CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; X_2010

Préliminaires

1.a) Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que : $\ker(\beta) \subset \ker(\alpha)$.
(i) Si $\alpha = 0$ alors $\alpha = 0.\beta$
(ii) Si $\alpha \neq 0$ alors $\ker(\alpha)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Alors aussi $\beta \neq 0$ et $\ker(\beta) = \ker(\alpha)$.
Soit $z \in \mathbb{R}^n \backslash \ker(\beta)$; $\mathbb{R}^n = \ker(\beta) \oplus \mathbb{R}z$. Soient $\lambda = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ et $x = y + \mu z \in \mathbb{R}^n$ avec $y \in \ker(\beta)$.
$\alpha(x) = \mu\alpha(z) = \lambda\mu\beta(z) = \lambda\beta(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$; $\alpha(x) = \lambda\beta(x)$. D'où $\alpha = \lambda\beta$.

1.b) Soient $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

On va montrer par récurrence sur r que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_r$.
Le cas $r = 1$ est déjà fait à la question précèdente. Soit $r \geq 2$.
Supposons alors que pour toutes formes linéaires $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ de $\mathbb{R}^n$, α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$, dés que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

Soient maintenant $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$.

<u>Premier cas :</u>

Si $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) = \{0\}$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha)$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$ et donc de $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

<u>Deuxième cas :</u>

Si $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \neq \{0\}$, on note α' et β'_r les restrictions respectives à $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$ de α et β_r.

α' et β'_r sont des formes linéaires sur F et $\ker(\beta'_r) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha') = \ker(\alpha) \cap \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$.
alors d'aprés 1.a), il existe un réel λ_r tel que : $\alpha' = \lambda_r \beta'_r$.
$\alpha - \lambda_r\beta_r$ est nul sur $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i)$, c'est à dire : $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r-1} \ker(\beta_i) \subset \ker(\alpha - \lambda_r\beta_r)$.
Alors d'aprés l'hypothèse de récurrence, $\alpha - \lambda_r\beta_r$ est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}$.
On déduit alors que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

Première partie

2) Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que : $\forall t \in]-1,1[$; $\|\gamma(t)\| = 1$.
$\forall t \in]-1,1[$; $< \gamma(t), \gamma(t) > = 1$.
En dérivant cette expression, on obtient : $\forall t \in]-1,1[$; $2 < \gamma(t), \gamma'(t) > = 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, orthogonal à x.
On pose : $\forall t \in]-1,1[$; $\gamma(t) = \cos(\|v\|t)x + \sin(\|v\|t)\frac{v}{\|v\|}$. γ répond bien à la question.

4) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit g sa restriction à S^{n-1}.
f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors g est continue sur le compact S^{n-1}, donc g est bornée sur S^{n-1} et y atteint ses bornes. Soit $x \in S^{n-1}$ un extremum de g.
Soit v un élèment non nul de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à x.

D'aprés la question précèdente, il existe une application $\gamma :]-1,1[\to S^{n-1}$ de classe C^1 telle que : $\gamma(0)=x$ et $\gamma'(0)=v$.
$g\circ\gamma$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et admet 0 comme extremum. Alors :
$(g\circ\gamma)'(0)=0=(f\circ\gamma)'(0)=df_x(v)$
Soit la forme linéaire $\left[\varphi : h\mapsto \; <x,h>\right]$; $\ker(\varphi)\subset\ker(df_x)$.
D'où d'aprés 1) il existe un réel λ tel que : $df_x=\lambda\varphi,$ c'est à dire : $\forall h\in\mathbb{R}^n$; $df_x(h)=\lambda<x,h>$.

