ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**
CONCOURS D'ADMISSION 2003

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Corrigé de M. Quercia (`michel.quercia@prepas.org`)

Première partie

Question 1.
$(AB)_{ij} = a_i b_{ij}$ et $(BA)_{ij} = b_{ij} a_j$, donc $(AB = BA$ et $a_i \neq a_j) \Longrightarrow b_{ij} = 0$.

Question 2.
Les matrices orthogonales directes en dimension 2 sont les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$. On a : $MA - AM = b \begin{pmatrix} y+z & t-x \\ t-x & -y-z \end{pmatrix}$, donc M commute avec toute matrice de $SO(2, \mathbb{R})$ si et seulement si $y + z = t - x = 0$, soit $M = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques.

Question 3a.
Soit $B \in M(n, \mathbb{R})$ telle que pour toute $A \in SO(n, \mathbb{R})$ on a $AB = BA$ et soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. Comme $n \geqslant 3$, il existe $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$. Considérons alors la matrice orthogonale directe $A = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, 1, , \ldots, 1, -1, 1 \ldots, 1)$ où les -1 sont en position i et k. On a $a_i = -1 \neq 1 = a_j$ donc d'après la question **1**, $b_{ij} = 0$. Ceci prouve que B est diagonale.

Question 3b.
Soit $B \in M(n, \mathbb{R})$ commutant avec toute matrice orthogonale directe. On sait déjà que B est diagonale, soit $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, il existe une matrice A orthogonale directe telle que $a_{ij} \neq 0$ (clair), donc d'après la question **1**, on a $b_i = b_j$. Ainsi B est une matrice scalaire, et réciproquement toute matrice scalaire convient. Pour $n \geqslant 3$ le commutant de $SO(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Deuxième partie

Question 4.
On convient, pour attribuer un sens à la question, de confondre une matrice carrée $M \in M(n, \mathbb{R})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Avec cette convention, un sous-ensemble de $M(n, \mathbb{R})$ peut-être ainsi qualifié d'irréductible.

Lemme : *soient $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Alors il existe une application orthogonale directe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = y$.*
Démonstration : choisissons $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $z \neq x$, $z \neq y$, et $\|z\| = \|x\| = \|y\|$. Un tel vecteur existe car $n \geqslant 2$. Soient s la réflexion de base $(x - z)^\perp$, σ la réflexion de base $(y - z)^\perp$ et $\varphi = \sigma \circ s$. On a $s(x) = z$ et $\sigma(z) = y$ par construction, donc $\varphi(x) = y$, et φ est orthogonale directe en tant que composée de deux réflexions. Ceci démontre le lemme.

Irréductibilité de $SO(n, \mathbb{R})$: soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par toute application orthogonale directe. D'après le lemme précédent, si F contient un vecteur x non nul alors F contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant même norme que x, donc par homothétie F contient $\mathbb{R}^n$. Ceci prouve que $F = \{0\}$ ou $F = \mathbb{R}^n$.

Question 5.

Question de cours.

Question 6.

Si $E = \{0\}$ alors $\mathcal{L}(E) = \{\mathrm{id}_E\}$ et il n'y a rien à prouver. Si $E \neq \{0\}$, soit $W \subset \mathcal{L}(E)$ une partie irréductible et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tous les éléments de W. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E \neq \{0\}$, φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et le sous-espace propre associé, $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E)$ est non nul, stable par tous les éléments de W, donc égal à E. Ceci prouve que $\varphi = \lambda \mathrm{id}_E$. Réciproquement, tout endomorphisme multiple scalaire de id_E commute avec tout élément de W puisque $W \subset \mathcal{L}(E)$.

Question 7.

D'après les questions **2** et **4**, $W = SO(2, \mathbb{R})$ est un ensemble irréductible dont le commutant contient des matrices non scalaires, donc la conclusion précédente ne s'étend pas sans restriction au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Par contre, le raisonnement de la question **6** est applicable en dimension impaire (le polynôme caractéristique de φ est de degré impair donc admet une racine réelle). *Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie impaire, alors le commutant de tout sous-ensemble irréductible de $\mathcal{L}(E)$ est réduit aux homothéties.*

En dimension paire on peut généraliser le contre-exemple vu en dimension 2 : soit $n = 2p$ et W l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant des matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la forme $M = \left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ avec $A, B \in M(p, \mathbb{R})$ quelconques. On constate facilement que W est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et que si x est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^n$ alors il existe $w \in W$ inversible tel que $w(e_1) = x$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. De plus $w^{-1} \in W$ car w^{-1} est un polynôme en w et W est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Donc si x et y sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ alors il existe $w \in W$ tel que $w(x) = y$, ce qui suffit à montrer que W est irréductible. Enfin, le commutant de W dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est, après calculs, l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ayant des matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la forme $N = \alpha \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont quelconques et I désigne la matrice unité d'ordre p. Ce commutant n'est donc pas réduit aux homothéties.

