CORRIGE

Première partie

1. Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on a $\left|e^{-|n|t}e^{inx}\right| = e^{-|n|t} = \left(e^{-t}\right)^{|n|}$. Par conséquent,

   - si $t \leqslant 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|e^{-|n|t}e^{inx}\right| \geqslant 1 \Rightarrow e^{-|n|t}e^{inx} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ diverge grossièrement ce qui entraine la divergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}$
   - si $t > 0$ alors $e^{-t} \in]0,1[$ donc les séries
   $$\sum_{n\geqslant 0}\left(e^{-t}\right)^{|n|} = \sum_{n\geqslant 0}(e^{-t})^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant -1}\left(e^{-t}\right)^{|n|} = \sum_{n\leqslant -1}\left(e^{-t}\right)^{-n} = \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-t}\right)^n$$
   sont convergentes. Par conséquent, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1} e^{-|n|t}e^{inx}$ convergent absolument donc elles sont convergentes ce qui entraine la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}$

2. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\overline{P(x,t)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{-inx} \underset{m=-n}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-|-m|t}e^{imx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-|m|t}e^{imx} = P(x,t)$$
donc $P(x,t)$ est bien un nombre réel. Fixons $t > 0$, on a
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} P(x,t)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t}e^{inx}\right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}e^{inx}\right)\right]dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t}e^{inx}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}e^{inx}dx\end{aligned}$$
Puisque
$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad \left|e^{-|n|t}e^{inx}\right| = e^{-|n|t} = \begin{cases} \left(e^{-t}\right)^n & \text{si } n \geqslant 0 \\ \left(e^{-t}\right)^{-n} & \text{si } n \leqslant -1\end{cases}$$
les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1} e^{-|n|t}e^{inx}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi,\pi]$ et comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \mapsto e^{-|n|t}e^{inx}$ est continue sur $[-\pi,\pi]$, on peut permuter les symboles d'intégration et de sommation, ce qui nous donne
$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x,t)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx$$
Etant donné que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$ si $n = 0$ et
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{in} = \frac{2\sin(n\pi)}{n} = 0 \text{ si } n \neq 0,$$
on en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} P(x,t)dx = e^{-|0|t}2\pi = 2\pi$

3. (a) Etablissons auparavant un résultat que nous allons utiliser à plusieurs reprises. Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}^{b} |n|^b e^{-|n|a}$ est convergente. En effet, d'après les croissances comparées, on a $|n|^b e^{-|n|a} \underset{|n|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (d'après

les croissances comparées) et les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}\dfrac{1}{n^2}$ sont convergentes (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}^{b} |n|^b e^{-|n|a}$ converge.

En particulier, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$ converge absolument quel que soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ (donc aussi les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$) et $(t,x)\in\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ puisque

$$\left|(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}\right| = |n|^{p+q} e^{-|n|t}.$$

Etablissons le résultat principal par récurrence sur $p+q$ en posant
$(\mathcal{H}_n)$: " P est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ et pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p+q=n$,
$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R},\quad \dfrac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}(x,t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{-inx}$"

Initialisation $n=0$: Soit $a\in\mathbb{R}_+^\times$,

$$\forall (t,x)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{Z},\quad \left|e^{-|n|t}e^{inx}\right| = e^{-|n|t}\leqslant e^{-|n|a}$$

La suite $\left(e^{-|n|a}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est indépendante de (t,x), les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{-|n|a}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}e^{-|n|a}$ sont convergentes donc on a établi la convergence normale sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}e^{-|n|t}e^{inx}$. En outre, quel que soit $n\in\mathbb{Z}$, les fonctions $(t,x)\mapsto e^{-|n|t}e^{inx}$ sont continues sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ donc les fonctions

$$(t,x)\mapsto\sum_{n\geqslant 0}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}\quad\text{et}\quad (t,x)\mapsto\sum_{n\leqslant -1}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$$

sont continues sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction P est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ quel que soit $a>0$ donc elle est continue sur $\bigcup\limits_{a>0}[a,+\infty[\times\mathbb{R}=\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. La fonction P est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ et pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ avec $p+q=n$, on a

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R},\quad \frac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$$

Montrons que $\dfrac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ et que $\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}\right)(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^{p+1}(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}\right)(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^{p}(in)^{q+1} e^{-|n|t}e^{inx}\end{aligned}$$

ce qui démontrera $(\mathcal{H}_{n+1})$. Fixons $a\in\mathbb{R}_+^\times$.

- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, la fonction $(t,x)\mapsto |n|^p(-in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$.
- Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}|n|^p(-in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}|n|^p(-in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$ sont simplement convergentes sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$.
- Pour tout $(t,x)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\left|(-|n|)^{p+1}(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}\right| &= |n|^{p+q+1}e^{-|n|t}\leqslant |n|^{p+q+1}e^{-|n|a}\\ \left|(-|n|)^{p}(in)^{q+1} e^{-|n|t}e^{inx}\right| &= |n|^{p+q+1}e^{-|n|t}\leqslant |n|^{p+q+1}e^{-|n|a}\end{aligned}$$

La suite $\left(|n|^{p+q+1}e^{-|n|a}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est indépendante de (t,x), les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}|n|^{p+q+1}e^{-|n|a}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1}|n|^{p+q+1}e^{-|n|a}$

sont convergentes donc les séries

$$\sum_{n\geqslant 0}(-|n|)^{p+1}(in)^q e^{-|n|t}e^{inx},\quad \sum_{n\leqslant -1}(-|n|)^{p+1}(in)^q e^{-|n|t}e^{inx},$$
$$\sum_{n\geqslant 0}(-|n|)^{p}(in)^{q+1} e^{-|n|t}e^{inx},\quad \sum_{n\leqslant -1}(-|n|)^{p}(in)^{q+1} e^{-|n|t}e^{inx}$$

convergent normalement sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des sommes de séries montre que la fonction $\dfrac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}$ est C^1 respectivement par rapport à t sur $[a,+\infty[$ et x sur $\mathbb{R}$ donc $\dfrac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\forall (t,x)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}\right)(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^{p+1}(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}\right)(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-|n|)^{p}(in)^{q+1} e^{-|n|t}e^{inx}\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\dfrac{\partial^{p+q}P}{\partial t^p\partial x^q}$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ quel que soit $a>0$ donc elle est de classe C^1 sur $\bigcup_{a>0}[a,+\infty[\times\mathbb{R}=\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{R}$ et les formules de dérivation attendues sont vérifiées, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) D'après la question précédente, on a $\forall (t,x)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2 e^{-|n|t}e^{inx}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(in)^2 e^{-|n|t}e^{inx}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2 e^{-|n|t}e^{inx}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}-n^2 e^{-|n|t}e^{inx}=0\end{aligned}$$

4. La fonction P_t est C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique (le lecteur le vérifiera immédiatement) donc elle est développable en série de Fourier et l'on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P_t(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(P_t)e^{inx}$$

D'autre part, on a établi précédemment l'égalité

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P_t(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-|n|t}e^{inx}$$

Par unicité des coefficients trigonométriques des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \widehat{P}_t(n)=e^{-|n|t}.$$

5. On commence par remarquer que

$$1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}=0\Leftrightarrow (e^{-t}-1)^2+2e^{-t}(1-\cos x)=0\Leftrightarrow (e^{-t}-1)^2+4e^{-t}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement tous les termes sont nuls et l'exponentielle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} e^{-t}-1=0\\ \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} t=0\\ \dfrac{x}{2}=0\bmod\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} t=0\\ x=0\bmod 2\pi\end{array}\right.$$

6. En se rappelant que

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad/\quad |z|<1,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}z^n=z\sum_{n=1}^{+\infty}z^{n-1}\underset{p=n-1}{=}z\sum_{p=0}^{+\infty}z^p=\frac{z}{1-z},$$

et étant donné que $\left|e^{-t}e^{\pm ix}\right| = e^{-t} < 1$ lorsque $t > 0$, on obtient que

$$\begin{aligned}
P(t,x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}e^{inx} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-|n|t}e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}e^{inx} \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}\cos(nx) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}e^{inx}\right) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}e^{ix}\right)^n\right) \\
&= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-t}e^{-ix}}{1-e^{-t}e^{-ix}}\right) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-t}e^{-ix}(1-e^{-t}e^{ix})}{(1-e^{-t}e^{-ix})(1-e^{-t}e^{ix})}\right) \\
&= 1 + 2\times\frac{e^{-t}\cos x - e^{-2t}}{1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t}} = \frac{1-e^{-2t}}{1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t}}
\end{aligned}$$

D'après la question **I.5**, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}, \quad 1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t} \geqslant 0$ donc le signe de $P(t,x)$ est celui de $1-e^{-2t}$ qui est strictement positif lorsque $t > 0$.