5) Soit A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$, et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ l'application définie par :
$\forall x\in\mathbb{R}^n$; $f(x)=<x,Ax>$.
5.a) On sait que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, f est le produit scalaire de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Fixons $x\in\mathbb{R}^n$, et soit h quelconque dans $\mathbb{R}^n$.
$f(x+h)=f(x)+<h,Ax>+<x,Ah>+<h,Ah>=f(x)+2<Ax,h>+<h,Ah>$.
On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|\|\quad\||$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
$|<h,Ah>|\leq|\|A\||.\|h\|^2 \underset{h\to0}{=} \circ(\|h\|)$.
$[h\mapsto 2<Ax,h>]$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, c'est donc la différentielle df_x.
5.b) Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}.
D'aprés la question précèdente, il existe un réel λ tel que :
$\forall h\in\mathbb{R}^n$; $df_x(h)=\lambda<x,h>=2<Ax,h>$.
$\forall h\in\mathbb{R}^n$; $<2Ax-\lambda x,h>=0.$ $Ax=\frac{\lambda}{2}x$.

Deuxième partie

Dans cette partie on considère les fonctions suivantes : $q,f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$
définies par : $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$; $q(M)=\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2$; $f(M)=\det(M)-1$.
On note aussi g la restriction de q à $SL_n(\mathbb{R})$.
6.a) Posons ${}^tMM=(\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. $\delta_{j,j}=\sum_{1\leq i\leq n} m_{i,j}^2$ et $Tr({}^tMM)=\sum_{1\leq j\leq n}\delta_{j,j}=\sum_{1\leq j\leq n}\sum_{1\leq i\leq n} m_{i,j}^2=q(M)$.
6.b) C'est clair que $\Phi(A,B)=Tr({}^tAB)$ définit une forme bilinéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
$\Phi(A,B)=Tr({}^tAB)=Tr({}^t({}^tAB))=Tr({}^tBA)=\Phi(B,A)$.
$\Phi(A,A)=\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2\geq 0$ et $\left[\Phi(A,A)=0\Rightarrow\forall i,j\,;\,a_{i,j}=0\Rightarrow A=0\right]$
Finalement : $\Phi(A,B)=Tr({}^tAB)$ définit alors un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
6.c) On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa base canonique, alors q est une fonction polynômiale sur $M_n(\mathbb{R})$, d'où q est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.
Fixons $M\in M_n(\mathbb{R})$, et soit H quelconque dans $M_n(\mathbb{R})$.
$q(M+H)=Tr({}^t(M+H)(M+H))=q(M)+Tr({}^tMH)+Tr({}^tHM)+Tr({}^tHH)$.
$q(M+H)=q(M)+2Tr({}^tMH)+Tr({}^tHH)$.
On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne associée au produit scalaire de la question précèdente. $|Tr({}^tHH)|=\|H\|^2\underset{H\to0}{=}\circ(\|H\|)$.
$[H\mapsto 2Tr({}^tMH)]$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est donc la différentielle dq_M.

7) Soient $M\in M_n(\mathbb{R})$ et $t\in\mathbb{R}$. Posons : $M'=M+tE_{i,j}=(m'_{h,k})_{1\leq h,k\leq n}$.
On pose : $\widetilde{M}=(c_{h,k})_{1\leq h,k\leq n}$. Développons le déterminant de M' suivant la $i^{ème}$ ligne :
$\det(M')=\sum_{1\leq k\leq n} m'_{i,k}c_{ik}=\sum_{1\leq k\leq n} m_{i,k}c_{ik}+tc_{i,j}=\det(M)+tc_{i,j}$.
$\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(M)=c_{i,j}$. et $\forall M,H\in M_n(\mathbb{R})$; $df_M(H)=\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(M)h_{i,j}=\sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j}h_{i,j}=Tr({}^t\widetilde{M}H)$.
8) $SL_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, car f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

g est positive donc minorée sur $SL_n(\mathbb{R})$, soit $\mu = \inf_{M \in SL_n(\mathbb{R})} g(M)$.
Il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $SL_n(\mathbb{R})$, telle que : $\lim_{k\to\infty} g(M_k) = \mu$.
$g(M_k) = \|M_k\|^2$, alors la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, et on est en dimension finie, alors d'aprés le théorème de Bolzano-Weirstrass $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite $(M_{n_q})_{q\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément M de $SL_n(\mathbb{R}),$ puisque $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.
M est alors un minimum de g. (car g est continue $\mu = \lim_{q\to\infty} g(M_{n_q}) = g(M)$)

