

Banque ENS 2011

Corrigé de l'épreuve C de mathématiques (Ulm-Lyon-Cachan)

1 Énergie et inégalité de trou spectral

1.(a) π est non nul et $P\pi = \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} \right)_{1 \leq i \leq n} = \pi$, donc π est un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1.

1.(b) Soit $u = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ un vecteur propre de P pour la valeur propre 1 et soit i_0 tel $u_{i_0} = \max(u_1, u_2, \dots, u_N)$. Nous avons :

$$0 = u_{i_0} - u_{i_0} = \sum_{j=1}^N p_{i_0,j} u_{i_0} - \sum_{j=1}^N p_{i_0,j} u_j = \sum_{j=1}^N \underbrace{p_{i_0,j} (u_{i_0} - u_j)}_{\geq 0}$$

donc $p_{i_0,j}(u_{i_0} - u_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. Comme les $p_{i,j}$ sont strictement positifs, $u = u_{i_0} \pi$. On en déduit que l'espace propre de P associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par π . Comme P est symétrique réelle, elle est diagonalisable et chaque espace propre de P a pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée : 1 est donc une valeur propre simple de P .

1.(c) Notons $M = \max(u_1, \dots, u_N)$ et $E = \{j, u_j = M\}$. En reprenant la preuve précédente, nous avons :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, (i \in E \text{ et } p_{i,j} \neq 0) \implies j \in E$$

Autrement-dit, si j est connecté à i et si i est élément de E , j est également élément de E . Comme E est non vide et P irréductible, on obtient que $E = \{1, 2, \dots, N\}$, c'est-à-dire que u est colinéaire à π : on conclut comme à la question (b).

2.(a) Nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, u) &= \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{u_i^2 + u_j^2}{2} p_{i,j} - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_i u_j p_{i,j} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N u_i^2 \underbrace{\sum_{j=1}^N p_{i,j}}_{=1} + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N u_j^2 \underbrace{\sum_{i=1}^N p_{i,j}}_{=1} - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_i u_j p_{i,j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} u_j \right) \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, Pu \rangle \end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire, nous obtenons donc

$$\mathcal{E}(u, u) = \langle u, (Id - P)u \rangle = \langle (Id - P)u, u \rangle$$

2.(b) Notons $\mathcal{B} = (e_i)$ la base orthonormale canonique, définie par $e_i = {}^t(0, \dots, 0, \sqrt{N}, 0, \dots, 0)$ où \sqrt{N} est en position i . L'application $\varphi : u \mapsto (Id - P)u$ a pour matrice $(Id - P)$ dans \mathcal{B} . Cette matrice est symétrique

(réelle) et admet 0 pour valeur propre simple, associée à l'espace propre $\mathbb{R}\pi$. Le théorème spectral permet donc d'affirmer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (\pi, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ tel que

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Si v est un vecteur non nul orthogonal à π , il s'écrit :

$$v = \sum_{i=2}^N v_i \varepsilon_i$$

et

$$\frac{\mathcal{E}(v, v)}{\|v\|_2^2} = \frac{\left\langle \sum_{i=2}^N u_i \varepsilon_i, \sum_{i=2}^N \lambda_i u_i \varepsilon_i \right\rangle}{\sum_{i=2}^N u_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^N \lambda_i u_i^2}{\sum_{i=2}^N u_i^2} \geq \min_{2 \leq i \leq N} \lambda_i$$

Si i_0 est un indice en lequel ce minimum est atteint, le vecteur $u = \varepsilon_{i_0}$ donne un cas d'égalité : ceci prouve que la valeur μ est bien définie, qu'elle est atteinte et qu'elle est égale à λ_{i_0} . D'autre part, $\lambda_{i_0} = \mathcal{E}(\varepsilon_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) \geq 0$ et λ_{i_0} est non nulle (0 est valeur propre simple de $Id - P$), donc $\mu > 0$.

