

# Ecoles Normales Supérieures 2012

## Corrigé de l'épreuve C - filière MP

### Partie I

1. L'application  $P \mapsto P(\theta)$  est un morphisme d'anneau de  $\mathbb{Q}[X]$  dans  $\mathbb{C}$  : son noyau  $I_\theta$  est donc un idéal de  $\mathbb{Q}[X]$ . Comme  $\mathbb{Q}[X]$  est un anneau principal ( $\mathbb{Q}$  est un corps commutatif), cet idéal est principal et il existe un polynôme  $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$  tel que  $I_\theta = \Pi \mathbb{Q}[X]$ . Enfin,  $\theta$  étant algébrique sur  $\mathbb{Q}$ ,  $I_\theta$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  et  $\Pi$  est non nul : en notant  $\Pi_\theta$  le quotient de  $\Pi$  par son coefficient dominant, nous avons toujours  $I_\theta = \Pi_\theta \mathbb{Q}[X]$  avec  $\Pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$  unitaire. Les polynômes unitaires de  $\mathbb{Q}[X]$  annulant  $\theta$  sont donc les polynômes de la forme  $P \Pi_\theta$  avec  $P \in \mathbb{Q}[X]$  unitaire :  $\Pi_\theta$  est ainsi l'unique polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  de degré minimal annulant  $\theta$ .

2. Il suffit de suivre l'indication (sans faire de preuve par l'absurde) : soit  $p$  un nombre premier. Comme les  $a_k$  sont premiers dans leur ensemble, il existe un entier  $m$  minimal tel que  $p$  ne divise pas  $a_m$ . De même, il existe un entier  $q$  minimal tel que  $p$  ne divise pas  $b_q$ . Nous avons alors :

$$c_{m+q} = \left( \sum_{i=0}^{m-1} a_i b_{m+q-i} \right) + a_m b_q + \left( \sum_{j=0}^{q-1} a_{m+q-j} b_j \right)$$

- $p$  divise  $\sum_{i=0}^{m-1} a_i b_{m+q-i}$  car il divise chaque  $a_i$ ,
- de même,  $p$  divise  $\sum_{j=0}^{q-1} a_{m+q-j} b_j$  car il divise chaque  $b_j$ ,
- $p$  est premier et ne divise ni  $a_m$ , ni  $b_q$ , il ne divise donc pas  $a_p b_q$ ,

donc  $p$  ne divise pas  $c_{m+q}$ . Nous avons ainsi montré que les coefficients de  $PQ$  n'ont pas de diviseur premier commun : ils sont premiers dans leur ensemble et  $PQ$  est primitif.

3. Il existe  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire tel que  $P \in I_\theta$ . On peut alors écrire  $P = Q \Pi_\theta$  avec  $Q \in \mathbb{Q}[X]$ . Mais tout polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  s'écrit comme le produit d'un rationnel par un polynôme primitif. Nous pouvons donc écrire :

$$Q = \frac{a}{b} Q_1, \quad \Pi_\theta = \frac{c}{d} \Pi_1$$

avec  $Q_1, \Pi_1 \in \mathbb{Z}[X]$  primitifs,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$ . Cela donne :

$$bdP = abQ_1\Pi_1$$

Comme  $Q_1\Pi_1$  est primitif,  $ab$  est le p.g.c.d. des coefficients du polynôme entier  $abQ_1\Pi_1$ . D'autre part,  $P$  est également primitif (son coefficient dominant vaut 1), donc  $bd$  est le p.g.c.d. des coefficients de  $bdP$  : on en déduit que  $bd = ab$ , puis que  $P = Q_1\Pi_1$ . Comme ces trois polynômes sont à coefficients entiers et comme  $P$  est normalisé, ceci impose aux coefficients dominants de  $Q_1$  et  $\Pi_1$  d'être égaux à 1 ou  $-1$ . Nous obtenons donc  $\Pi_1 = \Pi_\theta$  ou  $\Pi_1 = -\Pi_\theta$  : dans les deux cas,  $\Pi_\theta \in \mathbb{Z}[X]$ .