9) Soit $M \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$.
M est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que : $M = PTP^{-1}$. $\forall h \in \mathbb{N}$; $M^h = PT^hP^{-1}$ et $\sum_{0\le k\le h} \frac{M^k}{k!} = P\left(\sum_{0\le k\le h} \frac{T^k}{k!}\right)P^{-1}$.
L'application $[X \mapsto PXP^{-1}]$ est linéaire en dimension finie, donc continue.
On fait tendre h vers l'infini dans l'expression précèdente, on obtient alors :
$\exp(M) = P(\exp(T))P^{-1}.$ Rappelons que deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. $Tr(M) = Tr(T)$ et $\det(\exp(M)) = \det(\exp(T))$.
Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les élèments diagonaux de T, alors $\sum_{0\le k\le h} \frac{T^k}{k!}$ est triangulaire supérieure et ses élèments diagonaux sont : $\sum_{0\le k\le h} \frac{\lambda_1^k}{k!}$;...; $\sum_{0\le k\le h} \frac{\lambda_n^k}{k!}$. On fait tendre h vers l'infini.
Alors $\exp(T)$ est triangulaire supérieure et ses élèments diagonaux sont : $\exp(\lambda_1),\ldots,\exp(\lambda_n)$.
$\det(\exp(T)) = \prod_{1\le i\le n} \exp(\lambda_i) = \exp(\sum_{1\le i\le n} \lambda_i) = \exp(Tr(T)).$ ou encore $\det(\exp(M)) = \exp(Tr(M))$.
10) Soient $M \in SL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ tels que : $df_M(H) = 0$.
Soit $\gamma :]-1,1[\to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par : $\forall t \in]-1,1[\;;\; \gamma(t) = M\exp(tM^{-1}H)$.
$\det(\gamma(t)) = \det(M)\exp(Tr(tM^{-1}H))$ et $Tr(tM^{-1}H) = Tr(t\widetilde{M}H) = df_M(tH) = tdf_M(H) = 0$.
$\det(\gamma(t)) = \det(M) = 1.$ γ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$.
D'aprés le préambule de ce problème : $\left[t \overset{\psi}{\mapsto} \exp(tM^{-1}H)\right]$ est C^1 sur $]-1,1[$.
L'application $[X \mapsto MX]$ est linéaire donc de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$.
γ est composée de deux applications de classe C^1, alors γ est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
$\gamma(0) = M$ et d'aprés le préambule : $\gamma'(0) = M\psi'(0) = MM^{-1}H = H$.

11) Soient $M \in SL_n(\mathbb{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et H dans $M_n(\mathbb{R})$ tels que : $df_M(H) = 0$.
11.a) Soit γ de la question précèdente.
$q\circ\gamma$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et admet 0 comme minimum.
alors $(q\circ\gamma)'(0) = 0 = dq_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dq_M(H)$.
11.b) D'aprés la question précèdente :
$\ker(df_M) \subset \ker(dq_M)$, alors d'aprés 1) il existe un réel λ tel que $dq_M = \lambda df_M$.
$\forall H \in M_n(\mathbb{R})$; $df_M(H) = Tr({}^t\widetilde{M}H)$ et $dq_M(H) = 2Tr({}^tMH)$.
$\forall H \in M_n(\mathbb{R})$; $Tr((2\,{}^tM - \lambda{}^t\widetilde{M})H) = 0$.
$2M - \lambda\widetilde{M}$ est orthogonal à $M_n(\mathbb{R}),$ alors $M = \frac{\lambda}{2}\widetilde{M} = \frac{\lambda}{2}{}^tM^{-1}$.
$M.{}^tM = \frac{\lambda}{2}I_n$ et $\det(M.{}^tM) = 1 = (\frac{\lambda}{2})^n \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \pm 1$.
$Tr(M.{}^tM) = q(M) = n\frac{\lambda}{2} \ge 0$ alors $\frac{\lambda}{2} = 1$ et $M.{}^tM = I_n$. M est alors une matrice orthogonale.
$g(M) = q(M) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{i,j}^2$ est la somme des carrées des normes des colonnes de M.
Alors $g(M) = n$.

