

Première partie : étude de \mathcal{N}_n

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, $x, y \in \mathbb{C}^n$, on a $A^* = {}^t\bar{A}$, donc $(A^*x|y) = ({}^t\bar{A}x|y) = ({}^t(A\bar{x})y) = {}^t\bar{x}Ay = (x|Ay)$.
2. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{C}^n (Ax|Ay) = (x|y)$ si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{C}^n (A^*Ax|y) = (x|y)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{C}^n A^*Ax = x$ si et seulement si $A^*A = I_n$ et puisque $\dim M_n(\mathbb{C})$ est finie ceci est équivalent à $AA^* = I_n$.
 - (b) Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice A , alors $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = I_n$ si et seulement si $\forall i, j \in [[1, n]] (A^*A)_{i,j} = (I_n)_{i,j}$ si et seulement si $\forall i, j \in [[1, n]] {}^t\bar{C}_i C_j = \delta_{i,j}$ si et seulement si $\forall i, j \in [[1, n]] (C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ si et seulement si (C_1, \dots, C_n) est une base orthonormée de \mathbb{C}^n .
3. (a) • Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et soit $x \in (Ker(A))^{\perp}$. Montrons que pour tout $y \in Ker(A)$ $(Ax|y) = 0$.
On a $A^*A = AA^*$ et $Ay = 0$, donc $AA^*y = A^*Ay = 0$, ce qui entraîne que $A^*y \in Ker(A)$ et puisque $x \in (Ker(A))^{\perp}$, on aura $(x|A^*y) = 0$ d'où $(Ax|y) = (x|A^*y) = 0$, ce qui assure l'inclusion demandée.
• Soit $\lambda \in Sp(A)$, alors $E_{\lambda} = Ker(A - \lambda I_n)$, or $(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^* = AA^* - \lambda A^* - \bar{\lambda}A + |\lambda|^2 I_n = A^*A - \bar{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I_n = (A - \lambda I_n)^*(A - \lambda I_n)$, donc $(A - \lambda I_n) \in \mathcal{N}_n$, et par application de l'inclusion précédente, on obtient $A(E_{\lambda}^{\perp}) \subset E_{\lambda}^{\perp}$.
 - (b) • Soit $A = UDU^*$ où $U \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$, alors $AA^* = (UDU^*)(UDU^*)^* = UDU^*UD^*U^*$, or si $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $DD^* = diag(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = D^*D$, de plus $UU^* = U^*U$, donc $AA^* = UDD^*U^* = U D^* D U^* = (U D^* U^*)(U D U^*) = (U D U^*)^*(U D U^*) = A^*A$.
• Réciproquement soit $A \in \mathcal{N}_n$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Montrons par récurrence sur n que f admet une base orthonormale de vecteurs propres.
* Pour $n = 1$, rien à montrer.
* Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme de \mathbb{C}^k ($k \leq n - 1$), et soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{N}_n$ (qui existe puisque A est de polynôme caractéristique scindé).
Si $E_{\lambda} = \mathbb{C}^n$, alors $A = \lambda I_n$ et n'importe quelle base orthonormale de \mathbb{C}^n répond à la question.
Si $E_{\lambda} \neq \mathbb{C}^n$, alors $1 \leq \dim(E_{\lambda})^{\perp} \leq n - 1$, or $f((E_{\lambda})^{\perp}) \subset (E_{\lambda})^{\perp}$, donc la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = E_{\lambda} \oplus (E_{\lambda})^{\perp}$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1 \end{pmatrix}$ où $p = \dim(E_{\lambda})$ et A_1 est la matrice de la restriction f_1 de f à $(E_{\lambda})^{\perp}$.
On aura $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base orthonormée canonique de \mathbb{C}^n à cette dernière base qu'on a choisit orthonormée, ce qui la rend d'après la question 2b., dans \mathcal{U}_n , et par conséquent $B = P^*AP$. On vérifie facilement que $B^*B = P^*A^*PP^*AP = P^*A^*AP = P^*AA^*P = BB^*$ et un calcul par blocs donne $B^*B = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1^*A_1 \end{pmatrix}$ et $BB^* = \begin{pmatrix} I_p & O_{n-p} \\ O_{n-p} & A_1A_1^* \end{pmatrix}$, ce qui entraîne que $A_1^*A_1 = A_1A_1^*$, donc $A_1 \in \mathcal{N}_{n-p}(\mathbb{R})$, et l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'une base orthonormale de $(E_{\lambda}(A))^{\perp}$ constituée de vecteurs propres de f_1 , donc de f .
En réunissant les deux bases orthonormales de $E_{\lambda}(A)$ et de $(E_{\lambda}(A))^{\perp}$, on obtient une base orthonormale de \mathbb{C}^n constituée de vecteurs propres de f , ce qui établit la récurrence.
- * Conclusion : Soit U la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^n à la base orthonormale de vecteurs propre de f , alors la formule de changement de bases s'écrit $A = UDU^*$, où $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les λ_i étant les valeurs propres de A et $U \in \mathcal{U}_n$.
4. Soit $A \in \mathcal{N}_n$, alors la question précédente assure qu'il existe $U \in \mathcal{U}_n$ et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $A = UDU^*$.
D'une part : $tr(AA^*) = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \bar{A}_{i,j} = \sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}|^2$ et d'autre part : $tr(AA^*) = tr(UDU^*UD^*U^*) = tr(UDD^*U^*) = tr(DD^*U^*U) = tr(DD^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_i = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$, ce qui entraîne l'égalité demandée.
5. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $x \in \mathbb{C} \|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^*Ax) = (x|A^*Ax) = (A^*x|A^*x) = \|A^*x\|^2$, ce qui entraîne l'équivalence : $Ax = 0$ si et seulement si $A^*x = 0$, d'où l'égalité : $Ker(A) = Ker(A^*)$.
 - (b) • (i) \implies (ii) : Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et x un vecteur propre de A , alors il existe λ valeur propre de A tel que $x \in Ker(A - \lambda I_n)$, or d'après la question précédente $Ker(A - \lambda I_n) = Ker((A - \lambda I_n)^*) = Ker(A^* - \bar{\lambda} I_n)$, ce qui entraîne que $x \in Ker(A^* - \bar{\lambda} I_n)$, c'est à dire que x est vecteur propre de A^* associé à $\bar{\lambda}$.