4. Si  $\theta$  est un nombre de Pisot,  $\bar{\theta}$  est également racine de  $\Pi_\theta$  (car  $\Pi_\theta$  est un polynôme réel). Comme  $|\bar{\theta}| = |\theta| \geq 1$ , la propriété ii) prouve que  $\bar{\theta} = \theta$  : les nombres de Pisot sont donc tous réels.

5. Nous avons, en notant  $\rho = \max |\alpha_i|$  :

$$0 \leq \sin^2(\pi\theta^n) = \sin^2\left(\pi \sum_{i=0}^k \alpha_i^n\right) \leq \left(\pi \sum_{i=0}^k \alpha_i^n\right)^2 \leq \pi^2 \left(\sum_{i=0}^k |\alpha_i|^n\right)^2 = O(\rho^{2n})$$

Comme  $0 \leq \rho < 1$ , les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs permettent d'affirmer que la série de terme général  $\sin^2(\pi\theta^n)$  est convergente.

## Partie 2

1. Nous pouvons écrire  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n$  et  $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n$  avec  $p_n = 0$  et  $q_n = 0$  à partir d'un certain rang. Alors, par produit de Cauchy :

$$\forall z \in D(0, R), \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_k c_{n-k}\right) z^n.$$

Par unicité du développement en série entière, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \sum_{k=0}^n q_k c_{n-k}.$$

En particulier :

$$\forall n \geq \max(\deg(P) + 1, \deg(Q)), 0 = p_n = \sum_{k=0}^n q_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{\deg(Q)} q_k c_{n-k}.$$

En notant  $p = \deg(Q)$ ,  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p) = (q_p, \dots, q_1, q_0)$  et  $n_0 = \max(\deg(P) + 1, \deg(Q)) - \deg(Q)$ , nous avons donc :

$$\forall n \geq n_0, 0 = \sum_{k=0}^p \beta_k c_{n+k}.$$

2. Posons  $Q(X) = \beta_0 X^p + \beta_1 X^{p-1} + \dots + \beta_p$  :  $Q$  est un polynôme non nul car les  $\beta_i$  sont non tous nuls. Le produit de Cauchy de  $f(z)$  et de  $Q(z)$ , valable pour  $|z| < R$ , est de la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$  avec  $p_n$  nul à partir d'un certain rang : il existe donc  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $Q(z)f(z) = P(z)$  pour tout  $z \in D(0, R)$  :  $f$  coïncide donc, en tout point de  $D(0, R)$  où  $Q$  ne s'annule pas, avec la fraction rationnelle  $P/Q$ , ce qui est la définition donnée d'une fraction rationnelle.
3. Notons  $L_j^m$  la  $j$ -ème ligne du déterminant  $\Delta_m$  (on numérote les lignes à partir de l'indice 0). En reprenant les notations précédentes, dès que  $m \geq n_0 + p$ , nous avons  $\beta_0 L_{m-p}^m + \beta_1 L_{m-p+1}^m + \dots + \beta_p L_m^m = 0$ . Les  $\beta_i$  étant non tous nuls, les lignes de  $\Delta_m$  sont liées et  $\Delta_m = 0$ .
- 4.(a)  $\Delta_p$  est nulle, donc il existe une relation de liaison non triviale entre les lignes de  $\Delta_p$  :

$$\beta_0(c_0 \ c_1 \ \dots \ c_p) + \beta_1(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{p+1}) + \dots + \beta_p(c_p \ c_{p+1} \ \dots \ c_{2p}) = (0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Comme  $\Delta_{p-1}$  est non nul,  $\beta_p$  est non nul. Quitte à diviser par  $\beta_p$ , nous pouvons donc supposer que  $\beta_p = 1$  : nous obtenons exactement les  $p + 1$  relations demandées.

4.(b) Dans  $\Delta_{p+1}$ , ajoutons à ligne  $L_{p+1}^{p+1}$  la combinaison linéaire  $\beta_0 L_1^{p+1} + \beta_1 L_2^{p+1} + \dots + \beta_{p-1} L_p^{p+1}$ . Nous obtenons :

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & c_{2p} \\ c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{2p-1} & c_{2p} & c_{2p+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{vmatrix}$$

Ajoutons ensuite à l'avant dernière ligne la combinaison linéaire  $\beta_0 L_0^{p+1} + \beta_1 L_1^{p+1} + \dots + \beta_{p-1} L_{p-1}^{p+1}$  :

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & c_{2p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{2p+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à l'avant dernière ligne, puis par rapport à la dernière ligne, nous obtenons :

$$\Delta_{p+1} = (-1)^{p+2+p+1} C_{2p+1} \times (-1)^{p+1+p+1} C_{2p+1} \Delta_{p-1} = -\Delta_{p-1} (C_{2p+1})^2.$$

4.(c) Pour  $m > p$ , notons  $\mathcal{P}_m$  la propriété :  $\forall j \leq m - 1, C_{j+p} = 0$ .

