Polytechnique MP 2004 Maths-2
Corrigé de Yves Duval (yves.a.duval@wanadoo.fr)
Michel Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Première partie

1a) $(V \mid x^{(\ell)}) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k x_k^{(\ell)} \det(X_k)$ où X est la matrice de terme général $x_j^{(i)}$ et X_k la matrice déduite de X en supprimant la k-ème ligne. La somme précédente est égale à l'opposé au déterminant de la matrice X complétée par la colonne $x^{(\ell)}$ sur sa gauche. Cette matrice a deux colonnes égales donc son déterminant vaut zéro.

1b) $V = 0$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre n extraits de X sont nuls, ce qui équivaut au fait que $\mathrm{rg}(X) < n$, ou aussi à la liaison de la famille $(x^{(i)})$.

1c) En reprenant le raisonnement de **1a**, pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^{n+1}$ on a $(u \mid V) = \det(u, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, déterminant calculé dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. En particulier $\|V\|^2 = \det(V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$.

2a) Si $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est libre alors le vecteur $W = V/\|V\|$ vérifie **i** et **ii**. Par ailleurs, $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^\perp$ est une droite vectorielle (orthogonal d'un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$) donc les seuls vecteurs orthogonaux à tous les $x^{(i)}$ sont les multiples de W et les conditions **i** et **ii** imposent que le coefficient de proportionnalité vaut 1. Ceci prouve l'unicité de W.

2b) La notion de rotation n'est pas claire. S'agit-il de la composée de deux réflexions ou d'un endomorphisme orthogonal positif quelconque (les deux notions coïncident en dimension 2 et 3, la deuxième est plus générale dans le cas n quelconque) ? On considère ici qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal positif. Soit donc $R \in \mathcal{O}^+(\mathbf{R}^{n+1})$ et $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ une famille libre de $\mathbf{R}^{n+1}$. La famille image est aussi libre par injectivité de R. De plus, comme R conserve la norme et le produit scalaire, on a $R(W) \perp R(x^{(i)})$ pour tout i et $\|R(W)\| = 1$. Enfin, $\det(R(W), R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = \det(R)\det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) > 0$ car $\det(R) = 1$.

3a) Q est diagonalisable car symétrique réelle. La forme quadratique q associée à Q est définie par $q(a_1, \dots, a_n) = \|a_1e_1 + \dots + a_ne_n\|^2$, donc elle est définie positive puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. On en déduit $\mathrm{Spec}(Q) \subset \mathbf{R}^{+*}$ et en particulier Q est inversible.

3b) $(v \mid e_i) = (v_1 \ \dots \ v_n)Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le « 1 » est en i-ème ligne. On en déduit : $((v \mid e_1) \ \dots \ (v \mid e_n)) = (v_1 \ \dots \ v_n)Q$.

4a) Chaque vecteur $x^{(i)} = \partial_i F(u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de u. Le vecteur V défini en **1** est une fonction polynomiale des $x_j^{(i)}$, donc est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \neq 0$ pour tout u par hypothèse. On en déduit que $\|V\|$ et $W = V/\|V\|$ sont aussi des fonctions de u de classe $\mathcal{C}^1$.

4b) En dérivant la relation $(W(u) \mid \partial_i F(u)) = 0$ par rapport à la k-ème coordonnée de u et à l'aide du théorème de Schwarz on obtient : $(\partial_k W(u) \mid \partial_i F(u)) = -(W(u) \mid \partial_k\partial_i F(u)) = -(W(u) \mid \partial_i\partial_k F(u))$.

4c) De même, la relation $(W(u) \mid W(u)) = 1$ donne par dérivation : $(W(u) \mid \partial_i W(u)) = 0$. Donc le vecteur $\partial_i W(u)$ appartient à $W(u)^\perp = \langle \partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u) \rangle$. Les coefficients $a_{ij}(u)$ sont les composantes de $\partial_i W(u)$ dans la base $(\partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u))$ de $W(u)^\perp$, d'où leur existence et leur unicité.

4d) Conséquence immédiate des résultats obtenus en **3b** et **4b**.

Deuxième partie

5) R étant linéaire, $\partial_i \hat{F} = R \circ (\partial_i F)$ donc $\hat{W} = R \circ W$ d'après **2b**. Comme R conserve le produit scalaire et commute avec les dérivations, on en déduit $\hat{S} = S$ et $\hat{Q} = Q$, d'où $\hat{A} = A$ d'après **4d**, et enfin $\hat{K} = K$, $\hat{H} = H$.

