-2 \rrbracket$  est une bijection.

3. La base  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  peut être partitionnée en sous-familles  $(X_\alpha)_{|\alpha|=k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et chacune est une base de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ . Donc

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$$

*Note : la notion de somme directe d'une famille quelconque de sous-espaces est hors programme.*

4. (a) Soit  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  la matrice de  $u$  dans les bases canoniques. On a

$$f \circ u = f \left( \sum_{j=1}^m a_{1,j} X_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{n,j} X_j \right) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$$

- (b) La linéarité est immédiate. Il s'agit même d'un morphisme d'algèbre conservant le degré d'homogénéité. S'il s'agit d'un isomorphisme, il induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_1 = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$  sur  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]_1 = \text{Vect}(X_1, \dots, X_m)$ . En identifiant  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_1$  et  $\mathbb{C}^n$  d'une part,  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]_1$  et  $\mathbb{C}^m$  d'autre part, l'application induite n'est autre que  $u$  elle-même. Donc  $n = m$  et  $u$  est un isomorphisme. Réciproquement, si  $u$  est un isomorphisme, l'application considérée admet pour réciproque  $f \mapsto f \circ u^{-1}$ .

## II

1. (a) Notons tout d'abord que si cet ensemble est non vide, il est égal à l'ensemble des matrices diagonales inversibles. En effet, si  ${}^tAMA = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  (où  $\lambda$  et  $\mu$  sont non nuls), alors, en

notant  $\zeta$  et  $\eta$  des racines carrées de  $\lambda$  et  $\mu$  et en posant  $B = \begin{pmatrix} u/\zeta & 0 \\ 0 & v/\eta \end{pmatrix}$ , où  $u, v \in \mathbb{C}^*$ , on a

$${}^t(AB)M(AB) = {}^tB({}^tAMA)B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant qu'il est effectivement non vide. Posons  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  :

si  $a \neq 0$ , on a en posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  ${}^tAMA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (ac - b^2)/a \end{pmatrix}$  ;

si  $c \neq 0$ , on a en posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b/c & 1 \end{pmatrix}$ ,  ${}^tAMA = \begin{pmatrix} (ac - b^2)/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$  ;

si  $a = c = 0$ , on a en posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  ${}^tAMA = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$ .

- (b) Si  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , alors  $\det({}^tAMA) = \det(M)$ . L'ensemble cherché est donc contenu dans l'ensemble des matrices diagonales de même déterminant que  $M$ . Réciproquement, si  $N$  est diagonale et  $\det(N) = \det(M)$ , il existe, d'après la question précédente,  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  telle que  $N = {}^tAMA$  et l'on a  $\det(N) = \det(A)^2 \det(M)$  d'où  $\det(A)^2 = 1$ . Si  $\det(A) = -1$ , alors  $A' = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  ${}^tA'MA' = N$  et  $\det(A') = 1$ .

2. (a) Ceci résulte de I.4.a. et de la linéarité de l'application  $M \mapsto {}^tAMA$ .  
 (b) C'est immédiat.

3. L'application  $A \mapsto \det(A)$  étant polynomiale, il est clair que  $f \circ \det$  l'est aussi. En outre, pour toute  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $M \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $\Phi^A(M) = f(\det({}^tAMA)) = f(\det(M)) = \Phi(M)$ .
4. Les applications coordonnées sont continues et une somme de produits de fonctions continues est continue.
5. Posons  $f(x) = \Phi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ . Soit  $M \in \mathcal{V} \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$ . Il existe d'après **1.b.** une matrice  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  vérifiant  ${}^tAMA = \begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et l'on a

$$\Phi(M) = \Phi^A(M) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(\det(M)).$$

Ainsi, les applications continues  $\Phi$  et  $f \circ \det$  coïncident sur  $\mathcal{V} \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$  qui est <sup>1</sup> une partie dense de  $\mathcal{V}$ . Elles sont donc égales. L'unicité résulte immédiatement de la surjectivité de  $\det$ .