- $\mathcal{P}_{p+1}$  est vérifiée d'après le a)
- soit  $m > p$  et supposons que  $\mathcal{P}_m$  est vérifiée. On calcule alors  $\Delta_m$  en multipliant la matrice associée à  $\Delta_m$  à gauche par la matrice de déterminant 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{p-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne, en remarquant que  $C_p = C_{p+1} = \dots = C_{m-1+p} = 0$  :

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} & c_p & \dots & c_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_p & c_{p+1} & \dots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ c_{p-1} & c_p & \dots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & \dots & c_{m+p-1} \\ C_p & C_{p+1} & \dots & C_{2p-1} & C_{2p} & \dots & C_{m+p} \\ C_{p+1} & C_{p+2} & \dots & C_{2p} & C_{2p+1} & \dots & C_{m+p+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_m & C_{m+1} & \dots & C_{m-1+p} & C_{m+p} & \dots & C_{2m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Nous avons ensuite  $\det(A) = \Delta_{p-1}$  et  $C$  est de taille  $N = m + 1 - p$  et de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha \\ & \ddots & \\ \alpha & & * \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha = C_{m+p}$ . Par développements successifs par rapport aux lignes, on obtient :

$$\det(C) = \alpha^N (-1)^{N+1} (-1)^N \dots (-1)^2 = \alpha^N (-1)^{(N+2)(N+1)/2-1} = \alpha^N (-1)^{N(N-1)/2}.$$

Il y a donc une petite erreur d'énoncé, puisque l'on obtient :

$$\Delta_m = (-1)^{(m+1-p)(m-p)/2} \Delta_{p-1} (C_{m+p})^{m+1-p}.$$

Comme  $\Delta_{p-1} \neq 0$  et  $\Delta_m = 0$ , on obtient tout de même  $C_{m+p} = 0$  et  $\mathcal{P}_{m+1}$  est vraie.

**4.(d)** En posant  $\beta_p = 1$ , nous obtenons une famille non nulle  $(\beta_0, \dots, \beta_p)$  telle que :

$$\forall n \geq 0, \beta_0 c_n + \beta_1 c_{n+1} + \dots + \beta_p c_{n+p} = 0$$

ce qui prouve que  $f$  est rationnelle d'après 2.

**Remarque :** nous avons aussi affiné le résultat de la question 1, puisque si  $f$  est une fraction rationnelle, il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  non tous nuls tels que la relation (0.1) soit vraie pour tout  $n \geq 0$ , et pas seulement à partir d'un certain rang  $n_0$ .

**5.(a)** Posons  $p_k = 0$  si  $k > m$  et  $q_k = 0$  si  $k > n$ . Par produit de Cauchy de  $f$  par  $Q$ , nous obtenons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \sum_{i=0}^k a_i q_{k-i} \in q_0 \mathbb{Z} + q_1 \mathbb{Z} + \dots + q_m \mathbb{Z}$$

Ceci prouve que l'idéal engendré par  $(q_0, q_1, \dots, q_n)$  est aussi l'idéal engendré par  $(q_0, q_1, \dots, q_n, p_0, p_1, \dots, p_m)$ , c'est à dire  $\mathbb{Z}$  : les  $q_k$  sont donc premiers dans leur ensemble.

