Corrigé X-2006, MP, seconde épreuve

Première partie

1. Une matrice symétrique et antisymétrique est nulle. Donc le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et le sous-espace des matrices antisymétriques sont en somme directe. Leur somme vaut $M_n(\mathbb{R})$ car toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, s'écrivant $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$, est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2. On a pour toute matrice antisymétrique B, $(Bx|x) = 0$ (car $(Bx|y) = -(x|By)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$). Donc $(Ax|x) = (A_sx|x)$, et A est s-positive signifie que A_s est positive (en tant que matrice symétrique). D'après le cours, c'est équivalent à la positivité des valeurs propres de A_s.

Seconde partie

3. Soient A s-positive et $\lambda > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\|(\lambda I + A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(Ax|x) + \|Ax\|^2 > 0$. D'où $\mathrm{Ker}(\lambda I + A) = \{0\}$ et l'inversibilité de $(\lambda I + A)$.

4. (a) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$, $R_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda^2+1}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$,

   $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (= A^{-1})$ et $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = 0$.

   (b) En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(e_2)$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} & 0 & -\frac{1}{\lambda^2+1} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ \frac{1}{\lambda^2+1} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \end{pmatrix}$.

   $\lambda R_\lambda(A)$ n'admet pas de limite quand λ tend vers 0, mais $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) R_λ commute trivialement avec $(\lambda I + A) = R_\lambda(A)^{-1}$donc avec A : $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A$. Par ailleurs, $(A + \lambda I)R_\lambda(A) = I$ donne immédiatement $AR_\lambda(A) = I - \lambda R_\lambda(A)$.

   (b) $(I - \lambda R_\lambda(A))R_\mu(A) = AR_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\lambda(A)AR_\mu(A) = R_\lambda(A)(I - \mu R_\mu(A))$, d'où $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.

6. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a $\|(\lambda I + A)y\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(Ay|y) + \|Ay\|^2 \geq \lambda^2\|y\|^2$. En posant $x = (\lambda I + A)y$, il vient $\|x\|^2 \geq \lambda^2\|R_\lambda(A)x\|^2$. Cette relation est vérifiée par tout $x \in \mathbb{R}^n$ car $(\lambda I + A)$ est surjective. Donc $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Par compacité de la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ et continuité de l'application $x \mapsto \|R_\lambda(A)x\|$ sur icelle, l'égalité $\|R_\lambda(A)\| = \frac{1}{\lambda}$ équivaut à l'existence de $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|x\|^2 = \lambda^2\|R_\lambda(A)x\|^2$, donc

à l'existence de $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(Ay|y) + \|Ay\|^2 = \lambda^2\|y\|^2$, c'est-à-dire tel que $Ay = 0$ (car $(Ay|y) \geq 0$). Ainsi, l'égalité $\|R_\lambda(A)\| = \frac{1}{\lambda}$ équivaut à la non inversibilité de A, ou encore à $\det(A) = 0$.

7. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(A)$. Choisissons $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = Ay$. Alors $\lambda R_\lambda(A)x = \lambda R_\lambda(A)Ay = \lambda(I - \lambda R_\lambda(A))y$ d'où, puisque $\|R_\lambda(A)y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|$, $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A)x = 0$.

   (b) De $I = R_\lambda(A)A + \lambda R_\lambda(A)$, on déduit, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(A)$, $x = \lambda R_\lambda(A)x$. Si de plus $x \in \mathrm{Im}(A)$, on a $x = 0$ d'après la question précédente. Donc $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont en somme directe et, puisque la somme de leurs dimensions vaut n, ce sont des supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

   (c) On vient de voir $\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda R_\lambda(A)x = 0$ lorsque $x \in \mathrm{Im}(A)$ et $\lambda R_\lambda(A)x = x$ lorsque $x \in \mathrm{Ker}(A)$. On a donc, puisque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$ et en notant P le projecteur sur $\mathrm{Ker}(A)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A)$, $\forall x \in R^n, \lim_{\lambda\to 0^+}(\lambda R_\lambda(A) - P)x = 0$. Soit maintenant $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\mathbb{R}^n$, par exemple la base canonique. Posons, pour $B \in M_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(B) = \max_i \|Be_i\|$. N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et on a immédiatement, vu ce qui précède, $\lim_{\lambda\to 0^+} N_\infty(\lambda R_\lambda(A) - P) = 0$. Toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ étant équivalentes, on a aussi $\lim_{\lambda\to 0^+} \|\lambda R_\lambda(A) - P\| = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

8. Puisque $R_\lambda(A) = \frac{1}{\det(\lambda I + A)}{}^t\,\mathrm{Com}(\lambda I + A)$, les coefficients de $R_\lambda(A)$ sont des fractions rationnelles en λ (dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Ce sont par conséquent des fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, ainsi que $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$.