## 1 III

1.  $\diamond$  Réflexivité : évident.
- $\diamond$  Antisymétrie : Si  $\alpha \neq \beta$ , on a, en notant  $i$  le plus petit entier tel que  $\beta_i - \alpha_i \neq 0$ ,  $\beta_i - \alpha_i > 0$  ou  $\beta_i - \alpha_i < 0$  donc  $\alpha \prec \beta$  ou  $\beta \prec \alpha$ .
- $\diamond$  Transitivité : Si  $\alpha \prec \beta \prec \gamma$  alors, en notant  $i$  et  $j$  les plus petits indices tels que  $\beta_i - \alpha_i \neq 0$  et  $\gamma_j - \beta_j \neq 0$ , et en supposant par exemple  $i \leq j$ ,  $i$  est le plus petit indice tel que  $\gamma_i - \alpha_i \neq 0$ , et l'on a  $\gamma_i - \alpha_i = (\gamma_i - \beta_i) + (\beta_i - \alpha_i) > 0$  donc  $\alpha \prec \gamma$ .
- $\diamond$  Ordre total : immédiat.
2. Un ensemble fini non vide et totalement ordonné possède évidemment un plus grand élément. Donc toute partie finie non vide de  $\mathbb{N}^n$  possède un plus grand élément.
3. Immédiat compte tenu de  $(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$ .
4. Soient  $\alpha = \deg(f)$  et  $\beta = \deg(g)$ . L'inégalité  $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$  est immédiate. Mais le produit  $fg$  ne comporte qu'un unique monôme de degré  $\alpha + \beta$  car si  $\alpha', \beta' \in \mathbb{N}^n$  sont tels que  $\alpha' \preccurlyeq \alpha$  et  $\beta' \preccurlyeq \beta$  et  $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$  alors  $(\alpha - \alpha') = -(\beta - \beta')$  qui ne peut être non nul (le premier terme non nul serait strictement positif et strictement négatif), d'où  $\alpha' = \alpha$  et  $\beta' = \beta$ . On a donc  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ .
5. Montrons tout d'abord que toute partie non vide de  $\mathbb{N}^n$  possède pour  $\preccurlyeq$  un plus petit élément. Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{N}^n$ . Notons  $p_i : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  l'application  $x \mapsto x_i$ . L'ensemble  $p_1(E)$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , qui admet un plus petit élément  $a_1$ . Posons  $E_1 = \{x \in E; p_1(x) = a_1\}$ , puis  $a_2 = \min(p_2(E_1))$ ,  $E_2 = \{x \in E_1; p_2(x) = a_2\}, \dots, a_n = \min(p_n(E_{n-1}))$ . L'élément  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  est le plus petit élément de  $E$ .
- Prouvons maintenant l'énoncé demandé. Soient  $k \geq 1$  et  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ . Supposons par l'absurde l'existence de  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$  mettant l'énoncé en défaut, et notons  $F$  l'ensemble de ces fonctions polynomiales. Alors  $f \in F$  ne vérifie pas elle-même le point 2. (sans quoi on peut choisir  $q_1 = \dots = q_k = 0$  et  $r = f$ ) et l'on peut poser

$$\alpha(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n; f \text{ contient un monôme de degré } \alpha \\ \text{vérifiant } \exists i \in \{1, \dots, k\}, \alpha - \deg(b_i) \geq 0\}$$

1. Pour toute  $M \in \mathcal{V}$ ,  $M + \varepsilon I_2 \in \mathcal{V}$  est inversible pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$  suffisamment petit en module.