Troisième partie

Question 8.

La somme $S = \sum_{p \geqslant 0} (\mathrm{id}_E - A)^p$ est bien définie puisque $\mathrm{id}_E - A$ est nilpotent comme $A - \mathrm{id}_E$. On a $(\mathrm{id}_E - A) \circ S = \sum_{p \geqslant 1} (\mathrm{id}_E - A)^p = S - \mathrm{id}_E$ donc $A \circ S = \mathrm{id}_E$ et de même $S \circ A = \mathrm{id}_E$, ce qui prouve que A est inversible et $S = A^{-1}$.

Question 9.

Soit g_0 unipotent, $G = \mathrm{gr}(g_0) = \{g_0^p \text{ tq } p \in \mathbb{Z}\}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $(g_0 - \mathrm{id}_E)^k = 0$. Le polynôme $P = (X-1)^k$ est annulateur de g_0 et scindé, donc g_0 est trigonalisable (quelque soit le corps de base). Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle g_0 est représenté par une matrice triangulaire supérieure T. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de g_0, donc sont des racines du polynôme annulateur P ; ils sont tous égaux à 1. Alors, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $T^p = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g_0^p)$ est aussi triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

Remarque, les hypothèses suivantes n'ont pas servi : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 2$.

Question 10.

Vérifié.

Question 11.

$\mathrm{tr}(g - \mathrm{id}_E)$ est la somme des valeurs propres de $g - \mathrm{id}_E$, toutes nulles, donc $\mathrm{tr}(g - \mathrm{id}_E) = 0$. Par linéarité de la trace, $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_E) = n$. Enfin $\mathrm{tr}((g - \mathrm{id}_E) \circ g') = \mathrm{tr}(g \circ g') - \mathrm{tr}(g') = n - n = 0$ car $g \circ g' \in G$.

Question 12.

L'irréductibilité passe évidement au sur-ensemble, donc si G est irréductible alors W l'est et de plus W est une sous-algèbre contenant id_E, donc $W = \mathcal{L}(E)$ d'après le résultat admis. Soit $g \in G$. Par linéarité de la trace, et sachant que $W \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\forall\ f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{tr}((g - \mathrm{id}_E) \circ f) = 0.$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g - \mathrm{id}_E) = (a_{ij})$. Pour $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, en choisissant pour f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $(\delta_{ik}\delta_{j\ell})$ où δ est le symbole de Kronecker, on obtient $a_{\ell k} = \mathrm{tr}((g - \mathrm{id}_E) \circ f) = 0$, ce qui prouve que $g = \mathrm{id}_E$, puis que $G = \{\mathrm{id}_E\}$. On en déduit que $\mathcal{L}(E) = W = \mathrm{vect}(G) = \{\lambda \mathrm{id}_E \text{ tq } \lambda \in \mathbb{C}\}$, ce qui impose $n \leqslant 1$ donc en fait $n = 1$.

Question 13.

On démontre par récurrence sur n que si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et G un sous-groupe de $GL(E)$ constitué d'éléments unipotents, alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ invariant par tous les éléments de G.

cas $n = 1$: le seul endomorphisme unipotent en dimension 1 étant id_E ; tout $x \in E \setminus \{0\}$ convient.

cas $n \geqslant 2$ quelconque, le résultat étant supposé démontré pour toutes les dimensions $p \in [\![1, n-1]\!]$: il n'est pas possible que G soit irréductible vu la question **12**. Soit donc F un sous-espace vectoriel de E non nul ni égal à E, stable par tous les éléments de G. On note $G' = \{g_{|F} \text{ tq } g \in G\}$. Il est clair que G' est un sous-groupe de $\mathcal{L}(F)$ constitué d'éléments unipotents, donc par hypothèse de récurrence il existe $x \in F \setminus \{0\}$ invariant par tous les éléments de G'. Ce vecteur est par construction dans $E \setminus \{0\}$ et est invariant par tous les éléments de G.

Remarque : la démonstration précédente dépend du choix $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ via la propriété admise en **12**, propriété visiblement fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: l'ensemble des endomorphismes d'un plan réel E ayant dans une base fixée une matrice de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est une sous-algèbre propre de $\mathcal{L}(E)$, irréductible et contenant id_E. Pourtant le résultat établi dans la question présente reste vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou plus généralement si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ quelconque.