6a) $\partial_1 F(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$, $\partial_2 F(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ donc $W(u) = (-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1)/\sqrt{(\partial_1 f(u))^2 + (\partial_2 f(u))^2 + 1}$ et $W(0) = (0, 0, 1)$. $S(0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) = -S(0)$ d'où $K(0) = rt - s^2$, $H(0) = -\frac{r+t}{2}$.

6b) Ici $s = t = 0$ donc $H(0) = -\frac{1}{2}r$. Pour définir la courbure d'une courbe dans le plan d'équation $x_2 = 0$, il est nécessaire d'orienter ce plan. On convient de l'orienter de sorte que la base (e_3, e_1) soit directe (ce qui revient à orienter la normale $< e_2 >$ dans le sens de e_2). D'après la relation générale $c = \det(\overrightarrow{M}', \overrightarrow{M}'')/\|\overrightarrow{M}'\|^3$ donnant la courbure d'une courbe plane paramétrée, on a ici $c(0) = -r$ donc $H(0) = \frac{1}{2}c(0)$.

7a) $\partial_1 F(u) = (f'(u_1)\cos u_2, f'(u_1)\sin u_2, 1)$ et $\partial_2 F(u) = (-f(u_1)\sin u_2, f(u_1)\cos u_2, 0)$ sont liés si et seulement si $\partial_2 F(u) = 0$ vu la troisième composante, soit si et seulement si $f(u_1) = 0$, ce qui est exclu dans l'énoncé.

7b) Calcul sans difficulté.

7c) On veut $ff'' = 1 + f'^2$, ce qui est réalisé pour $f(t) = \operatorname{ch} t$ par exemple. La surface obtenue est appelée *caténoïde*, voir `http://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml` pour une description de cette surface et de ses propriétés.

7d) En essayant $f(t) = \lambda \operatorname{ch}(\mu t + \nu)$ on obtient les équations : $\lambda^2\mu^2 = 1$, $\lambda \operatorname{ch} \nu = \alpha$, $\lambda\mu \operatorname{sh} \nu = \beta$ qui ont pour solution $\nu = \operatorname{argsh} \beta$, $\lambda = \alpha/\sqrt{1+\beta^2}$ et $\mu = 1/\lambda$.

Interprétation géométrique : $f(0) = \alpha$ est la distance du point $F(0)$ à l'axe de révolution et $f'(0) = \beta$ est la pente de la méridienne passant par $F(0)$. On vient donc de constater que *par tout point du plan $< e_1, e_2 >$ autre que l'origine et pour toute droite sécante à $< e_3 >$ passant par ce point, il existe une surface de révolution autour de $< e_3 >$ à courbure moyenne nulle, passant par ce point et tangente à cette droite...*

7e) $K(u) = \dfrac{-f''(u_1)}{f(u_1)(1 + f'^2(u_1))^2} = \dfrac{-\mu^2}{\operatorname{ch}^4(\mu u_1 + \nu)}$.

8) En prenant f constante non nulle, la matrice A est constante et donc K et H le sont. Les surfaces correspondantes sont les cylindres de révolution autour de $< e_3 >$. On peut aussi penser aux sphères d'axe $< e_3 >$, soit $f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$, qui conviennent (avec un peu de calcul) : $A(u) = I/R$ où I est la matrice identité.

Troisième partie

9) Conséquence immédiate de **4c**.

10a) Remarque : la classe de Φ n'est pas précisée. On suppose ici que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$.
$\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$ (produit de matrices jacobiennes).
En notant $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a donc $\partial_1 \tilde{F} = (a\partial_1 F + c\partial_2 F) \circ \Psi$ et $\partial_2 \tilde{F} = (b\partial_1 F + d\partial_2 F) \circ \Psi$,
d'où $\partial_1 \tilde{F} \wedge \partial_2 \tilde{F} = (ad - bc)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi) = \det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi)$.

10b) D'après la relation précédnte, $\tilde{W} = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)\right)(W \circ \Psi)$, et le signe de $\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est constant sur $\tilde{U}$ ($\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est une fonction continue jamais nulle et $\tilde{U} = \Phi(U)$ est connexe par arcs).

10c) $\dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial W}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \times {}^t\!A\right) \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \left({}^t\!A \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1} \times \left({}^t\!A \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.
La matrice $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ est inversible puisque $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ l'est. On en déduit : $\tilde{A}(\tilde{u}) = \varepsilon\, {}^t\!\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right) \times A(u) \times {}^t\!\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1}$.

10d) En prenant la demi-trace et le déterminant : $\tilde{H}(\tilde{u}) = \varepsilon H(u)$ et $\tilde{K}(\tilde{u}) = K(u)$.