École polytechnique

Mathématiques B-(X)

Un corrigé proposé par : AQALMOUN Mohamed agrégé de mathématiques CPGE Khouribga

Première partie : convergence au sens de Césaro

1. Soit $(a_n)_n$ une suite convergente , notons par l sa limite.
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on a $|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
   Par l'inégalité triangulaire
   $|m_n - l| = \frac{1}{n+1}|(a_0 - l) + ... + (a_n - l)| \leq \frac{|a_0-l|+...+|a_N-l|}{n+1} + \frac{|a_{N+1}-l|+...+|a_n-l|}{n+1} \leq \frac{|a_0-l|+...+|a_N-l|}{n+1} + \frac{n+1-N}{n+1}\frac{\varepsilon}{2}$
   Quand $n \to +\infty$, $\frac{|a_0-l|+...+|a_N-l|}{n+1} \to 0$ ($|a_0 - l| + ... + |a_N - l|$ est constant par rapport à n), il existe alors $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $\frac{|a_0-l|+...+|a_N-l|}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$
   Donc $\forall n \geq N'' = \max(N, N')$,
   $|m_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+1-N}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
   La suite $(m_n)_n$ est convergente de limite l, d'où $(a_n)_n$ est C-convergente.
   Un exemple : La suite $((-1)^n)_n$ n'est pas convergente, $m_{2n} = 0$ et $m_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$, alors $(m_n)_n$ est convergente de limite nulle , la suite $(a_n)_n$ est alors C-convergente.
2. Soit $(a_n)_n$ une suite C-convergente,
   on a $(n + 1)m_n - nm_{n-1} = a_n$, donc $\frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{n}m_n - m_{n-1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0$
3. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $a_n = (-1)^n n^\alpha$, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
   On a $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$
   D'une part $v_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (2n)^\alpha - (2n - 1)^\alpha$ et d'après le Théorème des Accroissements finis, il existe $c_n \in]2n - 1, 2n[$ tel que $(2n)^\alpha - (2n - 1)^\alpha = \alpha c_n^{\alpha-1}$, on a $1 - \frac{1}{2n} < \frac{c_n}{2n} < 1$ donc $c_n \sim 2n$ aussi $c_n^{\alpha-1} \sim 2^{\alpha-1}n^{\alpha-1}$, d'où l'équivalence $v_n \sim \alpha 2^{\alpha-1}n^{\alpha-1}$
   $\sum n^{\alpha-1}$ est une série à termes positifs divergente ($0 < 1 - \alpha < 1$) donc
   $\alpha 2^{\alpha-1} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \sum\limits_{k=1}^{n} v_k = S_{2n}$
   D'autre part $\frac{1}{n^\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{\alpha-1} \to \int_0^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha}$, donc $S_{2n} \sim 2^{\alpha-1}n^\alpha$
   $m_{2n} = \frac{S_{2n}}{2n+1} \sim 2^{\alpha-1}\frac{n^\alpha}{2n+1} \sim 2^{\alpha-2}\frac{1}{n^{1-\alpha}} \to 0$
   $m_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}m_{2n} + \frac{a_{2n+1}}{2n+2} \to 0$
   Donc la suite $(a_n)_n$ est C-convergente.
4. La série $\sum c_n z_0^n$ est C-convergente , donc la suite $(S_n(z_0))_n$ est C-convergente , d'après la question 2.) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n(z_0)}{n+1} = 0$, donc la suite $(c_n)_n$ est C-convergente, encore d'après la question 2.) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n z_0^n}{n} = 0$, en particulier la suite $(\frac{c_n z_0^n}{n})_n$ est bornée, et puisque les deux séries $\sum c_n z^n$ et $\sum \frac{c_n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence , alors $|z_0| \leq R$
5. (a) Le rayon de convergence est égal à 1, soit z tel que $|z| = 1$
   - Cas $z = 1$: $S_n(1) = n + 1$ et $\sigma_n(1) = 1 + \frac{n}{2}$,donc $1 \notin F$
   - Cas $z \neq 1$: $S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1}{z-1}$ et $\sigma_n(z) = \frac{z(z^n-1)}{(n+1)(z-1)^2} - \frac{1}{z-1}$, puisque la suite $(z^n - 1)_n$ est bornée alors $z \in F$ et $\sigma(z) = \frac{1}{1-z}$. $F = \mathbb{U} \setminus \{1\}$