Troisième Partie

12.a) Soient $C_1, C_2 : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ deux applications de classe C^1. On pose : $B(t) = C_1(t)C_2(t)$.
L'application $C_0 : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ défine par : $C_0(t) = (C_1(t), C_2(t))$ est de classe C^1.
L'application : $\Pi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par : $\Pi(A,B) = AB$ est bilinéaire en dimention finie, donc de classe C^1 de différentielle définie par : $d\Pi_{(A,B)}(H) = HB + AH$.
$B = \Pi \circ C_0$ est alors de classe C^1 et pour tout réel t :
$B'(t) = d\Pi_{C_0(t)}(C_0'(t)) \ = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t)$.
12.b) Soit $C : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1.
On suppose que C est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\forall t \in \mathbb{R}$; $D(t) = C(t)^{-1}$.
Rappelons que l'application : $X \overset{i}{\mapsto} X^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.
Aussi, l'application $(X,Y,Z) \overset{\theta}{\mapsto} XYZ$ est trilinéaire en dimension finie, donc continue sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.
Fixons un réel t, pour tout réel non nul h, $\frac{D(t+h)-D(t)}{h} = \frac{C(t+h)^{-1}-C(t)^{-1}}{h} = C(t+h)^{-1}\frac{C(t)-C(t+h)}{h}C(t)^{-1}$
En utilisant la contnuité de l'application i et la dérivabilité de l'application C, on déduit :
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{D(t+h)-D(t)}{h} = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$.
D est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$; $D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$.
En utilisant la continuité de $i \circ C$, C', et de θ, on déduit celle de D'.
Finalement : D est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$; $D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$.

13) Soient $C_1, C_2 : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ des applications de classe C^2 telles que : $C_1(0) = C_2(0) = I_n$.
13.a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R} : A(t) = \exp(t(\alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)))$.
A est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$.
13.b) L'application $\left[t \overset{\delta}{\mapsto} \det(C_1(t)C_2(t))\right]$ est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
$\delta(0) = 1 > 0$, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :
$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$; $\delta(t) = \det(C_1(t))\det(C_2(t)) \ > 0$.
D'où, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$; $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont inversibles.
13.c) Pour tous s, t dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$, posons : $L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$.
D'aprés les questions 12.a) et 12.b) L est de classe C^1 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ et on a :
$\frac{\partial L}{\partial t}(s,t) = C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}$.
$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(s,t) = C_1'(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$
$-C_1'(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1} + C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}$.
$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0) - C_1'(0)C_2'(0) + C_1'(0)C_2'(0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0)$.

14) Soit $\Phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL(M_n(\mathbb{R}))$ l'application définie par :
$\forall X \in GL_n(\mathbb{R}) \ ; \ \forall Y \in M_n(\mathbb{R}) \ ; \ \Phi(X)(Y) = XYX^{-1}$.
14.a) $\forall X, X' \in GL_n(\mathbb{R}) \ ; \ \forall Y \in M_n(\mathbb{R}) \ ; \ \Phi(XX')(Y) = XX'YX'^{-1}X^{-1} = \Phi(X) \circ \Phi(X')(Y)$.
$\forall X, X' \in GL_n(\mathbb{R}) \ ; \ \Phi(XX') = \Phi(X) \circ \Phi(X')$ alors Φ est un morphisme de groupes.
$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} {}^t\widetilde{X}$, ses coefficients sont des fractions rationnelles aux coefficients de X.
Les coefficients de XYX^{-1} sont alors des fractions rationnelles aux coefficients de X et de Y.
On munit alors $M_n(\mathbb{R})$ de sa base canonique et $\pounds(M_n(\mathbb{R}))$ de sa base canonique correspondante à la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
Les coordonnées de Φ dans cette base sont des fractions rationnelles aux coefficients de X.
D'où Φ est de classe C^1.
14.b) Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$; $\|H\|$ suffisament petit et $Y \in M_n(\mathbb{R})$:
$\Phi(I_n + H)(Y) = (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} = \Phi(I_n)(Y) + (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} - Y$
$(\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n))(Y) = (I_n + H)Y(I_n + H)^{-1} - Y = ((I_n + H)Y - Y(I_n + H))(I_n + H)^{-1}$
$(\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n))(Y) = (HY - YH) + (HY - YH)((I_n + H)^{-1} - I_n)$.