**5.(b)** Comme  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux, le théorème de Bézout (dans l'anneau principal  $\mathbb{Q}[X]$ ) assure l'existence de  $U_1$  et  $V_1$  dans  $\mathbb{Q}[X]$  tels que  $U_1 P + V_1 Q = 1$ . En notant  $r$  le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients des polynômes  $U_1$  et  $V_1$ , nous avons :

$$r \in \mathbb{Z}^*, U = rU_1 \in \mathbb{Z}[X], V = rV_1 \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } Q(Uf + V) = r(U_1 P + V_1 Q) = r.$$

5.(c) Notons  $(Uf + V)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k$  et supposons (preuve par l'absurde) que  $r$  ne divise pas tous les  $d_k$ . En notant  $d$  le plus grand diviseur commun à  $r$  et aux  $d_k$ ,  $r' = r/d$  et  $d'_k = d_k/d$ , nous avons :

- $r', d'_k \in \mathbb{Z}$ ;
- $r'$  et les  $d'_k$  sont premiers dans leur ensemble;
- $r' = Q(z) \times \sum_{k=0}^{+\infty} d'_k z^k$ .

Comme  $|r'| \geq 2$ , il possède un diviseur premier  $p$ . Il existe alors  $l \geq 0$  tel que  $p$  divise  $d'_0, \dots, d'_{l-1}$  mais ne divise pas  $d'_l$ . D'autre part, les  $d'_k$  étant premiers entre eux dans leur ensemble, il existe également  $k \geq 0$  tel que  $p$  divise  $d'_0, \dots, d'_{k-1}$  mais ne divise pas  $d'_k$ . Par produit de Cauchy, nous avons alors :

$$\sum_{i=0}^{k+l} q_i d'_{k+l-i} = \begin{cases} r' & \text{si } k = l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans tous les cas,  $p$  divise  $\sum_{i=0}^{k+l} q_i d'_{k+l-i}$ , ce qui est absurde car  $p$  ne divise pas  $q_k d'_l$  mais divise tous les autres termes de cette somme.

5.(d) En particulier,  $q_0 \times \frac{d_0}{r} = 1$  avec  $q_0, \frac{d_0}{r} \in \mathbb{Z}$ , donc  $q_0 = \pm 1$ .

## Partie 3

1.(a)  $\sin^2(\lambda\pi\theta^n) = \sin^2(\pi\varepsilon_n)$ . Comme  $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$  est un terme général de série convergente, il tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. On en déduit que  $s_n = \sin(\pi\varepsilon_n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, ce qui impose à  $\varepsilon_n$  de tendre vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini (comme  $-\pi/2 \leq \varepsilon_n < \pi/2$ ,  $\pi\varepsilon_n = \text{Arcsins } s_n$ ). Nous avons alors :

$$\sin^2(\lambda\pi\theta^n) = \sin^2(\pi\varepsilon_n) \underset{+\infty}{\sim} \pi^2 \varepsilon_n^2$$

et  $\varepsilon_n^2$  est le terme général d'une série convergente, par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Pour  $n \geq 1$ ,  $\eta_n = \varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1}$  et :

$$0 \leq \eta_n^2 = \varepsilon_n^2 + \theta^2 \varepsilon_{n-1}^2 - 2\theta \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon_n^2 + \theta^2 \varepsilon_{n-1}^2 + \theta(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n-1}^2)$$

donc la série de terme général  $\eta_n^2$  est convergente puisque ce majorant est un terme général de série convergente.

1.(b) Posons  $A_n = (a_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}$  et notons  $P$  la matrice carrée de taille  $n+1$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\Delta_n = \det(A_n) = \det(A_n P) = \begin{vmatrix} a_0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ a_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} & \cdots & \eta_{2n} \end{vmatrix}$$

Le lemme d'Hadamard donne ensuite exactement l'inégalité demandée.

- 1.(c) Nous avons  $a_n = \lambda\theta^n + o(1)$  et  $\lambda\theta^n$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini, donc  $a_n \sim_{+\infty} \lambda\theta^n$ . Le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes donne :

$$\sum_{m=0}^n a_m^2 \underset{+\infty}{\sim} \sum_{m=0}^n \lambda^2 \theta^{2m} \underset{+\infty}{=} O(\theta^{2n}).$$

Il existe ainsi une constante positive  $C$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{m=0}^n a_m^2 \leq C \theta^{2n}.$$

En notant  $R_k = \sum_{m=k}^{+\infty} \eta_m^2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \Delta_n^2 \leq C \theta^{2n} R_1 R_2 \dots R_n = C \prod_{m=1}^n \theta^2 R_m$$

Comme  $\theta^2 R_m$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini, ce produit tend grossièrement vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et  $\Delta_n$  converge vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