7. Si $t \to 0^+$ alors $1-e^{-2t} \to 0^+$ et $1-2e^{-t}\cos x + e^{-2t} \to 2 - 2\cos x = 4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ donc

$$\lim_{t\to 0^+} P_t(x) = \lim_{t\to 0^+} P(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\} \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $a \in]0,\pi[$, si $x \in [a,\pi]$ alors $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \sin\left(\frac{a}{2}\right) \geqslant 0$ (par croissance de sin sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) donc si

$$x \in [-\pi,-a]\cup[a,\pi], \quad \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \geqslant \left|\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right|$$

(par parité de $|\sin|$). En utilisant la question **I.5** et la positivité de P_t, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x &\in [-\pi,-a]\cup[a,\pi], \quad (e^{-t}-1)^2 + 4e^{-t}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 4e^{-t}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\
&\Rightarrow |P_t(x)| = P_t(x) = \frac{1-e^{-2t}}{(e^{-t}-1)^2 + 4e^{-t}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant \frac{1-e^{-2t}}{4e^{-t}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-2t}}{4e^{-t}\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}$ est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $t \to 0$ donc la convergence est uniforme sur $[-\pi,-a]\cup[a,\pi]$.

Deuxième partie

8. La fonction f est continue par morceaux et 2π-périodique donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Si on note $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f| = \sup_{[-\pi,\pi]} |f|$, on a les majorations

$$\begin{aligned}
\forall n &\in \mathbb{Z}, \quad \left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}\right| = \left|\widehat{f}(n)\right|e^{-|n|t} \leqslant \|f\|_\infty\,e^{-|n|t}
\end{aligned}$$

Etant donné que les séries $\sum_{n\geqslant 0} e^{-|n|t}$ et $\sum_{n\leqslant -1} e^{-|n|t}$ sont convergentes, on en déduit la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0}\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum_{n\leqslant -1}\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}$ donc la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}$.

9. Le résultat est immédiat en reprenant l'argumentaire de la question **I.3.a** étant donné que la suite $\left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et l'on a

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^{p+q}\Phi_f}{\partial t^p \partial x^q}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)(-|n|)^p(in)^q e^{-|n|t}e^{inx}$$

10. Soit $t > 0$, x fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy$$

Etant donné que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|f(y)e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}\right| = |f(y)|\, e^{-|n|t} \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-n|t|}$$

les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(y)e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}$ et $\sum\limits_{n\leqslant -1} f(y)e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}$ convergent normalement par rapport à y sur $[-\pi,\pi]$, ce qui permet d'échanger les symboles d'intégration et de sommation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)}e^{-|n|t}f(y)dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny}(y)dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}\widehat{f}(n) = \Phi_{f,t}(x)
\end{aligned}$$

11. $\underline{p=0}$: D'après la question **I.2**, on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(y)dy = 1$. La fonction P_t étant 2π-périodique, on a $\int_{a-\pi}^{a+\pi} P_t(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_t(y)dt$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$. En particulier, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, &\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)dy \underset{z=x-y}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} P_t(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} P_t(z)dz = 1 \\
\forall x \in \mathbb{R}, &\quad \Rightarrow f(x) = f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(x)dy
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_{f,t}(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(x)dy\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)[f(y)-f(x)]dy\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_t(x-y)|\,|f(y)-f(x)|\,dy \\
&\underset{P_t\geqslant 0}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)\,|f(y)-f(x)|\,dy
\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $[-\pi,\pi]$ qui est un segment donc elle y est uniformément continue. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_\varepsilon > 0 \quad / \quad \forall x, y \in [-\pi,\pi], \quad |x-y| \leqslant a_\varepsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $P_t \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -a_\varepsilon] \cup [a_\varepsilon, \pi]$ c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists t_{\varepsilon'} > 0 \quad / \quad \forall t \in]0, t_{\varepsilon'}] \Rightarrow |P_t(z)| \leqslant \varepsilon \quad \forall z \in [-\pi,\pi] \text{ et } |z| \geqslant a_\varepsilon$$