(b) Le rayon de convergence est égal à 1, soit z tel que $|z|=1$
- Si $z=1$, $\frac{S_{2n}}{2n}=\frac{2\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha}{2n}\to\frac{2\alpha+\beta}{2}\neq 0$, donc la série $\sum c_n$ n'est pas C-convergente et $1\notin F$
- Si $z=1$, $\frac{S_{2n}}{2n}=-\beta(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})-\frac{\alpha}{2n}\to-\frac{\beta}{2}\neq 0$, donc $-1\notin F$
- Si $z\neq\pm1$, $S_{2n}(z)=z^{2n}\frac{(\alpha+\beta+\alpha z)z}{z^2-1}-\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$ et $s_{2n+1}(z)=z^{2n}\frac{(\alpha+(\alpha+\beta)z)z^2}{z^2-1}-\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$

$\sigma_{2n}(z)=-\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}+\frac{z^{2n+2}-1}{2n+1}\frac{(\alpha+\beta+\alpha z)z}{(z^2-1)^2}+\frac{z^{2n}-1}{2n+1}\frac{(\alpha+(\alpha+\beta)z)z^2}{(z^2-1)^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_{2n}(z)=-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_{2n+1}}{2n+2}=0$ et $\sigma_{2n+1}(z)=\frac{2n+1}{2n+2}\sigma_{2n}(z)+\frac{S_{2n+1}}{2n+2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_{2n+1}(z)=-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n(z)=-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$, ainsi $F=\mathbb{U}\setminus\{-1,1\}$ et pout tout $z\in F$ $\sigma(z)=-\frac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{z^2-1}$

(c) $\sum c_nz^n=\sum z^n+\alpha\sum e^{in\lambda}z^n$, le rayon de convergence de chacune des deux séries $\sum z^n$ et $\sum e^{in\lambda}$ est égal à 1 , donc $R\geq 1$ .D'autre part si $|z|>1$, alors $|c_nz^n|=|z|^n(|1+\alpha e^{in\lambda}|)$ ne tend pas vers 0, en effet si $\lim\limits_{n\to+\infty}|c_nz^n|=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\alpha e^{in\lambda}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha e^{in\lambda}=-1$ on obtient $\alpha=1$ mais $\alpha\in]0,1[$ absurd, donc $R=1$

Soit z tel que $|z|=1$,et on suppose que $\lambda\neq 0 \mod 2\pi$ (pour le cas $\lambda=0 \mod 2\pi$ voir le premier exemple)
- Si $z=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n+1}=1$, donc $1\notin F$
- Si $z=e^{i\lambda}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n+1}=\alpha\neq 0$, donc $e^{i\lambda}\notin F$
- Si $z\neq 1$ et $z\neq e^{i\lambda}$, $\sigma_n(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}+\frac{z^{n+1}-1}{n+1}\frac{z}{(1-z)^2}+\frac{(ze^{i\lambda})^{n+1}-1}{n+1}\frac{\alpha ze^{i\lambda}}{(1-ze^{i\lambda})^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n(z)=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$

Donc $F=\mathbb{U}\setminus\{1,e^{i\lambda}\}$ et $\forall z\in F$, $\sigma(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$

Deuxième partie :Un théorème de Kronecker

6. (a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$
- Cas $\lambda=0$: $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}dt=1\to 1$
- Cas $\lambda\neq 0$: $|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}dt|=|\frac{1}{2i\lambda x}(e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x})|\leq\frac{1}{|\lambda x|}\to 0$

Par linéarité de l'integral , la limite existe pour tout $f\in\mathcal{E}$

Pour $f\in\mathcal{E}$ et x au voisinage de $+\infty$, par l'inégalité triangulaire on a $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)dt|\leq\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(t)|dt\leq\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}||f||_\infty dt=||f||_\infty$ en passant à la limite,on obtient $M(f)\leq||f||_\infty$,donc la forme linéaire est continue sur $\mathcal{E}$.