2. L'équivalent de  $a_n$  obtenu à la question précédente prouve que le rayon de convergence de la série entière associée est égal à  $1/\theta$  : il est donc non nul. D'autre part,  $(\Delta_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'entiers qui converge vers 0 : il existe donc un rang  $n_0$  tel que  $\Delta_n = 0$  pour  $n \geq n_0$ . La question 4 de la partie 2 prouve donc que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est une fraction rationnelle. Comme cette série est à coefficients entiers, on obtient le résultat demandé en appliquant la question 5 de la partie 2.
3. Comme  $\varepsilon_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, le rayon de convergence  $R$  de  $f$  est au moins égal à 1. Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \theta^{-1}$ , on a également  $|z| < R$  et (en remarquant que les séries introduites sont toutes convergentes) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\theta^n - a_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (\theta z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

4. Les fonctions  $z \mapsto f(z)(1 - \theta z)Q(z)$  et  $z \mapsto \lambda Q(z) + (1 - \theta z)P(z)$  sont développables en série entière sur  $D(0, 1)$  et coïncident au voisinage de 0 : elles sont donc égales sur tout le disque ouvert  $D(0, 1)$ .

En particulier, avec  $z = \theta^{-1}$ , nous obtenons  $0 = \lambda Q(\theta^{-1})$  donc  $\theta^{-1}$  est un zéro de  $Q$  de module strictement inférieur à 1.

Réciproquement, si  $z_0$  est un zéro de  $Q$  tel que  $|z_0| < 1$ , nous avons  $0 = (1 - \theta z_0)P(z_0)$ . Comme  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux,  $X - z_0$  ne divise pas  $P$  : on en déduit que  $P(z_0) \neq 0$ , puis que  $z_0 = \theta^{-1}$ .

5. Une première méthode utilise le lemme d'Abel : si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est une série convergente, la série entière de terme général  $u_n z^n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0, 1]$ . En particulier, sa somme est continue sur  $[0, 1]$  et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \rho^n \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

En effet, pour  $z \in D(0, 1)$ , posons  $\rho = |z|$ . Nous avons :

$$|(1 - |z|)f(z)| \leq (1 - \rho) \sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n| \rho^n = |\varepsilon_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} (|\varepsilon_n| - |\varepsilon_{n-1}|) \rho^n.$$

En posant  $u_0 = |\varepsilon_0|$  et  $u_n = |\varepsilon_n| - |\varepsilon_{n-1}|$  pour  $n \geq 1$ , le lemme s'applique car  $\sum_{k=0}^n u_k = |\varepsilon_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $(1 - |z|)f(z)$  tend vers 0 quand  $|z|$  tend vers  $1^-$ .

Une seconde preuve beaucoup plus rapide m'a été soufflée par Denis Favennec : l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$0 \leq (1 - |z|)|f(z)| \leq (1 - |z|) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^2 \right)^{1/2} \left( \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \right)^{1/2} \xrightarrow{|z| \rightarrow 1^-} 0.$$

Supposons que  $Q$  possède un zéro  $z_0$  de module 1. Pour tout  $\rho \in ]\theta^{-1}, 1[$ , nous avons :

$$(1 - \rho)f(\rho z_0)Q(\rho z_0) = \frac{\lambda(1 - \rho)Q(\rho z_0)}{1 - \theta \rho z_0} - P(\rho z_0)$$

ce qui donne

$$0 = -P(z_0)$$

en faisant tendre  $\rho$  vers 1 : c'est absurde car  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéro commun.

6. Posons  $Q = 1 + q_1 X + \dots + q_p X^p$  avec  $q_p \neq 0$  et  $\Pi = X^p + q_1 X^{p-1} + \dots + q_p$ . Nous avons :

- $\Pi$  est un polynôme unitaire de  $\mathbb{Z}[X]$  ;
- pour tout  $z$  complexe non nul,  $\Pi(z) = z^p P(z^{-1})$ , donc  $\theta$  est le seul zéro de  $\Pi$  n'appartenant pas à  $D(0, 1)$ .

On en déduit que  $\theta$  est un entier algébrique et que  $\Pi_\theta$ , qui divise  $\Pi$ , a également  $\theta$  pour seul zéro n'appartenant pas à  $D(0, 1)$  :  $\theta$  est un nombre de Pisot.