D'après le lemme, on peut choisir  $f$  tel que  $\alpha(f)$  soit minimal. Soit  $i$  tel que  $\alpha(f) - \deg(b_i) \geq 0$ . Notons  $a$  le coefficient de  $X^{\alpha(f)}$  dans  $f$  et  $b$  le coefficient de  $X^{\deg(b_i)}$  dans  $b_i$  et posons

$$g = f - \frac{a}{b} X^{\alpha(f) - \deg(b_i)} b_i.$$

On a clairement  $g \in F$ . Comme  $\deg(X^{\alpha(f) - \deg(b_i)} b_i) = \alpha(f)$ , les monômes intervenants dans  $g$  sont de degré  $< \alpha(f)$ . Donc  $\alpha(g) < \alpha(f)$ , ce qui est absurde.

*Remarque* : Il sera utile de noter que l'on peut, sans modifier la preuve, adjoindre la condition  $|\deg(q_i)| < |\deg(f)|$  lorsque  $f \neq 0$ .

6. (a) Si  $X^\beta \in I(\Lambda)$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Lambda$  et  $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tels que

$$X^\beta = X^{\alpha_1} q_1 + \dots + X^{\alpha_s} q_s$$

et l'un des  $q_i$  comporte un monôme de degré  $\gamma$  tel que  $\beta = \alpha_i + \gamma$ . Donc  $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$ .

Réciproquement, s'il existe  $\alpha \in I(\Lambda)$  tel que  $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$ , alors  $X^\beta = X^{\beta - \alpha} X^\alpha \in I(\Lambda)$ .

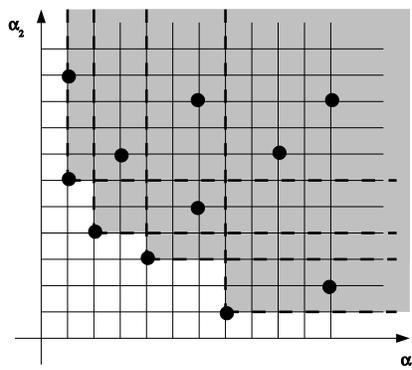
- (b) Si  $f \in I(\Lambda)$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Lambda$  et  $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  tels que

$$f = X^{\alpha_1} q_1 + \dots + X^{\alpha_s} q_s$$

et chaque monôme  $X^\beta$  de  $f$  est monôme de l'un des  $X^{\alpha_i} q_i$ . Comme ci-dessus,  $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$ .

La réciproque est évidente.

- (c) Le diagramme suivant, pour  $n = 2$ , illustre l'existence d'une telle partie finie (les points noirs sont les éléments de  $\Lambda$  et les zones grisées correspondent aux  $\beta$  tels que  $X^\beta \in I(\Lambda)$ ).



Raisonnons par récurrence sur  $n$ , en supposant  $\Lambda \neq \emptyset$  (le cas contraire est trivial). L'hypothèse de récurrence sera :

$$H_n : \text{Pour toute } \Lambda \subset \mathbb{N}^n, \text{ il existe } \Lambda_0 \text{ finie telle que } \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$$

$\diamond H_1$  est vraie : Il suffit de prendre  $\Lambda_0 = \{\min(\Lambda)\}$ .

$\diamond$  Si  $n \geq 2$  et  $H_{n-1}$  est vrai : On va montrer qu'il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall \beta \in \Lambda, \exists \alpha \in \Lambda; \alpha_n \leq M \text{ et } \beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$$

La conclusion en découlera en raisonnant ainsi : on choisit un tel  $M$  et on pose  $\Lambda_{n-1} = \{\alpha \in \Lambda; \alpha_n \leq M\}$ . On a alors  $\Lambda_{n-1} \subset \Lambda \subset \Lambda_{n-1} + \mathbb{N}^n$ . On construit ensuite, de la même façon,

$M' \in \mathbb{N}$  tel que, en posant  $\Lambda_{n-2} = \{\alpha \in \Lambda_1, \alpha_{n-1} \leq M'\}$ , on ait  $\Lambda_{n-2} \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_{n-2} + \mathbb{N}^n$ , etc. Alors  $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$  et  $\Lambda_0 \subset \llbracket 1, M^{(n-1)} \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, M' \rrbracket \times \llbracket 1, M \rrbracket$  est fini.