(b) Il s'agit de démontrer que cette famille est libre (elle génératrice),Soient $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$, et $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ie_{\lambda_i}=0$, soit $j\in\{1,...,n\}$ en multipliant par $e_{-\lambda_j}$ et en appliquant M , on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_iM(e_{\lambda_i-\lambda_j})=\alpha_jM(e_0)=0$ donc $\alpha_j=0$

Soit $f\in\mathcal{E}$ ils existent $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$, et $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $f=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ie_{\lambda_i}$,donc $M(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_iM(e_{\lambda_i})$, alors :

$M(f)=0$ si les λ_i sont tous nuls , c'est le cas où la coordonnée de f suivant e_0 est nulle

$M(f)=\alpha_j$ Si $\lambda_j=0$ et on a aussi α_j est la coordonnée de f suivant e_0

(c) C'est une conséquence du fait que $e_\lambda e_{\lambda'}=e_{\lambda+\lambda'}\in\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel.

Si g est à valeurs positives, pour x au voisinage de $+\infty$ on a :
$|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)g(t)dt|\leq\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(t)|g(t)dt\leq\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}||f||_\infty g(t)dt\leq||f||_\infty\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}g(t)dt$, en passant à la limite on obtient $M(fg)\leq||f||_\infty M(g)$

7. (a) On a :

$$\begin{aligned}K_N(t) &= 1+\sum_{j=-N}^{-1}(1-\frac{|j|}{N+1})e_j(t)+\sum_{j=1}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e_j(t)\\ &= 1+\sum_{j=1}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e_{-j}(t)+\sum_{j=1}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e_j(t)\\ &= 1+\sum_{j=1}^{N}(1-\frac{j}{N+1})(e_j(t)+e_{-j}(t))\\ &= 1+\sum_{j=1}^{N}(1-\frac{j}{N+1})2\cos(jt)\end{aligned}$$

donc $K_N(t)=1+\sum_{j=1}^{N}\frac{2j}{N+1}\cos((N+1-j)t)$ Changement d'indice $j\leftarrow N+1-j$

(b) Soit $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}e^{i(\frac{N}{2}-k)t} &= e^{i\frac{N}{2}t}\sum_{k=0}^{N}e^{-ikt}=e^{i\frac{N}{2}t}\sum_{k=0}^{N}(e^{-it})^k\\ &= e^{i\frac{N}{2}t}\frac{1-e^{-i(N+1)t}}{1-e^{-it}}=e^{i\frac{N}{2}t}\frac{-2ie^{-i\frac{N+1}{2}t}\sin(\frac{N+1}{2}t)}{-2ie^{-i\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}}\\ &= \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

par le changement d'indice $k\leftarrow N-k$ on a $\sum_{k=0}^{N}e^{i(\frac{N}{2}-k)t}=\sum_{k=0}^{N}e^{i(k-\frac{N}{2})t}$ donc,

$$\begin{aligned}(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}})^2 &= (\sum_{k=0}^{N}e^{i(\frac{N}{2}-k)t})(\sum_{j=0}^{N}e^{i(j-\frac{N}{2})t})\\ &= \sum_{0\le k,j\le N}^{N}e^{i(j-k)t}\\ &= \sum_{0\le k<j\le N}^{N}e^{i(j-k)t}+\sum_{0\le k>j\le N}^{N}e^{i(j-k)t}+\sum_{0\le k=j\le N}^{N}e^{i(j-k)t}\\ &= \sum_{0\le k<j\le N}^{N}e^{i(j-k)t}+\sum_{0\le k<j\le N}^{N}e^{i(k-j)t}+N+1\\ &= \sum_{0\le k<j\le N}^{N}(e^{i(j-k)t}+e^{i(k-j)t})+N+1\\ &= \sum_{0\le k<j\le N}^{N}2\cos((j-k)t)+N+1\\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{j-1}2\cos((j-k)t)+N+1\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}2\cos(kt)+N+1 \quad \text{changement d'indice } k\leftarrow j-k$$

On pose $a_k=2\cos(kt)$ on a
$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}2\cos(kt)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}a_k=a_1+(a_1+a_2)+...+(a_1+...+a_N)=Na_1+(N-1)a_2+...+a_N=$
$\sum_{k=1}^{N}(N+1-k)a_k=\sum_{j=1}^{N}ja_{N+1-j}=\sum_{j=1}^{N}2j\cos((N+1-j)t)$
donc $\frac{1}{N+1}(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}})^2=K_N(t)$