## Partie 4

1. Soit  $u > 0$ . Comme  $u \theta^{-k}$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini,  $\cos(u \theta^{-k})$  est strictement positif à partir d'un certain rang  $k_0$ . Pour  $k \geq k_0$  :

$$\ln(\cos(u \theta^{-k})) = \ln \left( 1 - \frac{u^2}{2\theta^{2k}} + o(\theta^{-2k}) \right) \underset{+\infty}{=} O(\theta^{-2k}).$$

Comme  $\theta^{-2k}$  est positif et est le terme général d'une série convergente, la série de terme général  $\ln(\cos(u\theta^{-k}))$  est absolument convergente. On en déduit que  $\prod_{k=n_0}^n \cos(u\theta^{-k})$  a une limite quand  $n$  tend vers l'infini :  $\Gamma$  est donc définie sur  $]0, +\infty[$ .

**2.** Soit  $u > 0$ . On montre facilement par récurrence les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\sin(2u)}{u} = \frac{\sin \frac{u}{2^n}}{\frac{u}{2^n}} \prod_{k=0}^n \cos \frac{u}{2^k}$$

Comme  $\frac{\sin v}{v}$  tend vers 1 quand  $v$  tend vers 0, on obtient l'égalité demandée en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

**3.(a)** Comme  $\Gamma(u)$  ne tend pas vers 0 quand  $u$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall A > 0, \exists u \geq A, |\Gamma(u)| \geq \delta.$$

Remarquons que chaque  $u \geq \pi$  s'écrit d'une unique façon sous la forme  $u = \pi\lambda\theta^m$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $\lambda \in [1, \theta[$ . Ces uniques  $\lambda$  et  $m$  seront notés  $\lambda(u)$  et  $m(u)$ .

Commençons par construire par récurrence des suites  $(m'_s)$ ,  $(\lambda'_n)$  et  $(u'_s)$  vérifiant toutes les conditions demandées exceptée la convergence de la suite  $\lambda$ .

- choisissons  $u'_0 \geq \pi$  tel que  $|\Gamma(u'_0)| \geq \delta$  et posons  $\lambda'_0 = \lambda(u'_0)$  et  $m'_0 = m(u'_0)$  ;
- soit  $k \geq 0$  et supposons construites  $(m'_0, \dots, m'_k)$  suite strictement croissante d'entiers et  $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_k)$  suite d'éléments de  $[1, \theta[$  telles que :

$$\forall s \in \llbracket 0, k \rrbracket, \left| \Gamma(\pi\lambda'_s\theta^{m'_s}) \right| \geq \delta.$$

Il existe alors  $u'_{k+1} \geq \pi\theta^{m'_k+1}$  tel que  $|\Gamma(u'_{k+1})| \geq \delta$ . En posant  $m'_{k+1} = m(u'_{k+1})$  et  $\lambda'_{k+1} = \lambda(u'_{k+1})$ , nous avons bien  $m'_{k+1} \in \mathbb{Z}$ ,  $m'_{k+1} > m'_k$ ,  $\lambda'_{k+1} \in [0, \theta[$  et  $\left| \Gamma(\pi\lambda'_{k+1}\theta^{m'_{k+1}}) \right| \geq \delta$ .

La suite  $(\lambda'_k)_{k \geq 0}$  est une suite réelle bornée, il existe donc  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante et  $\lambda \in [1, \theta]$  tels que  $\lambda'_{\varphi(k)}$  converge vers  $\lambda$  quand  $k$  tend vers l'infini : les suites  $(\lambda'_{\varphi(s)})_{s \geq 0}$  et  $(m'_{\varphi(s)})_{s \geq 0}$  vérifient les conditions demandées.

**3.(b)** Pour  $n \geq m_s$ , nous avons :

$$\left| \prod_{k=0}^n \cos(u\theta^{-k}) \right| = \prod_{k=0}^n \underbrace{|\cos(u\theta^{-k})|}_{\leq 1} \leq \prod_{k=0}^{m_s} |\cos(u\theta^{-k})| = |\cos(\pi\lambda_s) \cos(\pi\lambda_s\theta) \dots \cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|$$

d'où l'inégalité demandée en faisant tendre  $n$  vers l'infini.