En décompant l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)\,|f(y)-f(x)|\,dy$ selon que $|y-x| \leqslant a_\varepsilon$ ou que $|y-x| > a_\varepsilon$, en choisissant $\varepsilon' = \varepsilon$ et en remarquant que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)| + |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\,\|f\|_\infty\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x &\in [-\pi,\pi], \\
|\Phi_{f,t}(x)-f(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|\leqslant a_{ge}}} P_t(x-y)\,|f(y)-f(x)|\,dy+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|>a_{ge}}} P_t(x-y)\,|f(y)-f(x)|\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|\leqslant a_{ge}}} P_t(x-y)\,\varepsilon\,dy+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|>a_{ge}}} \varepsilon.2\,\|f\|_\infty\,dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|\leqslant a_{ge}}} P_t(x-y)dy+\frac{2\varepsilon\,\|f\|_\infty}{2\pi}\int\limits_{\substack{y\in[-\pi,\pi]\\|y-x|>a_{ge}}} dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)dy+\frac{2\varepsilon\,\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy=\varepsilon+2\varepsilon\,\|f\|_\infty=\varepsilon(1+2\,\|f\|_\infty)
\end{aligned}$$

En remplaçant ε par $\dfrac{\varepsilon}{1+2\,\|f\|_\infty}$, on en déduit que $\lim\limits_{t\to 0^+}\Phi_{f,t}=f$ uniformément sur $[-\pi,\pi]$. Etant donné que les fonctions f (par définition) et $\Phi_{f,t}$ sont 2π-périodiques car

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}(x+2\pi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(x+2\pi-y)f(y)dy \underset{P_t \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(x-y)f(y)dy=\Phi_{f,t}(x),$$

on en déduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier.
$\underline{p\leqslant k}$: Commençons par remarquer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(x-y)f(y)dy \underset{z=x-y}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}P_t(z)f(x-z)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f(x-z)dy$$

car la fonction $z\mapsto P_t(z)f(x-z)$ est 2π-périodique. Montrons par récurrence sur $p\leqslant k$ la propriété

$(\mathcal{H}_p)$: " $\Phi_{f,t}$ est de classe C^p et $\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f^{(p)}(x-z)dz$ "

Initialisation $p=0$: Puisque $\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f(x-z)dz$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_p)$ vraie avec $p\leqslant k-1$ et montrons $(\mathcal{H}_{p+1})$. On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f^{(p)}(x-z)dz.$$

La fonction $(z,x)\mapsto P_t(z)f^{(p)}(x-z)$ est de classe C^1 sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur un segment entraine que la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f^{(p)}(x-z)dz=\Phi_{f,t}^{(p)}(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi_{f,t}^{(p+1)}(x)=\left(\Phi_{f,t}^{(p)}\right)'(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f^{(p+1)}(x-z)dz$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{p+1})$ et achève la récurrence.
Etant donné que

$$\forall p\leqslant k,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(z)f^{(p)}(x-z)dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_t(x-y)f^{(p)}(y)dy$$

et que la fonction $f^{(p)}$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, l'étude du cas $p=0$ montre que $\Phi_{f,t}^{(p)}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$.

Troisième partie

12. La fonction $u \mapsto \dfrac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 1 (car $\dfrac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u^\alpha}{u^\alpha} = 1$) donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ce qui entraine l'existence de $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ (positif en fait car la fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$) tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha} \leqslant \mu_\alpha \underset{1+u^\alpha \geqslant 0}{\Leftrightarrow} (1+u)^\alpha \leqslant \mu_\alpha(1+u^\alpha).$$

13. (a) Si $f \in C^0_{\text{per}}$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ est convergente. En outre, si $f \in C^k_{\text{per}}$ alors $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$ et $f^{(k)} \in C^0_{\text{per}}$ donc la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f^{(k)}}(n)\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$$

est convergente. D'après la question **III.12**, il existe un réel positif μ_k tel que

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{Z}, \quad (1+n^2)^k \leqslant \mu_k(1+n^{2k}) \Rightarrow \\ (1+n^2)^k \left|\widehat{f}(n)\right|^2 &\leqslant \mu_k(1+n^{2k}) \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \mu_k \left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \mu_k n^{2k} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \end{aligned}$$

Etant donné que les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ sont convergentes, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^k \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ est convergente ce qui montre que $f \in E_k$ donc $C^k_{\text{per}} \subset E_k$.