8. (a) on a $K_N(\lambda_p x+\alpha_p)=\sum_{j=-N}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e_j(\lambda_p x+\alpha_p)=\sum_{j=-N}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e^{ij\alpha_p}e^{ij\lambda_p x}$ donc

$$g_N(x)=\prod_{p=1}^{n+1}K_N(\lambda_p x+\alpha_p)=(\sum_{j_1=-N}^{N}(1-\frac{|j_1|}{N+1})e^{ij_1\alpha_1}e^{ij_1\lambda_1 x})...(\sum_{j_{n+1}=-N}^{N}(1-\frac{|j_{n+1}|}{N+1})e^{ij_{n+1}\alpha_{n+1}}e^{ij_{n+1}\lambda_{n+1}x})$$

$$=\sum_{-N\leq j_1,...,j_{n+1}\leq N}\prod_{k=1}^{n+1}((1-\frac{|j_k|}{N+1})e^{ij_k\alpha_k}e^{ij_k\lambda_k x})$$

$$=\sum_{-N\leq j_1,...,j_{n+1}\leq N}(\prod_{k=1}^{n+1}(1-\frac{|j_k|}{N+1}))e^{i(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\alpha_k)}e^{i(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\lambda_k)x}$$

$$=\sum_{-N\leq j_1,...,j_{n+1}\leq N}(\prod_{k=1}^{n+1}(1-\frac{|j_k|}{N+1}))e^{i(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\alpha_k)}e_{(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\lambda_k)}(x)$$

$M(g_N)$ est la coordonnée de g_N suivant e_0 et on a, $\sum_{k=1}^{n+1}j_k\lambda_k=0$ si, et seulement si, tous les j_k sont nuls (ceci est grace à la $\mathbb{Q}$-liberté de la famille $(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})$) , donc le coefficient de e_0 est $(\prod_{k=1}^{n+1}(1-\frac{|j_k|}{N+1}))e^{i(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\alpha_k)}=1$ (tous les j_k sont nuls),d'où $M(g_N)=1$

(b) Pour $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)g_N(x)=r_0g_N(x)+\sum_{j=1}^{n+1}a_je_{\lambda_j}(x)g_N(x)$, donc par linéarité de M on a

$M(fg_N)=r_0+\sum_{j=1}^{n+1}a_jM(e_{\lambda_j}g_N)$, il reste à calculer $M(e_{\lambda_j}g_N)$

$e_{\lambda_j}g_N$ est combinaison linéaire des fonctions e_λ avec λ de la forme $\lambda=\lambda_j+k_1\lambda_1+...+k_{n+1}\lambda_{n+1}\quad k_i\in\{-N,...,N\}$, et $\lambda=0$ si, et seulement si, $k_j=-1$ et $k_i=0$ pour $i\neq j$ donc le coefficient de e_0 est $(\prod_{k=1}^{n+1}(1-\frac{|j_k|}{N+1}))e^{i(\sum_{k=1}^{n+1}j_k\alpha_k)}=(1-\frac{1}{N+1})e^{-i\alpha_j}=\frac{N}{N+1}e^{-i\alpha_j}$, on obtient alors

$M(fg_N)=r_0+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{N}{N+1}a_je^{-i\alpha_j}=r_0+\frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_j$

(c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $|f(x)|\leq|r_0|+\sum_{j=1}^{n+1}|a_je^{i\lambda_j x}|=\sum_{j=0}^{n+1}r_j$, donc $||f||_\infty\leq\sum_{j=0}^{n+1}|a_j|$

g_N est un élément de $\mathcal{E}$ à valeurs positives , d'après la question 6.c on a $M(fg_N)\leq||f||_\infty M(g_N)$ donc $r_0+\frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_j\leq||f||_\infty$, en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ on obtient $\sum_{j=0}^{n+1}r_j\leq||f||_\infty$

9. Supposons qu'ils existent k_0 et j_0 tels que $k_0\neq j_0$ et $|u_{k_0}+u_{j_0}|<2-\varepsilon$
$|\sum_{j=1}^{m}u_j|\leq|u_{k_0}+u_{j_0}|+|\sum_{\substack{1\leq j\leq m\\ u_{j_0}\neq i\neq u_{k_0}}}u_j|<2-\varepsilon+m-2=m-\varepsilon$ contradiction.