Théorème : *soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \geqslant 1$, et G un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$ constitué de matrices unipotentes. Alors il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $Ax = x$ pour tout $A \in G$.*

Démonstration : soit $(A_1, \ldots, A_k)$ une famille finie d'éléments de G génératrice de $\mathrm{vect}(G)$. On va montrer ci-dessous qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ invariant par chaque A_i. Alors si $A \in G$, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que $A = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k$, donc $Ax = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)x$. Puisque A est unipotente, elle n'a que 1 comme valeur propre donc $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ et $Ax = x$.

Existence de $x \neq 0$ invariant par $A_1, \ldots, A_k$: on considère le système d'inconnue $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$(S) \iff \begin{cases} A_1 x = x, \\ \ldots \\ A_k x = x. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de nk équations à n inconnues, et il s'agit de démontrer que son rang est au plus égal à $n - 1$. On sait que (S) admet une solution non triviale dans $\mathbb{C}^n$, donc le rang de (S), en tant que système à coefficients complexes est au plus égal à $n - 1$. *Le rang de (S) en tant que système à coefficients dans $\mathbb{K}$ est le même* car ces deux rangs peuvent être calculés par l'algorithme du pivot de Gauss. Le théorème est démontré.

Question 14.

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante : *si G est un sous-groupe de matrices de $M(n, \mathbb{C})$ unipotentes alors il existe une matrice $P \in M(n, \mathbb{C})$ inversible telle que pour toute matrice $A \in G$, la matrice $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.* Remarquons que les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont alors nécessairement égaux à 1 car ce sont les valeurs propres de A, unipotente.

Cas $n = 1$: il n'y a rien à démontrer.

Cas $n \geqslant 2$, le résultat étant supposé acquis pour la dimension $n-1$: confondant $M(n, \mathbb{C})$ avec $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, on peut trouver d'après la question précédente un vecteur $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ invariant par tous les éléments de G. En complétant x en une base de $\mathbb{C}^n$ d'une manière quelconque, on obtient une matrice $Q \in M(n, \mathbb{C})$ inversible telle que pour tout $A \in G$, la matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

où $a \in M(1, n-1, \mathbb{C})$ et $A' \in M(n-1, \mathbb{C})$. Soit G' l'ensemble des matrices A' obtenues lorsque A décrit G. On a pour $A, B \in G$:

$$Q^{-1}ABQ = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}BQ) = \begin{pmatrix} 1 & aB' + b' \\ 0 & A'B' \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $A'B' \in G'$ lorsque $A' \in G'$ et $B' \in G'$. On montre de même que les éléments de G' sont inversibles et que leurs inverses appartiennent à G', donc G' est un sous-groupe de $M(n-1, \mathbb{C})$. Par ailleurs, notant I_p la matrice unité d'ordre p, on a pour $A \in G$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$Q^{-1}(A - I_n)^k Q = (Q^{-1}(A - I_n)Q)^k = \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 0 & (A' - I_{n-1})^k \end{pmatrix}$$

où $a_k \in M(1, n-1, \mathbb{C})$, donc A' est unipotente puisque A l'est.

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $R \in M(n-1, \mathbb{C})$ telle que pour toute matrice $A' \in G'$, la matrice $R^{-1}A'R$ est triangulaire supérieure. Donc, en posant $P = Q\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right) \in M(n, \mathbb{C})$, P est inversible et pour toute matrice $A \in G$, on a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & aR \\ 0 & R^{-1}A'R \end{pmatrix},$$

matrice triangulaire supérieure. Ceci achève la démonstration.

Remarque : on peut remplacer $\mathbb{C}$ par un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$ dans ce raisonnement, puisqu'on n'a utilisé que l'existence d'un vecteur non nul invariant par tous les éléments de G et que cette propriété passe à tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme on l'a vu à la question précédente.

Quatrième partie

Question 15ab.

Par propriété du produit matriciel, la j-ème colonne du produit AB est le produit de A par la j-ème colonne de B. On en déduit que les relations demandées, après décryptage, sont des lapalissades.

Question 15c.

Remarquons que L_i est un isomorphisme de E sur V_i. En particulier, $V_i \cap W = \mathrm{Im}(L_i) \cap W = L_i(L_i^{-1}(W))$. Soit $F = L_i^{-1}(W) = \{x \in E \text{ tq } L_i(x) \in W\}$. Comme W est un sous-espace vectoriel de $M(n, \mathbb{C})$ et L_i est linéaire, F est un sous-espace vectoriel de E. De plus, si $x \in F$ et $A \in W$, on a $L_i(A(x)) = AL_i(x)) \in W$ car W est stable par produit matriciel, donc $A(x) \in F$ et F est stable par tous les éléments de W. Par irréductibilité, on a $F = \{0\}$ ou $F = E$, d'où $V_i \cap W = L_i(F) = \{0\}$ ou V_i.

Question 16.