L'application $[A \mapsto A^{-1}]$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{H \to 0} ((I_n + H)^{-1} - I_n) = 0$.
Notons Ψ_H l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall Y \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ \Psi_H(Y) = HY - YH$.
Ψ est linéaitre de $M_n(\mathbb{R})$ vers $\pounds(M_n(\mathbb{R}))$
On muni $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et on muni $\pounds(M_n(\mathbb{R}))$ de la norme subordonnée à cette norme.
$\|\Psi_H(Y)\| = \|HY - YH\| \leq 2\|H\|\|Y\| \Rightarrow \|\Psi_H\| \leq 2\|H\|$.
$\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = \Psi_H + \circ(\|H\|)$.
Finalement : $\Psi_H = d\Phi_{I_n}(H)$, c'est à dire : $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX$.

Dans la suite du problème on pose : $\varphi(X) = d\Phi_{I_n}(X)$.

15) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL(V)$ un morphisme de groupes de classe C^1.
15.a) $f(X + H) - f(X) = df_X(H) + \|H\|v(H)$ avec $\lim\limits_{H \to 0} v(H) = 0$.
$f(X)(f(I_n + X^{-1}H) - f(I_n)) = df_X(H) + \|H\|v(H) = f(X)(df_{I_n}(X^{-1}H) + \|X^{-1}H\|w(H))$
avec $\lim\limits_{H \to 0} w(H) = 0$.
On a aussi : $\|X^{-1}H\| \leq \|X^{-1}\|\|H\|$ et l'application $[H \mapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)]$ est linéaire.
Alors : $f(X + H) - f(X) = df_X(H) + \circ(\|H\|) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H) + \circ(\|H\|)$.
D'où par unicité de la différentielle de f en X on a :
$\forall X \in GL_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall H \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ df_X(H) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)$.
On refait le même travail, mais cette fois ci en écrivant :
$f(X + H) - f(X) = (f(I_n + HX^{-1}) - f(I_n))f(X)$
On ontient alors : $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall H \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ df_X(H) = df_{I_n}(HX^{-1})f(X)$.
15.b) On fixe $X \in M_n(\mathbb{R})$ et on considère les applications $a, b : \mathbb{R} \to GL(V)$ définies pour tout réel t par : $a(t) = f(\exp(tX))$ et $b(t) = \exp(tdf_{I_n}(X))$
a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $a(0) = b(0) = I_n$.
$\forall t \in \mathbb{R}$; $b'(t) = df_{I_n}(X)\exp(tdf_{I_n}(X))$ et $a'(t) = df_{\exp(tX)}(X\exp(tX)) = df_{I_n}(X)f(\exp(tX))$.
Alors a et b sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = df_{I_n}(X)y$.
Alors $a = b$ d'aprés le théorème d'unicité de Cauchy.
15.c) $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \simeq GL(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes.
On va appliquer la question précèdente pour $f = \det$. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$.
$\forall t \in \mathbb{R}$; $\det(\exp(tX)) = \exp(tdf_{I_n}(X))$.
D'aprés 7) $df_{I_n}(X) = Tr({}^t\widetilde{I_n}X)$ or $\det(I_n) = 1$ et $I_n^{-1} = I_n$ alors $\widetilde{I_n} = I_n$ et $df_{I_n}(X) = Tr(X)$.
Pour $t = 1$, On retrouve alors le résultat de la question 9) $\det(\exp(X)) = \exp(Tr(X))$.
15.d) On utilise le résultat de la question 15.b) pour $V = M_n(\mathbb{R})$ et $f = \Phi$.
$\forall t \in \mathbb{R}\ ;\ \Phi(\exp(tX)) = \exp(t\varphi(X))$, pour $t = 1$ on trouve le résultat cherché.