$|u_k+u_j|^2+|u_k-u_j|^2=(u_k+u_j)(\overline{u}_k+\overline{u}_j)+(u_k-u_j)(\overline{u}_k-\overline{u}_j)=4$, donc
$|u_k-u_j|^2=4-|u_k+u_j|^2\leq 4-(2-\varepsilon)^2=4\varepsilon-\varepsilon^2\leq 4\varepsilon$, donc $|u_k-u_j|\leq 2\sqrt{\varepsilon}$

10. (a) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=||f||_\infty=\sum\limits_{j=0}^{n+1}r_j=n+2$, d'après la caractérisation de la borne supérieure , $\forall m\in\mathbb{N}$, il existe $x_m\in\mathbb{R}$ tel que $n+2-\frac{1}{m+1}\leq|f(x_m)|\leq n+2$ et on a alors $\lim\limits_{m\to+\infty}|f(x_m)|=n+2$

    (b) Soit $\varepsilon>0$.
    Il existe $m_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall m\geq m_0$, $|f(x_m)|\geq n+2-\frac{\varepsilon^2}{4}$, comme $f(x_m)$ est somme de $n+2$ complexes de module 1 (remarquant que le premier terme est égal à 1) , alors d'après la question 9. $\forall m\geq m_0$, pour tout $j\in\{1,...,n\}$, $|e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_j x_m}-1|\leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}}=\varepsilon$ et $|e^{i2\pi x_m}-1|\leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}}=\varepsilon$, donc pour tout $j\in\{1,...,n\}$, $\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_j x_m}=1$ et $\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i2\pi x_m}=1$, d'où le résultat.

    (c) La suite $(y_m)_m$ étant bornée , il suffit de montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de $(y_m)_m$.
    soit l une valeur d'adhérence de la suite $(y_m)_m$, il existe $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tel que $l=\lim\limits_{m\to+\infty}y_{\phi(m)}$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i2\pi x_m}=\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i2\pi(N_m+y_m)}\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i2\pi y_m}=e^{i2\pi l}$,donc $e^{i2\pi l}=1$, et puisque la suite $(y_m)_m$ est à valeurs dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ alors $l\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, donc $2i\pi l\in[-\pi,\pi]$ d'où $l=0$
    Pour tout $j\in\{1,...,n\}$ on a $\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N_m}=\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j x_m}e^{i\lambda_j y_m}=e^{-i\alpha_j}$

11. (a) Supposons l'existence d'un intervalle fermé borné I et $a\in I$ tel que $|f(a)|=n+2$.
    fixons un $\varepsilon>0$, on a $|f(a)|\geq n+2-\varepsilon$, et comme $f(a)$ est somme de $n+2$ complexes de module 1 , par la question 9. $\forall j\in\{1,...,n\}$ $|-e^{i\lambda_j a}-1|\leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et $|e^{i2\pi a}-1|\leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et ceci pour tout $\varepsilon>0$, donc $\forall j\in\{1,...,n\}$, $e^{i\lambda_j a}+1=0$ et $e^{i2\pi a}-1=0$
    D'une part $e^{i2\pi a}=1$ donne $a\in\mathbb{Z}$.
    D'autre part $\forall j\in\{1,...,n\}$ $e^{i\lambda_j a}=-1$, donc pour tout $j\in\{1,...,n\}$ il existe $p_j\in\mathbb{Z}$ tel que $a\lambda_j=(2p_j+1)\pi$ puisque la famille (λ_j,π) est $\mathbb{Q}$-libre et $a,p_j\in\mathbb{Z}$ alors $2p_j+1=a=0$ donc $|f(a)|=|f(0)|=n-2$ contradiction.