Prouvons maintenant l'existence de  $M$ . À chaque  $\alpha \in \Lambda$ , associons  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  et posons  $\Lambda' = \{\alpha', \alpha \in \Lambda\}$ . Il existe, d'après  $H_{n-1}$ ,  $\Lambda'_0$  fini tel que  $\Lambda'_0 \subset \Lambda' \subset \Lambda'_0 + \mathbb{N}^{n-1}$ . Il suffit alors de choisir  $M$  tel que, pour tout  $\beta \in \Lambda'_0$ , il existe  $\alpha \in \Lambda$  tel que  $\alpha' = \beta$  et  $\alpha_n \leq M$ .

7. On peut supposer  $I \neq \{0\}$ . Soit  $\Lambda = \{\deg(f), f \in I \setminus \{0\}\}$  et  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  une partie finie telle que  $I(\Lambda_0) = I(\Lambda)$ . Soient  $b_1, \dots, b_s \in I \setminus \{0\}$  tels que  $\Lambda_0 = \{\deg(b_k), 1 \leq k \leq s\}$  et  $J$  l'idéal engendré par  $b_1, \dots, b_s$ . Soit  $f \in I \setminus \{0\}$  : il existe  $q_1, \dots, q_s$  et  $r$  comme dans 5.. Alors  $r \in I$  d'après le premier point et, si  $r \neq 0$ ,  $\deg(r) \in \Lambda$ . Par 6.a.,  $\deg(r) - \deg(b_i) \in \mathbb{N}^n$  pour un certain  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , ce qui contredit le second point de 5.. Donc  $r = 0$ ,  $f \in J$  et  $I = J$ .
8. Soit  $F$  une partie finie de  $I$  qui engendre  $I$ . Il existe  $r \geq 0$  tel que tous les éléments de  $F$  appartiennent à l'idéal engendré par  $f_0, \dots, f_r$ . L'idéal engendré par  $f_0, \dots, f_r$  est  $I$ .

## IV

1. (a) Proviens immédiatement de la linéarité de l'application  $(u, v) \mapsto A(u, v)$  et de I.4.b.  
 (b) L'application  $\Phi^A$  est polynomiale car composée de  $f \mapsto f^A$  qui est linéaire et de  $\Phi$  qui est polynomiale (I.4.b). La linéarité de  $\Phi \mapsto \Phi^A$  est évidente.
2. La remarque faite en I.4.b. montre que si  $\Phi$  est homogène de d'ordre  $k$ ,  $\Phi^A$  aussi.
3. Il s'agit d'une partition de la base canonique  $(X^\nu)_{|\nu|=k}$  de  $\mathcal{E}_{m,k}$ . Noter que le nombre de valeurs de  $p$  pour lesquels  $\mathcal{E}_{m,k,p} \neq \{0\}$  est fini car un tel  $p$  vérifie  $p \leq km$ .
4. On posera pour  $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ ,  $\|\nu\| = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + m\nu_m$ .  
 (a) On a clairement, pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^{m+1}$ ,  $|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))| = k$  et  $\|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\| + 1$  (lorsque  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ), ainsi que  $|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))| = k$  et  $\|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\| + 1$  (lorsque  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ ). Les inclusions demandées en résultent.  
 (b) Notons  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{[0,m]}$  (le terme 1 correspondant à l'indice  $i$ ). Soit  $\nu \in \mathbb{N}^{[0,m]}$  tel que  $|\nu| = k$  et  $\|\nu\| = p$ . On a (on note  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$ , 0 sinon) :

$$\begin{aligned} DD'(X^\nu) &= D \left( \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\nu_j X^{\nu+e_{j+1}-e_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\nu_j (\nu_i + \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(DD' - D'D)(X^\nu) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j) [\nu_j(\nu_i + \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) \\
&\quad - \nu_i(\nu_j + \delta_{j,i-1} - \delta_{i,j})] X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)(\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j})(\nu_j - \nu_i) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\delta_{i,j+1}(\nu_j - \nu_i) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m i(m-i+1)(\nu_{i-1} - \nu_i) X^\nu \\
&= \sum_{i=0}^m (m-2i)\nu_i X^\nu \\
&= (mk - 2p)X^\nu
\end{aligned}$$

On conclut par linéarité.