   Fixons $\lambda > 0$. On a, pour $h > -\lambda$, $\Phi(\lambda + h) = ((\lambda + h)I + A)^{-1} = (\Phi(\lambda)^{-1} + hI)^{-1} = \Phi(\lambda)(I + h\Phi(\lambda))^{-1}$. Si h est tel que $\|h\Phi(\lambda)^{-1}\| < 1$, le cours nous apprend que $\Phi(\lambda + h) = \Phi(\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k h^k \Phi(\lambda)^k$. Pour tout entier $p > 0$, on a donc, lorsque $h \to 0$, $\Phi(\lambda + h) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k h^k \Phi(\lambda)^{k+1} + o(h^p)$. Or, Φ étant de classe C^∞, la formule de Taylor-Young indique $\Phi(\lambda + h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!}\Phi^{(k)}(\lambda) + o(h)$ (quand $h \to 0$). L'unicité du développement limité à un ordre donné montre alors $\Phi^{(p)}(\lambda) = (-1)^p p!\Phi(\lambda)^{p+1}$.

Troisième partie

9. Substituant 1 à μ, on obtient, pour tout $\lambda > 0$, $F(\lambda) - F(1) = (1 - \lambda)F(\lambda)F(1)$ d'où $F(\lambda)(I + (\lambda - 1)F(1)) = F(1)$. $F(1)$ étant inversible, $F(\lambda)$ aussi et $F(\lambda)^{-1} = F(1)^{-1} + (\lambda - 1)I$.

10. (a) $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (F(1)^{-1} + (\lambda - 1)I) - (F(1)^{-1} + (\mu - 1)I) = (\lambda - \mu)I$.

    (b) $F(\lambda)^{-1} = F(1)^{-1} + (\lambda - 1)I$ tend vers $A = F(1)^{-1} - I$ quand λ tend vers 0. On a bien $F(\lambda) = A + \lambda I$.

11. Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, $\|x\| = \|F(\lambda)(A + \lambda I)x\| \leq \|F(\lambda)\|\,\|(A + \lambda I)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(A + \lambda I)x\|$, d'où $\|(A + \lambda I)x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$ puis $\|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax|x) \geq 0$. Il en résulte $(Ax|x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax|x)}{2\lambda} \geq 0$.

On a aussi, par Cauchy-Schwarz, $(F(\lambda)x|x) \leq \|F(\lambda)x\| \, \|x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|^2$ donc, puisque $AF(\lambda) = I - \lambda F(\lambda)$ (question **5a**), $(AF(\lambda)x|x) = \|x\|^2 - \lambda(F(\lambda)x|x) \geq 0$. Aussi $AF(\lambda)$ est-elle s-positive.

Quatrième partie

12. Rappelons que si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

    i) $\Longrightarrow$ ii) : On suppose i). Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \leq s$ réels, on a $\|\exp(-sA)x\| = \|\exp(-(s-t)A)\exp(-tA)x\| \leq \|\exp(-(s-t)A)\| \|\exp(-tA)x\| \leq \|\exp(-tA)x\|$.

    ii) $\Longrightarrow$ i) : Supposons ii). Alors pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\exp(-tA)x\| \leq \|\exp(-0A)x\| = \|x\|$, donc $\|\exp(-tA)\| \leq 1$.

    ii) $\Longleftrightarrow$ iii) Soit $x \neq 0$. Posons $g(t) = \|\exp(-tA)x\|^2$. g est dérivable (car $\exp(-tA)x$ ne s'annule pas) et $g'(t) = -2(A\exp(-tA)x|\exp(-tA)x) = -2(Ay|y)$, où $y = \exp(-tA)x$. Donc si A est s-positive, $g'(t) \leq 0$ et g est décroissante. Réciproquement, si g est décroissante, alors $g'(t) \leq 0$ pour tout t, et, puisque $\exp(-tA)$ est bijective, $(Ay|y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (le cas $y = 0$ est trivial).

13. D'après **12i**, $t \mapsto \exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Donc chaque fonction $t \mapsto (\exp(-tA))_{i,j}$ est bornée et $t \mapsto e^{-\lambda t}(\exp(-tA))_{i,j}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (donc l'intégrale "converge", c'est-à-dire que $u \mapsto \int_0^u e^{-\lambda t}(\exp(-tA))_{i,j}\,dt$ admet une limite quand $u \to +\infty$).

14. $(A+\lambda I)\rho(\lambda) = \int_0^{+\infty}(A+\lambda I)e^{-t(\lambda I+A)}\,dt = -\left[e^{-t(\lambda I+A)}\right]_{t=0}^{+\infty} = I$, donc $\rho(\lambda) = R_\lambda(A)$.

15. Soit $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ l'algèbre des matrices de similitude, et $\Psi : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ définie par $\Psi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ψ est un isomorphisme d'algèbre et un homéomorphisme. En particulier, $\Psi(e^z)) = \exp(\Psi(z))$ par un simple passage à la limite.

    On a alors $-tA = \Psi(it)$, $\exp(-tA) = \Psi(e^{it}) = \Psi(\cos(t) + i\sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Psi\left(e^{it}\right)\,dt = \Psi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{it}\,dt\right) = \Psi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{it}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{i-\lambda}\Psi\left(\left[e^{(i-\lambda)t}\right]_0^{+\infty}\right) = \Psi\left(\frac{1}{\lambda - i}\right) = \Psi\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1} + \frac{i}{\lambda^2+1}\right) \end{aligned}$$

    On retrouve ainsi $R_\lambda(A) = \rho(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+1}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.