Remarques :

- on peut évidemment suivre l'énoncé et commencer par démontrer que μ est atteint et strictement positif ($K = \{v \in \pi^\perp, \|v\|_2 = 1\}$ est compact, $f : v \mapsto \mathcal{E}(v, v)$ est continue et à valeurs strictement positives et $\mu = \inf\{f(v), v \in K\}$). Il faut cependant reprendre ensuite la preuve précédente pour obtenir $\mu = \lambda_{i_0}$.
- sauf erreur, je ne vois pas pourquoi l'énoncé suggère de commencer par supposer que les $p_{i,j}$ sont tous strictement positifs.
- cela aurait été plus pratique de définir directement la forme bilinéaire symétrique positive \mathcal{E} (question 2-2) et de montrer que \mathcal{E} restreinte à π^\perp est définie positive (d'autant que l'on a besoin à la question suivante de la propriété $\langle u, (Id - P)v \rangle = \langle (Id - P)u, v \rangle$ dans un cas où $u \neq v$).

- 3.(a)** (1) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants avec condition initiale : on sait qu'il possède une unique solution maximale, définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{t(P-Id)} u^0$$

- 3.(b)** L'application $t \mapsto \langle \pi, u(t) \rangle$ est de classe C^1 et a pour dérivée

$$t \mapsto \langle \pi, u'(t) \rangle = \langle \pi, (Id - P)u(t) \rangle = \langle (Id - P)\pi, u(t) \rangle = \langle 0, u(t) \rangle = 0,$$

en remarquant que $u \mapsto (Id - P)u$ est un endomorphisme symétrique (sa matrice dans la base orthonormale \mathcal{B} est symétrique). Comme $\langle \pi, u(0) \rangle = \langle \pi, u^0 \rangle = 1$, nous obtenons l'égalité demandée.

- 3.(c)** Dérivons la fonction e :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, e'(t) &= 2 \langle u(t) - \pi, u'(t) \rangle = 2 \langle u(t) - \pi, (P - Id)u(t) \rangle \\ &= 2 \langle u(t) - \pi, (P - Id)(u(t) - \pi) \rangle + 2 \underbrace{\langle u(t) - \pi, (P - Id)\pi \rangle}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\mathcal{E}(u(t) - \pi, u(t) - \pi) \\
&\leq -2\mu \|u(t) - \pi\|_2^2 \quad \text{car } \langle u(t) - \pi, \pi \rangle = \langle u(t), \pi \rangle - \langle \pi, \pi \rangle = 0 \\
&\leq -2\mu e(t)
\end{aligned}$$

Classiquement, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{2\mu t} e(t)$ est de classe C^1 et sa dérivée est négative : on en déduit que $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ pour tout $t \geq 0$, ce qui est exactement l'inégalité demandée.

2 Entropie et inégalité de Sobolev

1. L'application

$$\varphi : u \mapsto \begin{cases} u \ln u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ avec $\varphi''(u) = 1/u > 0$ pour tout $u > 0$. φ est donc strictement convexe sur \mathbb{R}^+ , ce qui permet d'écrire :

$$0 = \varphi(1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} u_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \varphi(u_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \ln u_i = H(u).$$

2.(a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
L(\pi + \varepsilon v) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \varepsilon v_i)^2 \ln \frac{(1 + \varepsilon v_i)^2}{\|\pi + \varepsilon v\|_2^2} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \varepsilon v_i)^2 \left(2 \ln(1 + \varepsilon v_i) - \ln(\|\pi\|_2^2 + 2\varepsilon \langle \pi, v \rangle + \varepsilon^2 \|v\|_2^2) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + \varepsilon v_i)^2 \left(2\varepsilon v_i - \varepsilon^2 v_i^2 + O(\varepsilon^3) - \ln(1 + \varepsilon^2 \|v\|_2^2) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + 2\varepsilon v_i + \varepsilon^2 v_i^2) \left(2\varepsilon v_i - \varepsilon^2 (v_i^2 + \|v\|_2^2) + O(\varepsilon^3) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(2\varepsilon v_i + \varepsilon^2 (3v_i^2 - \|v\|_2^2) + O(\varepsilon^3) \right) \\
&= 2\varepsilon \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i + \varepsilon^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(3v_i^2 - \|v\|_2^2 \right) + O(\varepsilon^3) \\
&= 2\varepsilon \langle \pi, v \rangle + \varepsilon^2 (3\|v\|_2^2 - \|v\|_2^2) + O(\varepsilon^3) \\
&= 2\varepsilon^2 \|v\|_2^2 + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