- $(ii) \implies (i)$: On va raisonner par récurrence sur n .
- * Si $n = 1$, $A = (a)$ et $A^* = (\bar{a})$, donc on toujours $AA^* = A^*A$.
- * Supposons que l'implication est vérifiée pour toute matrice de $M_{n-1}(\mathbb{C})$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que la proposition (ii) est vérifiée. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A et soit x un vecteur propre de A , alors d'après (ii) , x est aussi vecteur propre de A^* , ce qui assure l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A^*x = \alpha x$. Je dis que $F = (Vect(x))^\perp$ est stable par A , en effet pour tout $y \in F$ $(Ay, x) = (y, A^*x) = \alpha(y, x) = 0$ (ce résultat est généralement vrai : un sous espace de \mathbb{C}^n est stable par A si et seulement si son orthogonal est stable par A^*). La matrice de f dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = Vect(x) \oplus F$ et de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1 \end{pmatrix}$ où A_1 est la matrice de la restriction f_1 de f à F . A_1 vérifie la propriété (ii) , donc d'après l'hypothèse de récurrence $A_1 \in \mathcal{N}_{n-1}$, or si $U \in \mathcal{U}_n$ est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^n à la base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = Vect(x) \oplus (Vect(x))^\perp$, alors $A = U \begin{pmatrix} \alpha & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1 \end{pmatrix} U^*$, donc $AA^* = U \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1 A_1^* \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & A_1^* A_1 \end{pmatrix} U^* = A^*A$, ce qui établit la récurrence.

6. (a) soit $A \in \mathcal{N}_n$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) les valeurs propres distinctes deux à deux de A , alors si L est l'unique polynôme interpolateur de Lagrange tel que $L(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. D'après la question 3b., il existe $U \in \mathcal{U}_n$ tel que $A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^*$, et par récurrence on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A^k = U \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) U^*$, ce qui entraîne par combinaison linéaire que : $L(A) = U \text{diag}(L(\lambda_1), \dots, L(\lambda_n)) U^* = U \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) U^* = A^*$, ce qui répond à la question.

- (b) Soient $A, B \in \mathcal{N}_n$ tels que $AB = BA$.