(b) La réponse est négative. Pour cela, considérons la fonction f 2π-périodique, impaire définie sur $[0,\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est 2π-périodique mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ bien que

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi - x}{2}\right) \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n} \Rightarrow \widehat{f}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_n + ib_n) = \dfrac{i}{2n} & \text{si } n \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = -\dfrac{i}{2n} & \text{si } n \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}a_0 = 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, $f \in E_0$ car

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^0 \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

donc $E_0 \neq C^0_{\text{per}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, en considèrant la fonction F 2π-périodique dont la valeur sur $]0,\pi[$ est une fonction de classe C^k dont la dérivée k-ième vaut f. Alors F est une fonction de C^k par morceaux mais pas C^k (car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$). Par contre,

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\widehat{F^{(k)}}(n)\right| = \left|i^k n^k \widehat{F}(n)\right| = |n|^k \left|\widehat{F}(n)\right| \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}^\times} (1+n^2)^k \left|\widehat{F}(n)\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^\times} \frac{(1+n^2)^k}{n^{2k}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$$

Puisque $\dfrac{(1+n^2)^k}{n^{2k}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \underset{n\to\pm\infty}{\sim} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \geqslant 0$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^\times} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}^\times} (1+n^2)^k \left|\widehat{F}(n)\right|^2$ converge donc $F \in E_k$ ce qui démontre que $E_k \neq C^k_{\text{per}}$.

(c) <u>$k=0$</u> : Soit $f \in C^{\text{pm}}_{\text{per}}$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ converge avec $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Montrons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|$ converge.

En utilisant la majoration classique $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|\widehat{f}(n)\right| = \left((1+n^2)^{\alpha/2} \left|\widehat{f}(n)\right|\right) \frac{1}{(1+n^2)^{\alpha/2}} \leqslant \frac{1}{2}(1+n^2)^\alpha \left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{(1+n^2)^\alpha}$$

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ converge ainsi que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(1+n^2)^\alpha}$ converge puisque $\dfrac{1}{(1+n^2)^\alpha} \underset{n\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ qui est une série de Riemann convergente car $2\alpha > 1$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|$ converge.

Considèrons la fonction $g : x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}$ qui est clairement 2π-périodique. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto \widehat{f}(n)e^{inx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Par unicité des coefficients de Fourier des fonctions continues, on a $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ et l'égalité de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f-g}(n)\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)-\widehat{g}(n)\right|^2 = 0$$

Ainsi la fonction $|f-g|^2$ est continue et positive sur $[-\pi,\pi]$, d'intégrale nulle sur $[-\pi,\pi]$ donc

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad |f(x)-g(x)|^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Les fonctions f et g sont égales sur $[-\pi,\pi]$ et comme elles sont 2π-périodiques, elles sont égales sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\underline{k \in \mathbb{N}}$: Montrons par récurrence sur k que $f \in C^k_{\text{per}}$. L'initialisation est prouvé dans le cas $k = 0$! Justifions l'héridité. Soit $f \in E_{k+1}$ alors $f \in E_k$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1+n^2)^k\left|\widehat{f}(n)\right|^2 \leqslant (1+n^2)^{k+1}\left|\widehat{f}(n)\right|^2.$$

donc f est de classe C^k par hypothèse de récurrence. La fonction $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cas $k = 0$, on a

$$f^{(k)} : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f^{(k)}}(n)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(in)^k\widehat{f}(n)e^{inx}$$

Montrons que $f^{(k)}$ est de classe C^1

- La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(in)^k\widehat{f}(n)e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après le cas $k = 0$).
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto (in)^k\widehat{f}(n)e^{inx}$ est de classe C^1.
- On a $\dfrac{d}{dx}\left((in)^k\widehat{f}(n)e^{inx}\right) = (in)^{k+1}\widehat{f}(n)e^{inx}$ et

$$\begin{aligned}\forall n \ \in\ \mathbb{Z},\quad & \left|(in)^{k+1}\widehat{f}(n)e^{inx}\right| = |n|^{k+1}\left|\widehat{f}(n)\right| \leqslant \left((1+n^2)^{1/2}\right)^{k+1}\left|\widehat{f}(n)\right| = (1+n^2)^{(k+1)/2}\left|\widehat{f}(n)\right| \\ = \ & (1+n^2)^{\alpha/2}\left|\widehat{f}(n)\right|(1+n^2)^{(k+1-\alpha)/2} \leqslant \frac{1}{2}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \frac{1}{2}(1+n^2)^{k+1-\alpha} \\ \leqslant \ & \frac{1}{2}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \frac{1}{2}(1+n^2)^{k+1-\alpha}\end{aligned}$$

