CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATH 1 DE L'X 2009

Première partie

(1) Soit $g(t) = f(\mathrm{e}^t x)$ alors $g'(t) = x\,\mathrm{e}^t f'(\mathrm{e}^t x)$ d'où $g'(0) = xf'(x) = (Af)(x)$.
(2) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f(x) = x^p$ alors, par une récurrence immédiate, $(A^n f)(x) = p^n x^p$ d'où

$$\frac{t^n}{n!}(A^n f)(x) = \frac{(pt)^n}{n!}x^p$$

qui est le terme général d'une série exponentielle convergente. On a alors

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x) = \mathrm{e}^{pt}\, x^p = (\mathrm{e}^t\, x)^p = (\Phi_t f)(x).$$

Par linéarité, cette propriété s'étend aux polynômes.
(3) Immédiat : $(D^n X)(f)(x) = (xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x) = (XD^n+nD^{n-1})(f)(x)$.
(4) Pour $n = 1$ on sait que $A = XD$, on procède alors par récurrence sur n avec $\mu_{1,1} = 1$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n,

$$\begin{aligned}
(A^{n+1}f)(x) &= A\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} X^k D^k\right)(f)(x) \\
&= x\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x)\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} k x^k f^{(k)}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} x^{k+1} f^{(k+1)}(x)}_{=\sum_{k=2}^{n+1} \mu_{n,k-1} x^k f^{(k)}(x)}.
\end{aligned}$$

On obtient la formule à l'ordre $n+1$ en posant $\mu_{n+1,1} = \mu_{n,1}$, $\mu_{n+1,n+1} = \mu_{n,n}$ et $\mu_{n+1,k} = k\mu_{n,k} + \mu_{n,k-1}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.
On déduit de ceci les relations $\mu_{n,1} = 1$ et $\mu_{n,n} = 1$.
(5) On applique le résultat du **2** avec la formule du **4** :

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{e}^t\, x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x)\right) \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x)\right)
\end{aligned}$$

et il suffit de permuter les sommes.
Compte tenu là aussi de la linéarité de la formule, il suffit de prouver le résultat pour $f(x) = x^p$.

Soit $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{t^n}{n!}\mu_{n,k}\frac{p!}{(p-k)!}x^p & \text{si } k \leqslant \min(n,p) \\ 0 & \text{si } k > \min(n,p) \end{cases}$. $u_{n,k} \geqslant 0$, $\sum\limits_k u_{n,k}$ et $\sum\limits_n \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}$ convergent aussi donc on peut appliquer le théorème d'interversion des sommations :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^t x) &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}\right) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n\geqslant k}^{+\infty} u_{n,k}\right) \\ &= f(x) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{t^n}{n!}\mu_{n,k}\right) x^k f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

(6) C'est du cours !

(7) (a) On a $\lim\limits_{t\to 0}|(\mathrm{e}^t-1)x| = 0$ d'où l'existence d'un réel γ_x tel que

$$|t| < \gamma_x \Rightarrow |(\mathrm{e}^t-1)x| < R - |x|.$$

On peut aussi utiliser l'inégalité $|\mathrm{e}^t-1| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}-1$ obtenue par exemple en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle puis raisonner par équivalences en supposant $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} |(\mathrm{e}^{|t|}-1)x| < R - |x| &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{|t|}-1 < \frac{R-|x|}{|x|} = \frac{R}{|x|} - 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{|t|} < \frac{R}{|x|} \Leftrightarrow |t| < \ln\frac{R}{|x|} = \gamma_x \end{aligned}$$

avec $\gamma_x > 0$ car $|x| < R$ (et γ_0 peut prendre n'importe quelle valeur positive). Ceci fournit explicitement une valeur de γ_x.

(b) On applique la propriété rappelée avec $h = \mathrm{e}^t x - x = (\mathrm{e}^t-1)x$, $|h| < R - |x|$:

$$f(x+h) = f(\mathrm{e}^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}^t-1)^k}{k!}x^k f^{(k)}(x).$$

Or e^t-1 est D.S.E., de rayon infini, il en est de même pour $\dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^k}{k!}$:

$$\frac{(\mathrm{e}^t-1)^k}{k!} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}$$

et on remarque que $\lambda_{n,k} = 0$ si $n < k$ (on peut mettre t^k en facteur) et les $\lambda_{n,k}$ ne dépendent pas de f.

(c) Pour $f(x) = x^p$ on obtient 2 développements de $f(\mathrm{e}^t x)$:

$$f(x) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{t^n}{n!}\mu_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x)$$

avec $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} & \text{si } k \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En faisant la différence et en simplifiant par $p!x^p$ que l'on peut supposer non nul, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{p}(\mu_{n,k}-\lambda_{n,k})\frac{1}{(p-k)!}\right) = 0$$

(on a rajouté les termes nuls pour $n < k$). Compte tenu de l'unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times [\![1,p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} (\mu_{n,k} - \lambda_{n,k}) \frac{1}{(p-k)!} = 0. \tag{R}$$

- Si $p = 1$ alors $\mu_{n,1} = \lambda_{n,1}$ pour tout n.
- Par récurrence sur p, supposons prouvé les égalités $\mu_{n,p} = \lambda_{n,p}$ pour tout n. On écrit la relation (R) pour $p+1$, les p premiers termes sont nuls vu l'hypothèse de récurrence, il ne reste plus que $(\mu_{n,p+1} - \lambda_{n,p+1}) \dfrac{1}{(p+1-k)!} = 0$ donc $\lambda_{n,p+1} = \mu_{n,p+1}$.