2.(b) Fixons v non nul tel que $\langle \pi, v \rangle = 0$ et $\mu = \frac{\mathcal{E}(v, v)}{\|v\|_2^2}$. Comme $\|v\|_2^2$ est non nul, la question précédente prouve que $L(\pi + \varepsilon v)$ est équivalent à $2\varepsilon^2 \|v\|_2^2$ quand ε tend vers 0. En particulier, pour ε non nul assez proche de

0, $L(\pi + \varepsilon v) \neq 0$ et

$$\alpha \leq \frac{\mathcal{E}(\pi + \varepsilon v, \pi + \varepsilon v)}{L(\pi + \varepsilon v)} = \frac{\langle \pi + \varepsilon v, (Id - P)(\pi + \varepsilon v) \rangle}{L(\pi + \varepsilon v)} = \frac{\varepsilon \langle \pi + \varepsilon v, (Id - P)v \rangle}{L(\pi + \varepsilon v)}$$

Comme $Id - P$ est symétrique, on en déduit :

$$\alpha \leq \frac{\varepsilon \langle (Id - P)(\pi + \varepsilon v), v \rangle}{L(\pi + \varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2 \langle (Id - P)v, v \rangle}{L(\pi + \varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2 \mathcal{E}(v, v)}{L(\pi + \varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2 \mu \|v\|_2^2}{L(\pi + \varepsilon v)}$$

On obtient alors $\alpha \leq \frac{\mu}{2}$ en faisant tendre ε vers 0.

- 3.(a)** L'endomorphisme $u \mapsto (Id - P)u$ est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On en déduit que l'application $\psi : (u, v) \mapsto \langle u, (Id - P)v \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, associée à la forme quadratique $\mathcal{Q} : u \mapsto \mathcal{E}(u, u)$. Cela donne en particulier :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^N, \langle u, (Id - P)v \rangle = \langle v, (Id - P)u \rangle = \langle (Id - P)u, v \rangle.$$

D'autre part, l'application \mathcal{E} est également une forme bilinéaire symétrique, associée à la même forme quadratique \mathcal{Q} . Par unicité de la forme polaire associée à une forme quadratique (égalité de polarisation), on en déduit que $\mathcal{E} = \psi$.

- 3.(b)** Par symétrie, nous pouvons supposer que $0 < a < b$. Nous avons alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} \right)^2 = \frac{1}{(b - a)^2} \left(\int_a^b \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right)^2 \leq \frac{1}{(b - a)^2} \left(\int_a^b \frac{dt}{4t} \right) \left(\int_a^b dt \right) = \frac{1}{4} \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$$

- 3.(c)** Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^N$. L'inégalité précédente donne directement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, \ln u) &= \frac{1}{2N} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ u_i \neq u_j}} (u_i - u_j)^2 \frac{\ln u_i - \ln u_j}{u_i - u_j} \\ &\geq \frac{1}{2N} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ u_i \neq u_j}} 4(u_i - u_j)^2 \left(\frac{\sqrt{u_i} - \sqrt{u_j}}{u_i - u_j} \right)^2 = 4 \mathcal{E}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) \end{aligned}$$

- 4.(a)** Soit $t \geq 0$. Les matrices tP et $-tId$ commutent, donc :

$$\forall t \geq 0, \exp(t(P - Id)) = \exp(tP)\exp(-tId) = e^{-t} \exp(tP) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{e^{-t} \frac{t^k}{k!}}_{\geq 0} P^k$$

Pour tout $k \geq 0$, P^k est à termes positifs, donc $\exp(t(P - Id))$ l'est également.