* Montrons d'abord que A commute avec B^* . D'après la question précédente $B^* = P(B)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$, or une récurrence simple conduit à $AB^k = B^k A$, ce qui entraîne par combinaison linéaire que $AP(B) = P(B)A$, c'est à dire $AB^* = B^*A$.

* Avec l'égalité $AB^* = B^*A$ on obtient : $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AB^*BA^* = B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*(AB)$, ce qui assure que $AB \in \mathcal{N}_n$.

7. • $(ii) \implies (i)$: Supposons qu'il existe $U \in \mathcal{N}_n$ tel que $A^* = AU$, donc $AA^* = A^2U = UAU = A^*A$.

- $(i) \implies (ii)$: Supposons que $A \in \mathcal{N}_n$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de A ,

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$ et $\Delta = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p}, 0, \dots, 0)$, alors d'après la question 3b, il existe

$V \in \mathcal{U}_n$ tel que $A = VDV^*$. Posons $U = V\Delta_1 D_1^* V^*$, où $\Delta_1 = \text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p}, 1, \dots, 1)$ et $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, 1, \dots, 1)$.

Les relations $D\Delta_1 D_1^* = \Delta_1 D_1^* D = D^*$ entraînent que $AU = UA = A^*$ et la relation $\Delta_1 D_1^* \Delta_1^* D_1 = I_n$ entraîne que $UU^* = I_n$, donc U répond à la question.

Deuxième partie : valeur singulière d'une matrice.

8. • \implies :

* Soit $A \in \mathcal{H}_n$, alors $A^* = A$, donc $A^*A = AA^* = A^2$ c'est un élément de \mathcal{N}_n , ce qui entraîne par la question 3b que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

* Soit λ une valeur propre de A , alors il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$, donc $(x, Ax) = \lambda \|x\|^2$ et $(Ax, x) = \bar{\lambda} \|x\|^2$, et puisque $A \in \mathcal{H}_n$, $(x, Ax) = (Ax, x)$, ce qui entraîne que $\lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda} \|x\|^2$, le vecteur x étant non nul, donc $\lambda = \bar{\lambda}$.

* Si de plus $A \in \mathcal{H}_n^+$, alors $\lambda = \frac{(x, Ax)}{\|x\|^2} \geq 0$.

- \Leftarrow :

* Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres réelles, diagonalisable dans une base orthonormale, alors il existe $U \in \mathcal{U}_n$ et D diagonale réelle tels que $A = UDU^*$, donc $A^* = UD^*U^*$, or D est réelle, donc $D^* = D$, et par suite $A^* = A$.

* Si de plus les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A sont positifs. Soit (u_1, \dots, u_n) la base orthonormale de vecteurs propres de A , alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ on a : $(x, Ax) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \geq 0$, donc $A \in \mathcal{H}_n^+$.

9. • **Existence** : Soit $A \in \mathcal{H}_n^+$, d'après la question précédente, il existe $U \in \mathcal{U}_n$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale tel que $A = UDU^*$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. On pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, alors $S = U\Delta U^*$, alors $S \in \mathcal{H}_n^+$ (ses valeurs propres sont positives), et $S^2 = U\Delta U^* U\Delta U^* = U\Delta^2 U^* = UDU^* = A$.

- **Unicité** : A étant diagonalisable, donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda$, sur chaque E_λ on a $A = \lambda I_{dim(E_\lambda)}$, or $S^2 = A$ et

$S \in \mathcal{H}_n^+$, donc $S = \sqrt{\lambda} I_{dim(E_\lambda)}$, ce qui montre que S est définie d'une façon unique sur chaque E_λ , d'où l'unicité.

10. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, la décomposition polaire assure l'existence de $U_1 \in \mathcal{U}_n$ et $S \in \mathcal{H}_n^+$ tel que $A = U_1 S$, et la question 8 assure qu'il existe $U_2 \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ à éléments diagonaux positifs tel que $S = U_2 D U_2^*$, ce qui donne la décomposition en valeurs singulières de A à savoir $A = U_1 S = U_1 U_2 D U_2^* = U D W$, avec $U = U_1 U_2$ et $W = U_2^*$.

11. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- **Existence** : D'après la question précédente, il existe $U_1, V_1 \in \mathcal{U}_n$, $\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ matrice diagonale avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels positifs ou nuls, tel que $A = U_1 \Delta V_1$. Posons $D = \text{diag}(\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_n})$ tel que $\alpha_{n_1} \geq \dots \geq \alpha_{n_n}$ et $\{\alpha_{n_1}, \dots, \alpha_{n_n}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, alors si P est la matrice de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{pmatrix}$, $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = P D P^*$, ce qui entraîne que $A = U_1 P D P^* V_1 = U D V$ où $U = U_1 P$ et $V = P^* V_1$.
- **Unicité** : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A = U D V$ une décomposition singulière tel que $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où les α_i sont des réels positifs, alors $A A^* = U D^2 U^*$, donc $\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2$ sont les valeurs propres de $A A^*$. Supposons l'existence de $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ des valeurs singulières de A , alors $\forall k \in [[1, n]]$, $\alpha_k^2 = \beta_k^2$ et vu que les α_k, β_k sont positifs, on aura $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in [[1, n]]$.

Troisième partie : inégalité de trace

12. Soit P une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant la propriété (\mathcal{P}_k) : $P^2 = P = P^*$ et $\text{rang}(P) = k$.

- (a) • (i) : L'égalité $P^* P = P$ entraîne que pour tout $i \in [[1, n]]$: $(P^* P)_{i,i} = P_{i,i}$, c'est à dire : $\sum_{j=1}^n |P_{i,j}|^2 = P_{i,i}$,

et puisque $P = P^*$, on aura $P_{i,i} = \overline{P_{i,i}}$ donc $P_{i,i} \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que :

$$\sum_{j \neq i} |P_{i,j}|^2 = P_{i,i}(1 - P_{i,i}) \geq 0, \text{ donc } P_{i,i} \in [0, 1].$$

- (ii) : L'égalité $P = P^*$ fait de P une matrice de \mathcal{H}_n , donc diagonalisable dans une base orthonormale, de plus $P(P - I_n) = O_n$, donc les valeurs propres de P sont 0 et 1, d'où l'existence de $U \in \mathcal{U}_n$ et $J_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (les 1 sont en nombre de $k = \text{rang}(P)$) tel que $P = U J_k U^*$, ce qui entraîne que $\text{tr}(P) = \text{tr}(J_k) = k$, c'est à dire $\sum_{i=1}^n P_{i,i} = k$.

- (b) • On a : $\text{Tr}(P D) - \sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^n P_{i,i} \lambda_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{i=1}^k (P_{i,i} - 1) \lambda_i + \sum_{i=k+1}^n P_{i,i} \lambda_i$.

Or pour tout $i \in [[1, k]]$, $\lambda_i \geq \lambda_k$ et pour tout $i \in [[k+1, n]]$, $\lambda_i \leq \lambda_{k+1}$, de plus $P_{i,i} - 1 \leq 0$ et $P_{i,i} \geq 0$,

donc $\sum_{i=1}^k (P_{i,i} - 1) \lambda_i \leq \lambda_k (\sum_{i=1}^k P_{i,i} - k)$ et $\sum_{i=k+1}^n P_{i,i} \lambda_i \leq \lambda_{k+1} \sum_{i=k+1}^n P_{i,i} = \lambda_{k+1} (k - \sum_{i=1}^k P_{i,i})$, ce qui

donne finalement que $\text{Tr}(P D) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq (\lambda_{k+1} - \lambda_k) (\sum_{i=1}^k P_{i,i} - k) \leq 0$.

- La matrice $P = J_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ répond à la question. (les 1 sont en nombre de k).

- (c) • P_1, P_2 vérifient (\mathcal{P}_k) , donc ils sont semblables à J_k , et par suite il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_n$ tels que $P_1 = U_1 J_k U_1^*$ et $P_2 = U_2 J_k U_2^*$, ce qui donne $P_2 = U_2 U_1^* P_1 U_1 U_2^* = U P_1 U^*$, avec $U = U_2 U_1^*$ qui est élément de \mathcal{U}_n comme produit de deux éléments de \mathcal{U}_n .

- Soit P fixé vérifiant la propriété (\mathcal{P}_k) . D'une part pour tout $U \in \mathcal{U}_n$ la matrice $U P U^*$ vérifie aussi la propriété \mathcal{P}_k , donc d'après la question précédente $\text{Tr}(U P U^* D) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

- D'autre part il existe $U \in \mathcal{U}_n$ tel que $P = U J_k U^*$ où $J_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (les 1 sont en nombre de k), donc $\text{Tr}(U^* P U D) = \text{Tr}(J_k D) = \text{Tr}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Donc cette dernière somme est atteinte, ce qui entraîne l'égalité demandée.