(d) On utilise la relation de récurrence du **4** : $\lambda_{n+1,k} = k\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}$ et on fait une récurrence sur n :

- pour $n = 1$, $\lambda_{1,1} = 1 \leqslant 2$ et $\lambda_{1,k} = 0$ pour $k > 1$.
- On suppose qu'à l'ordre n, $\lambda_{n,k} \leqslant \dfrac{2^n n!}{(k-1)!}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
  - On a $\lambda_{n+1,1} = 1 \leqslant 2^{n+1}(n+1)!$ et $\lambda_{n+1,n+1} = 1 \leqslant 2^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{n!}$ (majorations larges !).
  - Si $k \in [\![2,n]\!]$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1,k} &\leqslant k\frac{2^n n!}{(k-1)!} + \frac{2^n n!}{(k-2)!} = \frac{2^n}{(k-1)!}(2k-1) \\
&\leqslant \frac{2^n n!}{(k-1)!} \times 2n \text{ c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

(e) On prend $\eta = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = \dfrac{R}{2}$ alors

$$\begin{aligned}
|Z_{n,k}| &\leqslant \frac{|t|^n}{n!} \times \frac{2^n n!}{(k-1)!} |x|^k |f^{(k)}(x)| \\
&\leqslant (2|t|)^n \times \frac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}.
\end{aligned}$$

Or $\sum_n |Z_{n,k}|$ converge, de somme $\dfrac{1}{1-2|t|} \times \dfrac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$ et on sait (question **6**) que $\sum \dfrac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$ et $\sum k \dfrac{x^k f^{(k)}(a)}{k!}$ ont même rayon de convergence (en l'occurrence $R - |a|$). Avec $a = x$ on en déduit que $\sum \dfrac{|x|^k |f^{(k)}(x)|}{(k-1)!}$ converge pour $|x| < \dfrac{R}{2}$.

(f) Si $|t| < 1/2$ alors $|\mathrm{e}^t - 1| < 1/2$ et $|(\mathrm{e}^t - 1)x| < \dfrac{R}{2} < R - |x|$, on peut alors utiliser le résultat de la question **7.b** :
En appliquant le théorème d'interversion des sommations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\
&= f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k} \right) \\
&= f(\mathrm{e}^t x) = (\Phi_t f)(x).
\end{aligned}$$

Deuxième partie

(8) Soit $M_k(f) = \sup_{\mathbb{R}} |x^k f(x)|$ alors au voisinage de l'infini, $|x^k f(x)| \leqslant \dfrac{M_{k+2}}{x^2}$ par conséquent $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est localement intégrable car continue).

(9) (a) Là encore, le problème se pose au voisinage de $+\infty$:

$$|y^2 g(y)| \leqslant M_1(g)$$
$$|f(x-y)| \leqslant M_0(f)$$

On a ainsi, au voisinage de l'infini, $|f(x-y)g(y)| \leqslant \dfrac{M_1(g)M_0(f)}{y^2}$ et, par domination, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrons que $f * g$ est continue :
- $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- $x \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x-y)g(y)| \leqslant M_0(f)|g(y)| \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

donc, en vertu du théorème de continuité sous l'intégrale, $f * g$ est continue.
Soient f et g dans $\mathcal{F}$ alors

$$\begin{aligned}
\left| x^k \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (x-y+y)^k f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (x-y)^{k-p} g(x-y) \times y^p f(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} M_{k-p}(g) \int_{\mathbb{R}} y^p f(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

car $y \mapsto y^p f(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. $x^k f * g(x)$ est bornée pour tout k et $f * g$ est continue donc $f * g \in \mathcal{F}$.
On a, en appliquant Fubini

$$\begin{aligned}
m_k(f * g) &= \int_{\mathbb{R}} x^k \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \times (x-y)^{k-p} g(x-y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} y^p f(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} (x-y)^{k-p} g(x-y)\,\mathrm{d}x \right)}_{=m_{k-p}(g)} \mathrm{d}y \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} m_p(f) m_{k-p}(g).
\end{aligned}$$

On a pu appliquer Fubini ici car, en posant $M'_p(f) = M_{p+2}(f) + M_p(f)$, on a
- $y \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$ est borné par $M_{k-p}(g)|y^p f(y)|$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$,
- $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable car elle est majorée par $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{M'_p(f)}{y^2+1} \times \frac{M'_{k-p}(g)}{(x-y)^2+1}\,\mathrm{d}y = M'_p(f).M'_{k-p}(g) \frac{2\pi}{x^2+4}$ qui est intégrable (merci MAPLE).