- (c) On procède par récurrence sur  $r$ . Le cas  $r = 1$  vient d'être établi. Supposons (1) vraie pour un certain  $r \geq 1$ . Alors, pour tout  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ ,  $D^r(\Phi) \in \mathcal{E}_{m,k,p-r}$  si  $r \leq p$  et  $D^r(\Phi) = 0$  si  $r > p$ . Donc

$$\begin{aligned}
(D^{r+1}D' - D'D^{r+1})(\Phi) &= D(D^rD' - D'D^r)(\Phi) + (DD' - D'D)D^r(\Phi) \\
&= r(mk - 2p + r - 1)D^r(\Phi) + (mk - 2(p - r))D^r(\Phi) \\
&= (r + 1)(mk - 2p + r)D^r(\Phi)
\end{aligned}$$

La relation (2) se prouve de façon similaire.

- (d) Soit  $\Phi \in E_{m,kp} \setminus \{0\}$ . Alors, d'après la remarque faite en 3., on a  $p \leq km$  et, par 4a.,  $D^{km+1}(\Phi) = D'^{km+1}(\Phi) = 0$ . Les endomorphismes induits par  $D$  et  $D'$  sur  $\mathcal{E}_{m,k}$  sont donc nilpotents. Soient maintenant  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$  tel que  $D(\Phi) = 0$  et  $r$  minimal tel que  $D'^r(\Phi) = 0$ . Alors, d'après (2),  $r(r-1)D'^{r-1}(\Phi) = 0$ , d'où  $r \leq 1$  et  $D'(\Phi) = 0$ . La réciproque est similaire.
5. (a) Pour  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ , on a  $e_i(A(u, v)) = e_i(\lambda u, \lambda^{-1}v) = \lambda^{m-2i}e_i(u, v)$ , c'est-à-dire

$$e_i^A = \lambda^{m-2i}e_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\Phi^A(x_0, \dots, x_m) &= \Phi \left( \left( \sum_{i=0}^m x_i e_i \right)^A \right) = \Phi \left( \sum_{i=0}^m x_i e_i^A \right) \\
&= \Phi \left( \sum_{i=0}^m \lambda^{m-2i} x_i e_i \right) = \Phi(\lambda^m x_0, \lambda^{m-2} x_1, \dots, \lambda^{-m} x_m)
\end{aligned}$$

En particulier, pour  $\Phi = X^\alpha$  (où  $|\alpha| = k$ ; rappelons aussi que l'on a posé  $\|\alpha\| = \sum_{i=0}^m i\alpha_i$ ) :

$$\Phi^A = \lambda^{\sum_{i=0}^m \alpha_i(m-2i)} \Phi = \lambda^{mk-2\|\alpha\|} \Phi$$

Puisque les  $(X^\alpha)_{|\alpha|=k}$  forment une base de  $\mathcal{E}_{m,k}$ , on a  $\Phi^A = \Phi$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  si et seulement si  $\Phi \in \text{Vect}\{X^\alpha, |\alpha| = k, 2\|\alpha\| = mk\}$ , c'est-à-dire si  $mk$  est pair (faute de quoi cet espace serait réduit à  $\{0\}$ ) et  $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,mk/2}$ .