On en déduit que pour tout t , $u(t) = \exp(t(P - Id))u^0$ a ses composantes toutes positives. Supposons que pour un certain $t_0 \geq 0$, l'ensemble $E = \{i \in \{1, \dots, N\}, u_i(t) = 0\}$ soit non vide. Fixons $i \in E$. L'hypothèse faite sur u^0 impose d'avoir $t_0 > 0$ et u_i étant à valeurs positives sur $[0, +\infty[$, nous avons $u'_i(t_0) = 0$, soit :

$$0 = u'_i(t_0) = \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} u_j(t_0) \right) - u_i(t_0) = \sum_{j=1}^N p_{i,j} u_j(t_0)$$

Comme les $p_{i,j}u_j(t_0)$ sont positifs, il sont tous nuls. Ainsi, comme à la question 1.1c :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, (i \in E \text{ et } p_{i,j} \neq 0) \implies j \in E$$

P étant irréductible et E non vide, $E = \{1, \dots, N\}$, i.e. $u(t_0) = 0$, d'où

$$u^0 = \exp(-t(P - Id))u(t_0) = 0$$

Nous avons donc démontré un peu mieux que ce qui était demandé : si u^0 est non nul et à coordonnées positives, $u(t)$ est à coordonnées strictement positives pour tout $t > 0$.

4.(b)
$$\frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i'(t) \ln u_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i'(t) = \langle u'(t), \ln u(t) + \pi \rangle = \langle u'(t), \ln u \rangle$$
 (voir question 1.3b).

4.(c) Pour tout $t \geq 0$, on sait que $u_i(t) > 0$ pour tout i et le 2.c permet d'écrire :

$$\frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} = \langle u'(t), \ln u(t) \rangle = \langle (P - Id)u(t), \ln u \rangle = -\mathcal{E}(u, \ln u(t)) \leq -4\mathcal{E}(\sqrt{u(t)}, \sqrt{u(t)}) \leq -4\alpha L(\sqrt{u(t)})$$

On a d'autre part :

$$\|\sqrt{u(t)}\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t) = \langle u(t), \pi \rangle = 1 \text{ et } L(\sqrt{u(t)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t) \ln u_i(t) = \mathbf{H}(u(t))$$

donc

$$\forall t \geq 0, \frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} \leq -4\alpha \mathbf{H}(u(t))$$

et on conclut comme à la question 1.3c :

$$\forall t \geq 0, \mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0) \exp(-4\alpha t)$$

4.(d) Soit $\varepsilon > 0$. Le vecteur $u_\varepsilon^0 = (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$ est strictement positif et vérifie (4). La question précédente donne donc :

$$\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \mathbf{H}(e^{t(P-Id)}u_\varepsilon^0) \leq \mathbf{H}(u_\varepsilon^0) e^{-4\alpha t}$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour obtenir (6) (\mathbf{H} et $\varepsilon \mapsto (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$ sont continues).

5.(a) C'est effectivement une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall u, v, \|u - v\|_{VT}^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} |u_i - v_i| \right)^2 \leq \frac{1}{N^2} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} (u_i - v_i)^2 \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq N} 1 \right) = \|u - v\|_2^2$$

d'où l'inégalité demandée, avec $C_N = 1$.

5.(b) L'inégalité admise est également valable pour $a = 0$. On en déduit :

$$2H(u) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N u_i \ln u_i \geq \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left(u_i - 1 + \frac{3(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} \right) = \underbrace{2\langle \pi, u \rangle - 2}_{=0} + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{3(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} = \frac{6}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}$$

or l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|u - \pi\|_{VT}^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{4 + 2u_i} \frac{|u_i - 1|}{\sqrt{4 + 2u_i}} \right)^2 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (4 + 2u_i) \right)}_{=6} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} \right) = \frac{6}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}$$

d'où l'égalité demandée.