16) On fixe $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on pose :
$u(s,t) = \exp(s(X + tY))$ et $A(s,t) = \exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)$.
16.a) $\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = d\exp_{s(X+tY)}(sY) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(1,0) = d\exp_X(Y)$ et $A(1,0) = \exp(-X)d\exp_X(Y)$.
16.b) Commençons par montrer que u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
$$u(s,t) = \exp(s(X + tY)) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h(X+tY)^h}{h!}.$$
Cette série est somme d'applications de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle ainsi que les séries obtenues à partir des dérivations $\frac{\partial}{\partial t}$; $\frac{\partial}{\partial s}$; $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}$; $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$; $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$; convergent tous normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.
On déduit alors que $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial s}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ existent et sont continue sur $\mathbb{R}^2$.

L'application u est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors d'aprés le théorème de Schwarz

$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}((X+tY)\exp(s(X+tY))$

$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s,t) = Y\exp(s(X+tY)) + (X+tY)d\exp_{s(X+tY)}(sY)$

$\frac{\partial A}{\partial s}(s,t) = -X\exp(-sX)d\exp_{s(X+tY)}(sY) + \exp(-sX)Y\exp(s(X+tY)) + \exp(-sX)(X+tY)d\exp_{s(X+tY)}(sY)$

$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = -X\exp(-sX)d\exp_{sX}(sY) + \exp(-sX)Y\exp(sX) + \exp(-sX)Xd\exp_{sX}(sY)$

$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \exp(-sX)Y\exp(sX)$ (car $X\exp(-sX) = \exp(-sX)X$ (écrire sous forme de série))

$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \Phi(\exp(-sX))(Y) = \exp(-s\varphi(X))(Y)$ (d'aprés 15.b))

16.c) $\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \exp(-s\varphi(X))(Y) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!}(Y)$.

En effet : $\left\| \exp(-s\varphi(X))(Y) - \sum_{h=0}^{k} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!}(Y) \right\| = \left\| \left(\sum_{h=k+1}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} \right)(Y) \right\|$

$\left\| \exp(-s\varphi(X))(Y) - \sum_{h=0}^{k} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!}(Y) \right\| \leq \left\| \sum_{h=k+1}^{\infty} (-1)^h s^h \frac{\varphi(X)^h}{h!} \right\| \|Y\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

De plus cette série est une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, qui converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$, on peut alors intégrer terme à terme.

Il existe une constante Z de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall s \in \mathbb{R}\ ;\ A(s,0) = Z + \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^{h+1} \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!}(Y)$.

$A(0,0) = Z = \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = 0.$ D'où $\forall s \in \mathbb{R}\ ;\ A(s,0) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h s^{h+1} \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!}(Y)$.

16.d) D'aprés 16.a) $d\exp_X(Y) = \exp(X)A(1,0) = \exp(X) \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\varphi(X)^h}{(h+1)!}(Y)$.

N.B :

$\varphi(X)(Y) = XY - YX\ ;\ \varphi(X)^2(Y) = X^2Y - 2XYX + YX^2\ ;\ \varphi(X)^3(Y) = X^3Y - 3X^2YX + 3XYX^2 - YX^3$.

Par récurrence sur $h \in \mathbb{N}^*$, on montre facilement que :

$\forall h \in \mathbb{N}\ ;\ \varphi(X)^h(Y) = \sum_{0\le j\le h} (-1)^j C_h^j X^{h-j}YX^j$