(b) Posons plutôt  $A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On a ici :

$$e_i(A_\mu(u, v)) = e_i(u + \mu v, v) = \binom{m}{i} (u + \mu v)^{m-i} v^i = \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} u^{m-i-j} (\mu v)^j v^i,$$

c'est-à-dire :

$$e_i^{A_\mu} = \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i+j}{i} \mu^j e_{i+j}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m) &= \Phi \left( \sum_{i=0}^m x_i e_i^{A_\mu} \right) \\ &= \Phi \left( \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i+j}{j} \mu^j x_i e_{i+j} \right) \\ &= \Phi \left( \sum_{k=0}^m \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right) e_k \right) \\ &= \Phi(x_0, \mu x_0 + x_1, \mu^2 x_0 + 2\mu x_1 + x_2, \dots, \\ &\quad \mu^m x_0 + m\mu^{m-1} x_1 + \frac{m(m-1)}{2} \mu^{m-2} x_2 + \dots + x_m) \end{aligned}$$

Pour  $\Phi = X^\alpha$ , il vient :

$$\Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m) = \prod_{k=0}^m \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right)^{\alpha_k}$$

Or

$$\frac{d}{d\mu} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right) = k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \mu^j x_{(k-1)-j}.$$

On a donc :

$$\frac{d}{d\mu} (\Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m)) = D(\Phi)^{A_\mu}$$

Cette relation est, par linéarité, valable pour toute  $\Phi \in \mathcal{E}_m$ . On a donc  $\Phi^{A_\mu} = \Phi$  quel que soit  $\mu$  si et seulement si  $D(\Phi)^{A_\mu} = 0$  quel que soit  $\mu$ , c'est-à-dire si et seulement si  $D(\Phi) = 0$ .

(c) C'est un calcul similaire.

6. (a) C'est un sous-espace vectoriel parce que  $\Phi \mapsto \Phi^A$  est linéaire. C'est aussi un sous-anneau parce que cette application est un morphisme d'anneau ( $(\Phi\Psi)^A = \Phi^A\Psi^A$  et  $1^A = 1$ ). De manière plus synthétique,  $\mathcal{J}_m$  est une sous-algèbre (unitaire) de  $\mathcal{E}_m$  car  $\Phi \mapsto \Phi^A$  est un morphisme d'algèbres (unitaires).

(b) Soit  $\Phi \in \mathcal{J}_m$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $(\Phi_k)_k \in \prod_{k=0}^N \mathcal{E}_{m,k}$  tels que  $\Phi = \sum_{k=0}^N \Phi_k$  et l'on a :

$$\Phi = \Phi^A = \sum_{k=0}^N \Phi_k^A$$

Or  $\mathcal{E}_{m,k}$  étant stable par  $\Phi \mapsto \Phi^A$ , on a  $\Phi_k^A \in \mathcal{E}_{m,k}$  d'où  $\Phi_k = \Phi_k^A$  et  $\Phi_k \in \mathcal{J}_{m,k}$ . Ainsi l'on a bien

$$\mathcal{J}_m = \bigoplus_k \mathcal{J}_{m,k}$$

7. (a) C'est immédiat par **5.a**.

(b) Notons que, pour toutes  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ ,  $\Phi^{AB} = (\Phi^B)^A$ . Soit alors  $A \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $d \in \mathbb{C}^*$  une racine carrée de  $\det(A)$  et  $B = \frac{1}{d}A$  (donc  $B \in SL_2(\mathbb{C})$ ). On a, pour toute  $\Phi \in \mathcal{J}_{m,k}$  :

$$\Phi^A = \Phi^{(dI_2)B} = (\Phi^B)^{dI_2} = \Phi^{dI_2}.$$

Or, pour toute  $f \in \mathcal{B}_m$ ,

$$\Phi^{dI_2}(f) = \Phi(f \circ (dI_2)) = \Phi(d^m f) = d^{mk} \Phi(f).$$

On a bien

$$\Phi^A = \det(A)^{mk/2} \Phi.$$

## V

1. L'application  $F$  est polynomiale d'après **I.4.a**. Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ . On a

$$F(A) = G(AB) = G(ax + bz, ay + bt, cx + dz, cy + dt)$$

donc  $D_d F(A) = (zD_c G + tD_d G)(AB)$  et

$$D_a D_d F(A) = (xzD_a D_c G + yzD_b D_c G + xtD_a D_d G + ytD_b D_d G)(AB).$$

De même

$$D_b D_c F(A) = (xzD_a D_c G + xtD_b D_c G + yzD_a D_d G + ytD_b D_d G)(AB)$$

d'où

$$\Omega(F)(A) = (xt - yz)(D_a D_d G - D_b D_c G)(AB) = \det(B)\Omega(G)(AB)$$

2. (a) Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Pour  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ , on a