3 Exemple de l'hypercube $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d)$

Il y a une maladresse dans la définition de $x \cdot y$: comme x, y sont éléments de E , les x_i et y_i sont des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $\sum_{i=1}^d x_i y_i$ est également un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il faut comprendre ici que les $x_i y_i$ sont identifiés aux éléments 0 et 1 de \mathbb{R} avant de faire leur somme. On remarquera également que $(-1)^{-\xi \cdot x} = (-1)^{\xi \cdot x}$ pour $x, \xi \in E$.

1.(a) Soit $z \in E$. Nous avons :

$$\sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = \sum_{\xi_1, \dots, \xi_d \in \{0,1\}} (-1)^{\xi_1 z_1 + \dots + \xi_d z_d} = \prod_{1 \leq i \leq d} (1 + (-1)^{z_i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0 \\ N & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

1.(b) Pour $u \in \mathbb{R}^E$, notons \tilde{u} l'élément de \mathbb{R}^E défini par :

$$\forall z \in E, \tilde{u}(z) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} u(\xi).$$

Les applications $u \mapsto \hat{u}$ et $u \mapsto \tilde{u}$ sont clairement linéaires et nous devons montrer qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Il suffit pour cela de démontrer la relation demandée pour chaque vecteur de la base canonique $(\delta_x)_{x \in E}$ de \mathbb{R}^E .

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \hat{\delta}_x(\xi) &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} \left(\sum_{\xi' \in E} (-1)^{-\xi' \cdot \xi} \delta_x(\xi') \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y} (-1)^{-x \cdot \xi} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot (y-x)} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x - y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \delta_x(y) \end{aligned}$$

1.(c) Nous en déduisons directement :

$$\frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in E} \hat{u}(x) \left(\sum_{y \in E} (-1)^{-x \cdot y} v(y) \right) = \frac{1}{N} \sum_{y \in E} v(y) \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{x \in E} (-1)^{-x \cdot y} \hat{u}(x) \right)}_{=u(y)} = \langle u, v \rangle$$

2. Nous avons :

- pour $x, y \in E$, $p_{x,y} \geq 0$ et $x - y = y - x$ donne $p_{x,y} = p_{y,x}$;
- pour tout $x \in E$, les éléments y de E tels que $p_{x+y} = 1/q$ sont les éléments $x + e_1, x + e_2, \dots, x + e_q$, ce qui donne $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$;
- P étant symétrique, $\sum_{x \in E} p_{x,y} = 1$ pour tout $y \in E$;

- soient $x, y \in E$; si $x = y$, on a $p_{x, x+e_1} = p_{x+e_1, x} = 1/d > 0$; sinon, on peut écrire

$$x - y = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k}$$

avec $k \geq 1$, ce qui donne : $p_{x, x+e_{i_1}} = p_{x+e_{i_1}, x+e_{i_1}+e_{i_2}} = \cdots = p_{x+e_{i_1}+\cdots+e_{i_{k-1}}, y} = 1/d > 0$.

La matrice P est donc symétrique, bistochastique et irréductible.

- 3.(a)** Comme ξ est non nul, il existe i_0 tel que $\xi_{i_0} = 1$. Nous en déduisons :

$$c(\xi) = 1 + \frac{1}{d} - \frac{1}{d} \sum_{i \neq i_0} \underbrace{(-1)^{\xi_i}}_{\leq 1} \geq 1 + \frac{1}{d} - \frac{d-1}{d} = \frac{2}{d}$$