  La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2$ est convergente (car $f \in E_\alpha$) ainsi que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^{k+1-\alpha}$ puisque

$$(1+n^2)^{k+1-\alpha} \underset{n\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2(\alpha-k-1)}} \geqslant 0$$

  et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{2(k+1-\alpha)}}$ converge car $2(\alpha-k-1) > 2(k+1+\dfrac{1}{2}-k-1) = 1$.

  Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(in)^{k+1}\widehat{f}(n)e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des séries montre que la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(in)^k\widehat{f}(n)e^{inx} = f^{(k)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^{k+1} ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.

14. Un changment de variable $y = tx$ nous donne

$$C = t^{r+1}\int_0^{+\infty} x^r e^{-tx}dt \underset{y=tx}{=} \int_0^{+\infty} y^r e^{-y}dy = \Gamma(r+1).$$

15. La fonction $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^r e^{-tn}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (puisque c'est le cas de chaque fonction $t \mapsto e^{-nt}$ puisque $n \geqslant 1$) donc elle admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0^+ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g(t) \leqslant L$. Supposons $L \in \mathbb{R}$ et fixons $N \in \mathbb{N}^\times$. Etant donné que chaque terme $n^r e^{-tn}$ est positf alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \sum_{n=1}^{N} n^r e^{-tn} \leqslant g(r) \leqslant L \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \sum_{n=1}^{N} n^r e^{-tn} \leqslant L$$

Puisqu'il s'agit d'une somme finie de fonctions possédant une limite en 0^+, en faisant tendre t vers 0^+, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} n^r \leqslant L$$

La suite $\left(\sum_{n=1}^{N} n^r\right)$ est clairement croissante (somme de termes positifs) et majorée donc elle converge, ce qui entraine la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^r$ ce qui est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad n^r \geqslant n^0 = 1$ donc $n^r \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. Par conséquent, $L = +\infty$.

16. On souhaite utiliser la comparaison série-intégrale. Pour cela, on considère la fonction $\varphi_r : y \mapsto y^r e^{-ty}$ qui est clairement C^1 sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \varphi_r'(y) = y^{r-1}(r - ty) \leqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{r}{t}$$

Ainsi φ_r est décroissante sur $\left[\frac{r}{t}, +\infty\right[$ et intégrable sur $\left[\frac{r}{t}, +\infty\right[$ (car intégrable sur $\mathbb{R}_+^\times$) ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\forall n \quad &\geqslant \quad \lfloor \frac{r}{t} \rfloor + 2, \quad \varphi_r(n) = \int_{n-1}^{n} \varphi_r(n)dy \leqslant \int_{n-1}^{n} \varphi_r(y)dy \\
&\Rightarrow \sum_{n=\lfloor r/t\rfloor+2}^{+\infty} \varphi_r(n) \leqslant \sum_{n=\lfloor r/t\rfloor+2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \varphi_r(y)dy = \int_{\lfloor r/t\rfloor+1}^{+\infty} \varphi_r(y)dy \\
\varphi_r(\lfloor r/t\rfloor + 1) \quad &\leqslant \quad \varphi_r\left(\frac{r}{t}\right) = \left(\frac{r}{t}\right)^r e^{-r} = r^r e^{-r} t^{-r}
\end{aligned}$$