    (b) Soit $(x_m)_m$ comme à la question 10.a.
    D'abord montrons que cette suite n'est pas bornée. Par l'absurd supposons que elle est bornée , d'après le théorème de bolzano-Weierstrass, $(x_m)_m$ possède une suite extraite convergente, soit $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tel que la suite $(x_{\phi(m)})_m$ converge de limite l, puisque f est continue en l alors $|f(l)|=\lim\limits_{m\to+\infty}|f(x_{\phi(m)}|=n+2$, considérons l'intervalle fermé borné $I=[l-1,l+1]$ on a $l\in I$ et $|f(l)|=n+2$ contradiction (avec 11.a.)
    Maintenant la suite $(x_m)_m$ n'est pas bornée, donc au moins n'est pas majorée ou n'est pas minorée.
    Traitons le cas où la suite n'est pas majorée
    Il existe $m_0\in\mathbb{N}$ tel que $0\leq y_{m_0}$ et posons $\psi(0)=m_0$, supposons qu'on a construis $\psi(0)<...<\psi(m)$ avec $0\leq\forall k\leq m$, $k\leq x_{\psi(k)}$, la suite $(x_k)_{k\geq\psi(m)+1}$ n'est pas bornée ,donc il existe $k_0>\psi(m)$ tel que $m+1\leq x_{k_0}$ on pose $\psi(m+1)=k_0$ on a $\psi(0)<...<\psi(m)<\psi(m+1)$ et $0\leq\forall k\leq m+1$, $k\leq x_{\psi(k)}$, on a construis alors une suite extraite $(x_{\psi(m)})_m$ de la suite $(x_m)_m$ tel que $\forall m$, $m\leq x_{\psi(m)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{\psi(m)}=+\infty$, et on a de plus , pour tout $j\in\{1,...,n\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{i\lambda_j x_{\psi(m)}}=-1$.
    Posons $N'_m=[x_{\psi(m)}+\frac{1}{2}]$ (la partie entière de ...) et $y_m=x_{\psi(m)}-N'_m$ de sorte que $x_{\psi(m)}=N'_m+y_m$ et $y_m\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, par 10.c on a $\lim\limits_{n\to+\infty}y_m=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}N'_m=+\infty$, et $\forall j\in\{1,...,n\}$, $\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N'_m}=\lim\limits_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j(x_{\psi(m)}-y_m)}=-1$
    $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{2i\lambda_j N'_m}=\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{i\lambda_j N'_m})^2=1$
    Dans le cas où la suite n'est pas minorée on construis (de même façon) la suite $(N_m)_m$ de limite $-\infty$

12. Démonstration du théorème :

On pose $g(x)=1+\sum_{j=1}^{n}e^{-i\alpha_j}e^{i\lambda_j x}+e^{i2\pi x}$, on d'après les questions précédentes $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|=n+2$, on va distinguer deux cas , selon que le $\sup$ est atteint ou non.
• Premier cas : S'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $|g(a)|=n+2$
Dans ce cas on a $|1+\sum_{j=1}^{n}e^{-i\alpha_j}e^{i\lambda_j a}+e^{i2\pi a}|=n+2$, donc $e^{i2\pi a}=1$ et $1\leq\forall j\leq n$, $e^{-i\alpha_j}e^{i\lambda_j a}=1$, par suite $a\in\mathbb{Z}$ et $1\leq\forall j\leq n$, $\alpha_j=\lambda_j a \bmod 2\pi$, soit $(N_m)_m$ une suite d'entiers naturels tel que $\lim_{m\to+\infty}N_m=+\infty$ et $1\leq\forall j\leq n$ $\lim_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N_m}=1$, on pose $N'_m=N_m+a$ qui est le terme d'une suite d'entiers naturels à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$, de sorte que pout tout $j\in\{1,...,n\}$ $\lim_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N'_m}=\lim_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N_m}e^{i\lambda_j a}=e^{i\alpha_j}$
• Si $\forall x\in\mathbb{R}\quad|g(x)|<n+2$
Dans ce cas ells existe une suite de nombres réels $(x_m)_m$ non bornée tel que $\lim_{n\to+\infty}|g(x)|=n+2$, de laquelle on peut extraire une suite qui tend vers $\pm\infty$, pour simplifier on peut supposer que la suite $(x_m)_m$ tend vers $\pm\infty$.
Si $(x_m)_m$ tend vers $+\infty$, on prend $N_m=[x_m+\frac{1}{2}]-y_m$ et on a $y_m\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ (comme à la question 10.c), la suite $(N_m)_m$ tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain rang elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $j\in\{1,...,n\}$, $e^{i\lambda_j N_m}=e^{i\alpha_j}$.
Si $(x_m)_m$ tend vers $-\infty$,on pose $N_m=[x_m+\frac{1}{2}]-y_m$ donc $(N_m)_m$ tend vers $-\infty$,on va construire par récurrence une application $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tel la suite $(2N_m-N_{\psi(m)})_m$ soit strictement croissante.
On prend $\psi(0)=0$, il existe un entier que l'on note $\psi(1)$ tel que $N_{\psi(1)}\leq 2N_1-2N_0-\frac{1}{2}<2N_1-2N_0$ de sorte que $2N_0-N_{\psi(0)}<2N_1-N_{\psi(1)}$
On suppose qu'ils existent $\psi(0)<...<\psi(m)$ tels que $2N_0-N_{\psi(0)}<...<N_m-N_{\psi(m)}$, il existe un entier noté $\psi(m+1)$ tel que $\psi(m)<\psi(m+1)$ et $N_{\psi(m+1)}\leq 2N_{m+1}-(2N_m-N_{\psi(m)})-\frac{1}{2}$ de sorte que $2N_m-N_{\psi(m)}<2N_{m+1}-N_{\psi(m+1)}$
on pose $N'_m=2N-N_{\psi(m)}$, la suite $(N'_m)_m$ est une suite d'entiers relatifs , strictement croissante , donc tend vers $+\infty$, en particulier elle est à termes dans $\mathbb{N}$ à partir d'un certain rang. Et on a $1\leq\forall j\leq n$, $\lim_{m\to+\infty}e^{i\lambda_j N'_m}=\lim_{m\to+\infty}e^{i2\lambda_j N_m}e^{-i\lambda_j N_{\psi(m)}}=e^{i2\alpha_j}e^{-i\alpha_j}=e^{i\alpha_j}$
Remarque(utile pour la suite) : dans le théorème de Kronecker on peut supposer de plus que la suite $(N_m)_m$ est strictement croissante, pour qu'elle soit une suite extraite de la suite $(m)_m$,"De toute suite de limite $+\infty$ on peut extraire une suite strictement croissante"