- 3.(b)** Pour tout x de E , $w_x = v_x - \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} v_{x+e_i}$, donc :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in E, \hat{w}(\xi) &= \sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} \left(v_x - \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} v_{x+e_i} \right) \\ &= \hat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} \sum_{i=1}^d v_{x+e_i} \\ &= \hat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left(\sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} v_{x+e_i} \right) \\ &= \hat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \left(\sum_{y \in E} (-1)^{-\xi \cdot (y-e_i)} v_y \right) \\ &= \hat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (-1)^{\xi_i} \tilde{v}(\xi) \\ &= c(\xi) \hat{v}(\xi) \end{aligned}$$

- 3.(c)** En reprenant les notations précédentes, nous avons, pour v non nul tel que $\langle \pi, v \rangle = 0$:

$$\mathcal{E}(v, v) = \langle w, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{w}, \hat{v} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in E} c(x) \hat{v}(x)^2 \geq \frac{2}{q} \frac{1}{N} \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle = \frac{2}{d} \langle v, v \rangle$$

Nous en déduisons que $\mu \geq \frac{2}{d}$.

Il reste à construire un vecteur v qui donne l'égalité. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\forall x \in E, c(x) \hat{v}(x)^2 = \frac{2}{d} v(x)^2.$$

Comme $c(x) > \frac{2}{d}$ dès que x n'est pas l'un des e_i , cela impose d'avoir $\hat{v}(x) = 0$ dès que $x \notin \{e_1, \dots, e_d\}$.

Posons donc $v = \widehat{\delta}_{e_1}$, de sorte que $\hat{v} = \delta_{e_1}$ d'après la formule d'inversion. Nous avons :

$$\begin{aligned} \bullet \langle \pi, v \rangle &= \frac{1}{N} \langle \hat{\pi}, \hat{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} \hat{\pi}(x) \delta_{e_1}(x) = \frac{1}{N} \hat{\pi}(e_1) = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} (-1)^{e_1 \cdot x} \pi(x) = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} (-1)^{e_1 \cdot x} = 0 \\ &\text{car } e_1 \neq 0. \end{aligned}$$

- en posant $w = (Id - P)v$, nous avons :

$$\forall \xi \in E, \widehat{w}(\xi) = c(\xi)\widehat{v}(\xi) = \begin{cases} c(e_1) = 2/d & \text{si } \xi = e_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne $\widehat{w} = \frac{2}{d}\delta_{e_1} = \frac{2}{d}\widehat{v}$. On en déduit :

$$\mu \leq \frac{\mathcal{E}(v, v)}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle \widehat{v}, \widehat{w} \rangle}{\langle \widehat{v}, \widehat{v} \rangle} = \frac{2}{d}$$

- 4.(a)** En appliquant les questions 2.5.(a) et l'inégalité (2), nous obtenons :

$$\forall t \geq 0, \|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \|u(t) - \pi\|_2 \leq \|u^0 - \pi\|_2 e^{-\mu t} = \sqrt{\frac{(N-1)^2 + N - 1}{N}} e^{-2t/d} = \sqrt{N-1} e^{-2t/d}$$

Nous aurons donc $\|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_1$, avec :

$$T_1 = \frac{d}{2} \left(\ln \sqrt{N-1} - \ln \varepsilon \right) = -\frac{d}{2} \ln \varepsilon + \frac{d}{4} \ln(2^d - 1)$$

- 4.(b)** Nous avons cette fois, pour tout $t \geq 0$:

$$\|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \sqrt{2H(u(t))} \leq \sqrt{2H(u^0)} e^{-2\alpha t} = \sqrt{2 \ln N} e^{-2t/d} = \sqrt{2d \ln 2} e^{-2t/d}$$

Nous aurons donc $\|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_2$, avec :

$$T_2 = \frac{d}{2} \left(\ln \sqrt{2d \ln 2} - \ln \varepsilon \right) = -\frac{d}{2} \ln \varepsilon + \frac{d}{4} \ln(2d \ln 2)$$

Une étude élémentaire montre que $2^d - 1 \geq 2d \ln 2$ pour tout $d \geq 2$: on a donc toujours $T_1 \geq T_2$ et la méthode du (b) est plus efficace que celle du (a).