Question non triviale ... Voici une construction « parachutée » faute d'en avoir trouvé une plus naturelle :

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit W_i l'ensemble des matrices $X \in W$ dont les $i-1$ premières colonnes sont nulles (avec par convention $W_1 = W$). Si $A \in W$ et $X \in W_i$ alors $AX \in W_i$, donc l'ensemble des i-èmes colonnes des éléments X de W_i est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de W, c'est $\{0\}$ ou E. On note F_i ce sous-espace, $I = \{i \in [\![1, n]\!] \text{ tq } F_i = \{0\}\}$ et $W' = \sum_{i \in I} V_i$. Il est clair que W' est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par toutes les applications $\Phi(A)$, $A \in \mathcal{L}(E)$; *je dis que c'est un supplémentaire de W dans $\mathcal{L}(E)$.*

En effet, s'il existait $A \in W \cap W' \setminus \{0\}$, alors en notant i le plus petit numéro d'une colonne non nulle de A, on aurait $i \in I$ vu la définition de W' et $A \in W_i$ vu la définition de i, donc la i-ème colonne de A serait dans F_i qui est nul puisque $i \in I$, en contradiction avec le choix de i. Ceci prouve que $W \cap W' = \{0\}$.

Par ailleurs, si $A \in \mathcal{L}(E)$ est une matrice quelconque, on obtient une décomposition $A = B + C$ avec $B \in W$ et $C \in W'$ par l'algorithme suivant :

1) `Poser` $A_0 = A$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$.
2) `Pour` $i = 1, 2, \ldots, n$ `faire :`
   Ici les $i-1$ premières colonnes de A_{i-1} sont nulles, $B_{i-1} \in W$, $C_{i-1} \in W'$, et $A = A_{i-1} + B_{i-1} + C_{i-1}$.
   2.1) `si` $i \in I$, `soit` $X \in V_i$ `ayant même` i`-ème colonne que` A_{i-1},
   `poser` $A_i = A_{i-1} - X$, $B_i = B_{i-1}$, $C_i = C_{i-1} + X$;
   2.2) `sinon, soit` $X \in W_i$ `ayant même` i`-ème colonne que` A_{i-1},
   `poser` $A_i = A_{i-1} - X$, $B_i = B_{i-1} + X$, $C_i = C_{i-1}$.
   Ici les i premières colonnes de A_i sont nulles, $B_i \in W$, $C_i \in W'$, et $A = A_i + B_i + C_i$.
3) `On a` $A = B_n + C_n$, $B_n \in W$, $C_n \in W'$.

La matrice X définie en `2.2` existe car $i \notin I$, donc $F_i = E$. Il est ainsi prouvé que $W + W' = \mathcal{L}(E)$ et la construction est terminée.

Question 17.

D'après la question **6**, il suffit de montrer que $A_{i,j}$ commute avec tous les éléments de W. Soit donc $A \in W$ et $x \in E$. On décompose la matrice $L_i(x)$ selon $W \oplus W'$: $L_i(x) = X_i + Y_i$ avec $X_i \in W$ et $Y_i \in W'$. Alors $L_i(A(x)) = AL_i(X) = AX_i + AY_i$ et $AX_i \in W$, $AY_i \in W'$, donc $\pi(L_i(A(x))) = AX_i$. Soit $y \in E$ le vecteur dont les coordonnées forment la j-ème colonne de X_i. On a :

$$A_{i,j}(A(x)) = L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi(L_i(A(x))) = L_j^{-1} \circ P_j(AX_i) = L_j^{-1}(AL_j(y)) = A(y),$$
$$A(A_{i,j}(x)) = A(L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi(L_i(x))) = A(L_j^{-1} \circ P_j(X_i)) = A(L_j^{-1}(L_j(y))) = A(y).$$

Question 18.

Vérifié.

Question 19.

$\sum_i a_{i,j} e_i = \sum_i A_{i,j}(e_i) = L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi\big(\sum_i L_i(e_i)\big) = L_j^{-1}(L_j(e_j)) = e_j$, d'où $a_{i,j} = \delta_{i,j}$.

Question 20.

D'après la relation précédente, on a $P_j \circ \pi \circ L_i = \delta_{i,j} L_j$, d'où en sommant sur j :

$$\big(\sum_j P_j\big) \circ \pi \circ L_i = \sum_j P_j \circ \pi \circ L_i = \sum_j \delta_{i,j} L_j = L_i.$$

Or, $\sum_j P_j = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}$, donc finalement $\pi \circ L_i = L_i$ ce qui implique que $V_i \subset W$. Ceci ayant lieu pour tout i, on conclut : $\mathcal{L}(E) = \bigoplus_i V_i \subset W$ d'où l'égalité annoncée.