Troisième partie :valeurs d'adhérence aux points de C-convergence

13. (a) • Cas $\frac{x}{\pi}\in\mathbb{Q}$, ils existent $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}*$ tels que $\frac{x}{\pi}=\frac{p}{q}$ de sorte que $x=\frac{p}{q}\pi$, on a $S_n(e^{ix})-\sigma(e^{ix})=\frac{e^{ix(n+1)}}{e^{ix}-1}=e^{ix}\frac{e^{ixn}}{e^{ix}-1}$, on pose $v_n=e^{inx}$ et remarquons que la suite $(v_n)_n$ est $2q$-périodique , donc elle est à valeurs dans le compact $\{v_k\ \ ,0\leq k\leq 2q-1\}$, en particulier l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n$ est inclus dans $\{v_k\ \ ,0\leq k\leq 2q-1\}$. Réciproquement pour $0\leq k\leq 2q-1$, on a $v_k=\lim_{n\to+\infty}v_{k+2qn}$, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n$ est $\{v_k\ \ ,0\leq k\leq 2q-1\}$, d'où $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})+e^{ix}\frac{e^{ixk}}{e^{ix}-1}\ ,\ \ 0\leq k\leq 2q-1\}$
• Cas $\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$, dans ce cas la famille (x,π) est $\mathbb{Q}$-libre , d'après le théorème de Kronecker l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{inx})_n$ est $\mathbb{U}=\{e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\}$, donc $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})+e^{ix}\frac{e^{i\theta}}{e^{ix}-1},\theta\in\mathbb{R}\}=C(\sigma(e^{ix}),\frac{1}{|e^{ix}-1|})$

(b) D'abord remarquons que si $(u_n)_n$ est une suite alors :
L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ = l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_{2n})_n$ $\cup$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_{2n+1})_n$
On a $S_{2n}(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-e^{ix}\frac{\alpha+\beta+\alpha e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{in(2x)}$, la famille $(2x,\pi)$ est $\mathbb{Q}$-libre , donc d'après le théorème de Kronecker , l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in(2x)})_n$ est $\{e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\}$,par suite l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_{2n}(e^{ix})_n$ est
$\{\sigma(e^{ix})-e^{ix}\frac{\alpha+\beta+\alpha e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\}=C(\sigma(e^{ix}),|\frac{\alpha+\beta+\alpha e^{ix}}{1-e^{i2x}}|)=C_1$
$S_{2n+1}(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-e^{i2x}\frac{\alpha+(\beta+\alpha)e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{in(2x)}$,la famille $(2x,\pi)$ est $\mathbb{Q}$-libre ,donc d'après le théo-

rème de Kronecker , l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in(2x)})_n$ est $\{e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\}$,par suite l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_{2n+1}(e^{ix}))_n$ est $\{\sigma(e^{ix})-e^{i2x}\frac{\alpha+(\beta+\alpha)e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}\}=C(\sigma(e^{ix}),|\frac{\alpha+(\beta+\alpha)e^{ix}}{1-e^{i2x}}|)=C_2$, ainsi $\mathcal{L}(e^{ix})=C_1\cup C_2$