$$e_i^A(u, v) = e_i(A(u, v)) = \binom{m}{i} (au + bv)^{m-i} (cu + dv)^i.$$

En développant cette expression, on voit qu'il existe des applications  $p_{j,i} \in \mathcal{P}$  telles que

$$e_i^A = \sum_{j=0}^m p_{j,i}(a, b, c, d) e_j.$$

Pour  $f = \sum_{i=0}^m x_i e_i$ , il vient

$$f^A = \sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^m p_{j,i}(a, b, c, d) x_i \right) e_j$$

et

$$\Phi(f^A) = \Phi \left( \sum_{i=0}^m p_{0,i}(a, b, c, d) x_i, \sum_{i=0}^m p_{1,i}(a, b, c, d) x_i, \dots, \sum_{i=0}^m p_{m,i}(a, b, c, d) x_i \right)$$

Il est maintenant clair que  $A \mapsto \Phi(f^A) \in \mathcal{P}$  et  $G_f \in \mathcal{P}$ .

(b) Notons  $\text{Deg}(P) = |\deg(P)|$  le degré total d'un polynôme  $P$ . On a clairement  $\text{Deg}(\Omega^q(G_f)) \leq 0$  dès que  $2q \geq \text{Deg}(G_f)$ . Or les applications  $p_{j,i}$  ci-dessus étant de degré total  $m$ , on a  $\text{Deg}(G_f) \leq m\text{Deg}(\Phi) + 2r$ . Aussi  $\Omega^q(G_f)$  est-il indépendant de  $A$  dès que  $2q \geq m\text{Deg}(\Phi) + 2r$ .

(c) Soient  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  et  $f \in \mathcal{B}_m$ . On a, pour tout  $M \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ ,

$$G_{f^A}(M) = \Phi((f^A)^M) \det(M)^r = \Phi(f^{AM}) \det(AM)^r \det(A)^{-r} = G_f(AM) \det(A)^{-r}$$

et, par 1.,

$$\Omega^q(G_{f^A})(M) = \Omega^q(G_f)(AM) \det(A)^q \det(A)^{-r} = \Omega^q(G_f)(M) \det(A)^{q-r}$$

On a bien

$$\Theta(f^A) = \Theta(f) \det(A)^{q-r}$$

L'appartenance de  $\Theta$  à  $\mathcal{J}_m$  en découle immédiatement.

3. De  $G(A) = (ad - bc)^q$ , on déduit aisément  $\Omega(G)(A) = q(q+1) \det(A)^{q-1}$  puis

$$\Omega^q(G)(A) = (q+1) \times q!^2$$

4. Si  $mk$  est impair, alors  $\Psi = 0$  d'après IV.7.a.. On peut dans ce cas prendre  $\Phi = 0$ ,  $q = r = 0$ .

Si  $mk$  est pair, posons  $q = mk/2$ ,  $r = 0$  et  $\Phi = \frac{1}{(q+1)q!^2} \Psi$ . Alors, d'après IV.7.b.,

$$\Phi^A = \frac{1}{(q+1)q!^2} \det(A)^q \Psi$$

et, pour toute  $f \in \mathcal{B}_m$ ,

$$G_f(A) = \Phi^A(f) = \frac{1}{(q+1)q!^2} \det(A)^q \Psi(f)$$

Par 3., il vient

$$\Omega^q(G_f) = \Psi(f)$$

5. **Étape 1.** Montrons qu'il suffit d'établir l'énoncé sous l'hypothèse additionnelle qu'il existe  $s \in \mathbb{N}$  et  $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r} \in \llbracket 0, s \rrbracket^r$  tels que  $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m, \ell_i}$ ,  $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m, s - \ell_i}$  (et par conséquent  $\Psi \in \mathcal{E}_{m, s}$ ).