13. Soit $U \in \mathcal{U}_n$, alors d'après la question 2b, ses colonnes forment une base orthonormale de \mathbb{C}^n , donc la norme de chaque colonne vaut 1, c'est à dire $\sum_{i=1}^n |U_{i,k}|^2 = 1$ pour tout $k \in [[1, n]]$.

La matrice $U^* \in \mathcal{U}_n$, donc les lignes de U forment aussi une base orthonormale, donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\sum_{j=1}^n |U_{k,j}|^2 = 1 \text{ (c'est la norme de la } k^{\text{ème}} \text{ ligne)}.$$

On conclut que U est doublement stochastique.

14. (a) L'hypothèse : A stochastique et k le plus petit entier tel que $A_{k,k} \neq 1$ montre que la matrice A est de la

$$\text{forme } A = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & & O \\ & A_{k,k} & \dots & A_{k,n} \\ O & \vdots & \ddots & \vdots \\ & A_{n,k} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Supposons que $\forall m > k \ A_{m,k} = 0$, alors en prenant la somme de la $k^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1, on obtient $A_{k,k} = 1$, ce qui est absurde.

Le même raisonnement sur la $k^{\text{ème}}$ ligne aboutit à une absurdité, ce qui entraîne l'existence de $l > k$ tel que $A_{k,l} \neq 0$.

Supposons que $A_{m,l} = 1$, alors puisque la somme des éléments de la $l^{\text{ème}}$ colonne vaut 1, on obtient $A_{k,l} = 0$, ce qui est absurde.

- (b) • La condition (i) montre qu'il suffit de déterminer $A'_{k,k}, A'_{m,k}, A'_{k,l}$ et $A'_{m,l}$.
 La condition (ii) nous invite à choisir $A'_{m,k} A'_{k,l} = 0$, quitte à échanger m avec l et α_i avec β_i , on peut prendre par exemple $A'_{m,k} = 0$.
 Les matrices A et A' étant stochastiques, donc en considérant successivement les lignes k et m , puis les colonnes k et l , on obtient $\begin{cases} A'_{k,k} + A'_{k,l} = A_{k,k} + A_{k,l} \\ A'_{m,l} = A_{m,k} + A_{m,l} \end{cases}$ et $\begin{cases} A'_{k,k} = A_{k,k} + A_{m,k} \\ A'_{k,l} + A'_{m,l} = A_{k,l} + A_{m,l} \end{cases}$
 Ce qui donne $A'_{m,l} = A_{m,k} + A_{m,l}$, $A'_{k,k} = A_{k,k} + A_{m,k}$, $A'_{k,l} = A_{k,l} - A_{m,k}$.
 On vient de déterminer la matrice A' . Voyons la troisième condition qui s'écrit :
 $A'_{k,k} \alpha_k \beta_k + A'_{m,k} \alpha_m \beta_k + A'_{k,l} \alpha_k \beta_l + A'_{m,l} \alpha_m \beta_l \geq A'_{k,k} \alpha_k \beta_k + A'_{k,l} \alpha_k \beta_l + A'_{m,l} \alpha_m \beta_l$,

c'est à dire : $(\alpha_k - \alpha_m)(\beta_k - \beta_l) A_{m,k} \geq 0$, inégalité toujours vérifiée.

- Montrons par récurrence l'inégalité $\sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

* pour $n = 1$ on a égalité.

* Supposons que le résultat est vrai $\forall k \leq n - 1$ et soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice stochastique.

* Si $A = I_n$, alors on a égalité .

Si $A \neq I_n$, soit A' la matrice définie précédemment. La matrice A'' extraite de A' en supprimant les k premières lignes et colonnes est stochastique de $M_{n-k}(\mathbb{C})$, donc d'après l'hypothèse de

récurrence, $\sum_{i,j=k}^n A'_{i,j} \alpha_i \beta_j \leq \sum_{i=k}^n \alpha_i \beta_i$, donc $\sum_{i=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j \leq \sum_{i=1}^n A'_{i,j} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i + \sum_{i=k}^n A'_{i,j} \alpha_i \beta_j \leq$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \beta_i + \sum_{i=k}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \text{ ce qui établit la récurrence.}$$

- * La matrice $A = I_n$ réalise l'égalité $\sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

On conclut finalement que : $\max_{A \in \mathcal{DS}_n} \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} \alpha_i \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

15. (a) Par définition il existe $U_1, V_1, U_2, V_2 \in \mathcal{U}_n$ tels que $A = U_1 D V_1$ et $B = U_2 T V_2$, donc $Tr(AB) = Tr(U_1 D V_1 U_2 T V_2) = Tr(V_2 U_1 D V_1 U_2 T) = Tr(UDVT)$ où $U = V_2 U_1$ et $V = V_1 U_2$.