Il nous faut aussi l'intégration en intervertissant les variables :

- $x \mapsto y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)$ est intégrable car on peut la majorer par $M_p(f) \times |x-y|^{k-p} |g(x-y)|$ qui est intégrable car majorée par $\dfrac{M'_{k-p}(g)}{(y-x)^2+1}$,
- $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} y^p f(y)(x-y)^{k-p} g(x-y)\,\mathrm{d}x = y^p f(y) \int_{\mathbb{R}} u^{k-p} g(u)\,\mathrm{d}u$ qui est aussi intégrable.

OUF !

(10)
- On sait que $m_0(f_1 * f_2) = m_0(f_1).m_0(f_2) = 1$ (formule du **9.b**) et par une récurrence immédiate, $m_0(f_1 * \cdots * f_n) = 1$.
- Avec la même formule, $m_1(f_1 * f_2) = m_1(f_1).m_0(f_2) + m_0(f_1).m_1(f_2) = 0$ et, par récurrence et associativité de $*$, $m_1(f_1 * \cdots * f_n) = 0$ (en fait $\mathcal{F}_0$ est stable par $*$).
- $m_2(f_1 * f_2) = m_0(f_1)m_2(f_2) + 2m_1(f_1)m_1(f_2) + m_2(f_1)m_0(f_2) = m_2(f_1) + m_2(f_2)$. Par récurrence, on suppose que $m_2(f_1 * \cdots * f_n) = m_2(f_1) + \cdots + m_2(f_n)$ alors

$$\begin{aligned} m_2[(f_1 * \cdots * f_n) * f_{n+1}] &= m_0(f_1 * \cdots * f_n)m_2(f_{n+1}) + 2m_1(f_1 * \cdots * f_n)m_1(f_{n+1}) \\ &\qquad + m_2(f_1 * \cdots * f_n)m_0(f_{n+1}) \\ &= m_2(f_{n+1}) + m_2(f_1) + \cdots + m_2(f_n) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(11) Immédiat : $m_k(T_a(f)) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^k f(ax)\,\mathrm{d}(ax) = \frac{1}{a^k} m_k(f)$.

(12) (a) On a $m_2(T_n F_n) = \dfrac{1}{n^2} m_2(F_n) = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_2(f_i) \leqslant \frac{C}{n} \to 0$ puis

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2} m_2(T_n F_n) \to 0. \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.

C'est exactement pareil avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Supposons donc dans un premier temps que $h(0) = 0$.

- Choisissons α pour que $|h(x)| \leqslant \varepsilon/2$ dès que $|x| \leqslant \alpha$,
- $N \in \mathbb{N}$ pour que $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \times \int_{|x| \geqslant \alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon/2$ dès que $n \geqslant N$.

Alors, pour tout $n \geqslant N$, en remarquant que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x = 1$ et que $T_n F_n(x) \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \left| \int_{|x| \leqslant \alpha} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{|x| \geqslant \alpha} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x| \leqslant \alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x + \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \int_{|x| \geqslant \alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Si $h(0) \neq 0$, on remplace h par $h_0(x) = h(x) - h(0)$ et, par linéarité de l'intégrale, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)(T_nF_n)(x)\,\mathrm{d}x = h(0)$.

(13) (a) À l'aide de Cauchy-Schwarz :

$$m_2(f)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} \leqslant m_4(f).$$

(b) Procédons par récurrence sur n :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * f_2) &= \sum_{p=0}^{4} \binom{4}{p} m_p(f_1) m_{4-p}(f_2) \\ &= \underbrace{m_4(f_1)m_0(f_2)}_{=m_4(f_1)} + \underbrace{m_0(f_1)m_4(f_2)}_{=m_4(f_2)} + 4\underbrace{m_3(f_1)m_1(f_2) + m_1(f_1)m_3(f_2)}_{=0} + 6m_2(f_1)m_2(f_2) \\ &= m_4(f_1) + m_4(f_2) + 6m_2(f_1)m_2(f_2) \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie à l'ordre 2.
On suppose que cette relation est vérifiée à l'ordre n :

$$\begin{aligned} m_4(f_1 * \cdots * f_{n+1}) &= m_4[(f_1 * \cdots * f_n) * f_{n+1}] \\ &= m_4(f_1 * \cdots * f_n) + 6m_2(f_1 * \cdots * f_n)m_2(f_{n+1}) + m_4(f_{n+1}) \end{aligned}$$

car $\mathcal{F}_0$ est stable par $*$ et qu'on a la propriété à l'ordre 2

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + m_4(f_{n+1}) + 6 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_2(f_i)m_2(f_j) \\ &\qquad + 6(m_2(f_1) + \cdots + m_2(f_n)) \times m_2(f_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) Comme $m_2(f_i) \leqslant C$ et que la somme $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_2(f_i)m_2(f_j)$ comporte $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes alors

$$m_4(F_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + 6C^2 \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + 3C^2 n^2$$

puis on procède comme au **12.a** :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} T_nF_n(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 (T_nF_n)(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^4} m_4(T_nF_n) = \frac{1}{\alpha^4}\frac{1}{n^4} m_4(F_n). \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \int_{\alpha}^{+\infty} (T_nF_n)(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, par exemple, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_4(f_i) = O(n^2)\ldots$