Posons en effet, dans le cas général :

$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{i,k}, \quad \Phi_{i,k} \in \mathcal{E}_{m,k} \quad \text{et} \quad \Psi_i = \sum_\ell \Psi_{i,\ell}, \quad \Psi_{i,\ell} \in \mathcal{J}_{m,k}.$$

On a

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left( \sum_k \Phi_{i,k} \right) \left( \sum_\ell \Psi_{i,\ell} \right) = \sum_s \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$$

Ainsi,  $\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$  est la partie homogène d'ordre  $s$  de  $\Psi$ . Celle-ci appartient  $\mathcal{J}_{m,s}$ . D'après

l'hypothèse, il existe  $\Pi_{i,k} \in \mathcal{J}_m$  tel que

$$\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell} = \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Pi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$$

et on en déduit

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left( \sum_k \Pi_{i,k} \right) \Psi_i$$

qui montre que  $\Pi_i = \sum_k \Pi_{i,k}$  convient.

**Étape 2.** Supposons maintenant l'existence de  $s \in \mathbb{N}$  et  $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r} \in \llbracket 0, s \rrbracket^r$  tels que  $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m, \ell_i}$  et  $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m, s - \ell_i}$ . On a  $\Psi \in \mathcal{J}_{m, s}$ . Si  $ms$  est impair, alors  $\Psi = 0$  et  $\Pi_i = 0$  conviennent. Supposons  $ms$  pair et posons  $q = \frac{ms}{2}$ . On a :

$$\Psi(f^A) = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A) \Psi_i(f^A)$$

donc, par **IV.7.b.**,

$$\Psi(f) \det(A)^q = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A) \det(A)^{m\ell_i/2} \Psi_i(f)$$

En appliquant  $\Omega^q$ , il vient :

$$(q+1)q!^2 \Psi(f) = \sum_{i=1}^r \Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})(A) \Psi_i(f)$$

Or,  $M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2}$  est homogène de degré  $m(s - \ell_i) + 2m\ell_i/2 = 2q$ . Donc  $\Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})$  est indépendante de  $M$  et, d'après **V.2.c.**,

$$\Pi_i : f \mapsto \frac{1}{(q+1)q!^2} \Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})$$

appartient à  $\mathcal{J}_m$ . On a en outre :

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \Pi_i \Psi_i$$

6. Soit  $I$  l'idéal de  $\mathcal{E}_m$  engendré par  $\bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{J}_{m,k}$ . Par **III.7.**,  $I$  admet une famille génératrice finie  $\Psi_1, \dots, \Psi_r$ . Soit  $\Psi \in \mathcal{J}_m$ . Il existe  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in \mathcal{E}_m$  tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Phi_i \Psi_i$$

La remarque faite en **III.5.** montre que l'on peut choisir  $\Phi_i$  vérifiant  $\text{Deg}(\Phi_i) < \text{Deg}(\Psi)$  (si  $\Psi \neq 0$ ). Il existe, d'après **5.**,  $\Pi_1, \dots, \Pi_r \in \mathcal{J}_m$  tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Pi_i \Psi_i$$

L'examen de la preuve de **5.** montre que  $\text{Deg}(\Pi_i) \leq \text{Deg}(\Phi_i)$  donc  $\text{Deg}(\Pi_i) < \text{Deg}(\Psi)$  (si  $\Psi \neq 0$ ). En appliquant ce même procédé aux polynômes  $\Pi_i$  on obtient, en un nombre fini d'étapes, une expression de  $\Psi$  de la forme  $f(\Psi_1, \dots, \Psi_r)$ .