- (b) • $Tr(AB) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (UD)_{i,j} (VT)_{j,i}$, or $(UD)_{i,j} = \sum_{k=1}^n U_{i,k} D_{k,j} = \alpha_j U_{i,j}$, et en inversant les rôles $(VT)_{j,i} = \beta_i V_{j,i}$, ce qui entraîne l'égalité demandée.

- L'inégalité évidente $|U_{i,j} V_{j,i}| \leq \frac{1}{2} (|U_{i,j}|^2 + |V_{j,i}|^2)$ entraîne que :

$$|Tr(AB)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |U_{i,j}|^2 \alpha_j \beta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |V_{j,i}|^2 \alpha_j \beta_i, \text{ or } U, V \in \mathcal{U}_n, \text{ donc les matrices } (|U_{i,j}|^2)_{i,j} \text{ et } (|V_{j,i}|^2)_{i,j} \text{ sont doublement stochastiques (d'après la question 13), ce qui entraîne d'après la ques-}$$

tion 14 : $|Tr(AB)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$. C'est l'inégalité demandée.

(c) Les matrices A, B étant dans \mathcal{H}_n^+ , donc diagonalisables dans des bases orthonormales à valeurs propres réelles positives, qu'on peut les ordonner. Notons $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ les valeurs propres de A et $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ celles de B , alors il existe $U, V \in \mathcal{U}_n$ tels que $A = UDU^*$ et $B = VTV^*$ où $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $T = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, donc on a dans les conditions de la question précédente, ce qui entraîne $|\text{Tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i)(\sum_{i=1}^n \beta_i) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

16. Soient $A, B \in \mathcal{H}_n$ de valeurs propres respectivement $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ et $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$.

• Montrons d'abord que $\max_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Tr}(AU^*BU) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

Soit $U \in \mathcal{U}_n$, A et B étant diagonalisables, U^*BU est semblable à B , donc les α_i et les β_i sont les valeurs singulières de A et de U^*BU respectivement, ce qui entraîne en utilisant la question 15, que

$$\text{Tr}(AU^*BU) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

La somme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ est atteinte, en effet, A et B sont diagonalisables dans des bases orthonormales

(d'après la question 8), d'où l'existence de $V, W \in \mathcal{U}_n$ tel que $V^*AV = D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $W^*BW = T = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, donc $\text{Tr}(A(WV^*)^*B(WV^*)) = \text{Tr}(V^*AVW^*BW) = \text{Tr}(DT) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

On conclut donc que $\max_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Tr}(AU^*BU) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

• Montrons maintenant l'égalité demandée.

La norme $\|\cdot\|$ est la norme hermitienne associée au produit scalaire $(A, B) = \text{Tr}(A^*B) = \text{Tr}(AB)$ (ce produit scalaire est à valeurs réelles, puisque les valeurs propres d'une matrice de \mathcal{U}_n sont réelles), ce qui entraîne que pour tout $U \in \mathcal{U}_n$:

$$\|A - U^*BU\|^2 = \|A\|^2 - 2(A, U^*BU) + \|U^*BU\|^2, \text{ or } \|A\|^2 = \text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(V^*D^2VV^*DV) = \text{Tr}(V^*D^2V) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \text{ de même } \|U^*BU\|^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \text{ et puisque}$$

$$(A, U^*BU) = \text{Tr}(AU^*BU) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \text{ on aura l'inégalité :}$$

$$\|A - U^*BU\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2.$$

Cette dernière somme est atteinte, en effet :

$$\|A - (WV^*)^*B(WV^*)\|^2 = \|V^*AV - W^*BW\|^2 = \|D - T\|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2.$$

$$\text{On conclut donc l'égalité : } \min_{U \in \mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}.$$