(c) On a $S_n(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-(e^{ix}\frac{e^{inx}}{1-e^{ix}}+\alpha e^{i(\lambda+x)}\frac{e^{in(\lambda+x)}}{1-e^{i(\lambda+x)}})$,la famille (x,λ,π) est $\mathbb{Q}$-libre donc la famille $(x,x+\lambda,\pi)$ est aussi $\mathbb{Q}$-libre ,alors par le théorème de Kronecker $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})-(e^{ix}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{ix}}+\alpha e^{i(\lambda+x)}\frac{e^{i\theta'}}{1-e^{i(\lambda+x)}})/\ \ \theta\,,\theta'\in\mathbb{R}\}$ et les changement des paramètres $\theta\leftarrow\theta+x$ et $\theta'\leftarrow\theta+x+\lambda$, on obtient $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})-(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{ix}}+\alpha\frac{e^{i\theta'}}{1-e^{i(\lambda+x)}})/\ \ \theta\,,\theta'\in\mathbb{R}\}$
Posons $\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\theta_1}}{|1-e^{ix}|}$ et $\frac{1}{1-e^{\lambda+x}}=\frac{e^{i\theta_2}}{1-e^{\lambda+x}}$ on a alors $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})-(\frac{e^{i(\theta+\theta_1)}}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i(\theta'+\theta_2)}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|})/\ \ \theta\,,\theta'\in\mathbb{R}\}$, de même par les changement des paramètres $\theta\leftarrow\theta+\theta_1$ et $\theta'\leftarrow\theta'+\theta_2$, on obtient $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\sigma(e^{ix})-(\frac{e^{i\theta}}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i\theta'}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|})/\ \ \theta\,,\theta'\in\mathbb{R}\}$
Soit $\zeta\in\mathbb{C}$, on a $\zeta\in\mathcal{L}(e^{ix})$ si, et seulement si, ils existent $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ tels que $\sigma(e^{ix})-\zeta=\frac{e^{i\theta}}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i\theta'}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}$ si, et seulement si, ils existent $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ tels que $|\sigma(e^{ix})-\zeta|=|\frac{e^{i\theta}}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i\theta'}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|$ (en effet ,pour la réciproque ,les deux complexes ont même module donc ils sont égaux modulo un complexe de module 1 et quitte à changer les paramètres on obtient...), maintenant on a
$\{|\sigma(e^{ix})-\zeta|\ /\zeta\in\mathcal{L}(e^{ix})\}=\{|\frac{1}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i(\theta'-\theta)}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|\ /\theta,\theta'\in\mathbb{R}\}=\{|\frac{1}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i\theta}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|\ /\theta\in\mathbb{R}\}$
Il reste à démontrer que pour $\alpha>0$ suffisamment petit , il existent r_1 et r_2 tels $0<r_1<r_2$ et $\{|\sigma(e^{ix})-\zeta|\ /\zeta\in\mathcal{L}(e^{ix})\}=[r_1,r_2]$
On considère la fonction de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\theta\in\mathbb{R}$, $g(\theta)=|\frac{1}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{e^{i\theta}}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|$, la fonction g est continue et on a $g(0)=|\frac{1}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{1}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|=\frac{1}{|1-e^{ix}|}+\alpha\frac{1}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}$ et $g(\pi)=|\frac{1}{|1-e^{ix}|}-\alpha\frac{1}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}|$, et pour $\alpha>0$ suffisamment petit on a $\frac{1}{|1-e^{ix}|}>\alpha\frac{1}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}$ donc $g(\pi)=\frac{1}{|1-e^{ix}|}-\alpha\frac{1}{|1-e^{i(\lambda+x)}|}$. on pose $r_1=g(\pi)$ et $r_2=g(0)$, par les inégalités triangulaires on a $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $g(\pi)\le g(\theta)\le g(0)$, par la continuité de g , $g(\mathbb{R})=[r_1,r_2]$ d'où $\{|\sigma(e^{ix})-\zeta|\ /\zeta\in\mathcal{L}(e^{ix})\}=g(\mathbb{R})=[r_1,r_2]$ et remarquons que $0<r_1<r_2$

Fin