Nous en déduisons, en utilisant l'inégalité de convexité  $1 - v \leq -\ln v$ , valable pour tout  $v \in ]0, 1]$ , et les inégalités obtenues précédemment :

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) = \sum_{q=0}^{m_s} (1 - \cos^2(\pi\lambda_s\theta^q)) \leq -\sum_{q=0}^{m_s} \ln(\cos^2(\pi\lambda_s\theta^q)) \leq -2 \ln |\Gamma(u_s)| \leq \ln(1/\delta^2)$$

**3.(c)** Soit  $m \geq 0$ . Comme  $m_s$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $s_0$  tel que  $m_s \geq m$  pour  $s \geq s_0$ . On en déduit :

$$\forall s \geq 0, \sum_{q=0}^m \sin^2(\pi \lambda_s \theta^q) \leq \sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi \lambda_s \theta^q)$$

et donc

$$\forall s \geq 0, \sum_{q=0}^m \sin^2(\pi \lambda_s \theta^q) \leq \ln(1/\delta^2)$$

En faisant tendre  $s$  vers l'infini, nous obtenons :

$$\sum_{q=0}^m \sin^2(\pi \lambda \theta^q) \leq \ln(1/\delta^2)$$

Cette inégalité étant valable pour tout  $m$ , nous avons prouvé la convergence de la série de terme général positif  $\sin^2(\pi \lambda \theta^n)$ , ce qui assure que  $\theta$  est un nombre de Pisot, car  $\lambda \geq 1 > 0$ .

**4.(a)** Supposons qu'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $2\theta^m = 2k + 1$ . Le polynôme  $2X^m - (2k + 1)$  est alors à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  et admet  $\theta$  pour racine : il existe donc  $Q \in \mathbb{Q}[X]$  tel que

$$2X^m - (2k + 1) = \Pi_\theta Q$$

Le polynôme  $2X^m - (2k + 1)$  ayant  $m$  racines simples de même module et  $\theta$  étant la seule racine de  $\Pi_\theta$  de module  $|\theta|$ ,  $\Pi_\theta$  admet  $\theta$  pour unique racine, et cette racine est simple, ce qui impose  $\Pi_\theta = X - \theta$  et  $\theta \in \mathbb{Z}$  : c'est absurde car  $2\theta^m$  est pair et  $2k + 1$  est impair.

Supposons qu'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $2\theta^{-m} = 2k + 1$ . On reprend la même démonstration avec le polynôme  $2 - (2k + 1)X^m$  :  $\theta \in \mathbb{N}$ , puis  $2 = (2k + 1)\theta^m$ , ce qui impose l'absurdité  $\theta = 2$ .

**4.(b)** Le (a) montre que  $\cos^2(\pi\theta^{-m})$  ne s'annule jamais. Nous pouvons donc écrire :

$$\ln(\cos^2(\pi\theta^{-m})) = 2 \ln \left| 1 - \frac{1}{2} \pi^2 \theta^{-2m} + o(\theta^{-2m}) \right| \underset{+\infty}{\sim} -\pi^2 \theta^{-2m}$$

Comme  $-\pi^2 \theta^{-2m}$  est de signe constant et est le terme général d'une série convergente, la série de terme général  $\ln(\cos^2(\pi\theta^{-m}))$  converge, ce qui donne exactement le résultat demandé.

**4.(c)** Nous avons cette fois :

$$\ln(\cos^2(\pi\theta^m)) = \ln(1 - \sin^2(\pi\theta^m)) \underset{+\infty}{\sim} -\sin^2(\pi\theta^m)$$

et on conclut de la même façon,  $-\sin^2(\pi\theta^m)$  étant le terme général d'une série convergente.

**4.(d)** Nous avons, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$|\Gamma(\pi\theta^m)|^2 = \prod_{k=0}^{+\infty} \cos^2(\pi\theta^{m-k}) = A \times 1 \times \prod_{k=1}^m \cos^2(\pi\theta^k) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} AB > 0$$

Comme  $\pi\theta^m$  tend vers  $+\infty$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , ceci assure que  $\Gamma(u)$  ne tend pas vers 0 quand  $u$  tend vers  $+\infty$ .