La fonction φ_r est croissante sur $]0, \frac{r}{t}]$ donc

$$\begin{aligned}
\forall n \quad &\leqslant \quad \lfloor \frac{r}{t} \rfloor - 1, \quad \varphi_r(n) = \int_{n}^{n+1} \varphi_r(n)dy \leqslant \int_{n}^{n+1} \varphi_r(y)dy \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\lfloor r/t\rfloor-1} \varphi_r(n) \leqslant \sum_{n=0}^{\lfloor r/t\rfloor} \int_{n-1}^{n} \varphi_r(y)dy = \int_{0}^{\lfloor r/t\rfloor} \varphi_r(y)dy \\
\varphi_r(\lfloor r/t\rfloor) \quad &\leqslant \quad \varphi_r\left(\frac{r}{t}\right) = r^r e^{-r} t^{-r}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_r(n) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\lfloor r/t\rfloor-1} \varphi_r(n) + \sum_{n=\lfloor r/t\rfloor+2}^{+\infty} \varphi_r(n) + \varphi_r(\lfloor r/t\rfloor) + \varphi_r(\lfloor r/t\rfloor + 1) \\
&\leqslant \int_{0}^{\lfloor r/t\rfloor} \varphi_r(y)dy + \int_{\lfloor r/t\rfloor+1}^{+\infty} \varphi_r(y)dy + 2r^r e^{-r} t^{-r} \\
&\leqslant \int_{0}^{+\infty} \varphi_r(y)dy + 2r^r e^{-r} t^{-r} \leqslant \frac{\Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r} t}{t^{r+1}} \leqslant \frac{\Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r} \tau}{t^{r+1}}
\end{aligned}$$

On choisit $\tau = \Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r} \tau$.

17. (a) Puisque $f \in E_\alpha$ avec $\alpha > \dfrac{1}{2}$ donc $f \in C^0_{\text{per}}$ (d'après la question **III.13.c**) et d'après la question **II.9**, $\Phi_{f,t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ par rapport à t et

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{f,t}(x) = i\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les sommes finies ainsi que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2$ (car $f \in E_\alpha$), on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=-N}^{N} n\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}\right| &= \left|\sum_{n=-N}^{N}\left[(1+n^2)^{\alpha/2}\widehat{f}(n)\right]\left[n(1+n^2)^{-\alpha/2}e^{-|n|t}e^{inx}\right]\right| \\
&\leqslant \left(\sum_{n=-N}^{N}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-N}^{N} n^2(1+n^2)^{-\alpha}\left|e^{-|n|t}e^{inx}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-N}^{N} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-|n|(2t)}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-|n|(2t)} &= \sum_{n=-N}^{-1} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-|n|(2t)} + \sum_{n==1}^{N} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-|n|(2t)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{N} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-n(2t)} \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1+n^2)^{-\alpha}e^{-n(2t)} \\
&\leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(n^2)^{-\alpha}e^{-n(2t)} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-2\alpha}e^{-n(2t)} \\
&\leqslant C'(2t)^{-(2-2\alpha)-1} = C'2^{2\alpha-3}t^{2\alpha-3}
\end{aligned}$$

où C' est la constante déterminée à la question **III.16**. Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} n\widehat{f}(n)e^{-|n|t}e^{inx}\right| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}(C')^{1/2}2^{\alpha-3/2}t^{\alpha-3/2}$$

En posant $C'' = \displaystyle\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^\alpha\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{1/2}(C')^{1/2}2^{\alpha-3/2}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\forall (t,x) \in]0,\tau] \times \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{f,t}(x)\right| \leqslant C''t^{\alpha-3/2}$$

(b) Soient $t, s \in]0,\tau]$, $t \geqslant s$, x fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$|\Phi_{f,t}(x) - \Phi_{f,s}(x)| = \left|\int_s^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{f,u}(x)du\right| \underset{s\leqslant t}{\leqslant} \int_s^t \left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{f,u}(x)\right|du \leqslant \int_s^t C''u^{\alpha-3/2}du = \frac{C''}{\alpha-1/2}\left[t^{\alpha-1/2} - s^{\alpha-1/2}\right]$$

Etant donné que $\alpha > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha - \dfrac{1}{2} > 0$, en faisant tendre s vers 0, on a $s^{\alpha-1/2} \to 0$ et $\Phi_{f,s}(x) \to f(x)$ (question **II.11**) donc

$$\forall (t,x) \in]0,\tau], \quad |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| = \frac{C''}{\alpha-1/2}t^{\alpha-1/2} \Rightarrow \|\Phi_{f,t} - f\|_\infty \leqslant \frac{C''}{\alpha-1/2}t^{\alpha-1/2}$$

et l'on pose $C''' = \dfrac{C''}{\alpha-1/2}$ pour conclure.