X 2002, deuxième épreuve. Corrigé par F. Doué.

Première partie

1°) Une base orthonormale vérifie clairement la condition (1) avec $\alpha = 1$. Plus généralement, une base orthogonale aussi, en prenant pour α le minimum des carrés des normes des vecteurs de base :

$$\|x\|^2 = \sum_j \left(x \mid \frac{e_j}{\|e_j\|}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\mathrm{Min}\,\|e_j\|^2} \sum_j \left(x \mid e_j\right)^2 \quad .$$

2°) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les e_j . Un vecteur x orthogonal à tous les e_j vérifie par (1) que $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. On en déduit $F^\perp = \{0\}$, soit $F = E$.

3°) Un calcul simple montre que $\displaystyle\sum_j \left(e_j \mid x\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \|x\|^2$, ainsi que $T = \frac{3}{2} \cdot id_E$.

4°) T est auto-adjoint, car l'expression $\big(T(x) \mid y\big) = \displaystyle\sum_j \left(x \mid e_j\right)\left(e_j \mid y\right)$ est symétrique en x et y .

On a $\big(T(x) \mid x\big) = \displaystyle\sum_j \left(x \mid e_j\right)^2 \geqslant \alpha\|x\|^2$ par (1) . On en déduit en particulier que $T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, donc T est inversible.

5°) On déduit de la question précédente que les valeurs propres de T sont $\geqslant \alpha > 0$: si $T(x) = \lambda x$, $\big(T(x) \mid x\big) = \lambda\|x\|^2 \geqslant \alpha\|x\|^2$, et on peut simplifier par $\|x\|^2 > 0$ puisqu'un vecteur propre est non nul par définition. Donc T est défini positif et le résultat demandé est du cours :

$$\|T\| = \underset{\lambda \in sp(T)}{\mathrm{Max}}\, \lambda = \mathrm{Max}\big\{\big(T(x) \mid x\big) : \|x\| = 1\big\} \quad .$$

6°) De même, T^{-1} est auto-adjoint et défini positif, puisque ses valeurs propres sont les $1/\lambda$, où λ valeur propre de T . On a donc

$$\beta = \mathrm{Max}\big\{\big(T^{-1}(x) \mid x\big) : \|x\| = 1\big\} = \|T^{-1}\| = \underset{\lambda \in sp(T)}{\mathrm{Max}}\, \frac{1}{\lambda} \quad .$$

Alors le β ainsi défini satisfait bien $\forall\, x \in E \;\; \big(T^{-1}(x) \mid x\big) \leqslant \beta\|x\|^2$, en effet, l'inégalité est triviale pour $x = 0$, et sinon, il suffit d'appliquer la définition de β au vecteur normé $\dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$ ainsi que la bilinéarité.
*Autre démonstration possible : par **4)** appliquée à $T^{-1}(x)$ on a $\big(T^{-1}(x) \mid x\big) \geqslant \alpha\|T^{-1}(x)\|^2$, d'où par Cauchy-Schwartz $\|T^{-1}(x)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|$ et $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Par Cauchy-Schwartz à nouveau $\big(T^{-1}(x) \mid x\big) \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\|^2$.*

7°) S'il y a égalité dans (1) , il y a également l'égalité $\forall\, x \in E \;\; \big(T(x) \mid x\big) = \alpha\|x\|^2$, et ceci prouve que les valeurs propres de T sont toutes égales à α . Comme T est diagonalisable car auto-adjoint, nécessairement, $T = \alpha.Id$.

Deuxième partie

8°) Si on pose $h = \displaystyle\sum_j h_j f_j$, alors $\Psi(h) = \displaystyle\sum_j h_j e_j$ convient pour définir Ψ .

En effet, alors, $\big(\Psi(h) \mid x\big) = \sum_j h_j\big(e_j \mid x\big)$, et par définition du produit scalaire canonique dans F , on a $\big(h \mid \Phi(x)\big)_F = \sum_j h_j\big(x \mid e_j\big)$. On a donc bien trouvé, par l'unicité admise, l'application Ψ .

D'autre part, $\Psi \circ \Phi$ redonne bien T :

$$\Psi \circ \Phi : x \overset{\Phi}{\longmapsto} \sum_j \big(x \mid e_j\big) f_j \overset{\Psi}{\longmapsto} \sum_j \big(x \mid e_j\big) e_j = T(x) \quad .$$

9°) Comme T^{-1} est auto-adjoint, $\big(x \mid \tilde{e}_j\big) = \big(T^{-1}(x) \mid e_j\big)$, donc on a en fait

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j \big(T^{-1}(x) \mid e_j\big) f_j = \Phi\big(T^{-1}(x)\big) \quad ,$$

c'est-à-dire $\tilde{\Phi} = \Phi \circ T^{-1}$.

On a alors immédiatement $\operatorname{Im}\tilde{\Phi} = \operatorname{Im}\Phi$, ainsi que la décomposition demandée

$$F = \operatorname{Im}\Phi \overset{\perp}{\oplus} \big(\operatorname{Im}\Phi\big)^{\perp} = \operatorname{Im}\tilde{\Phi} \overset{\perp}{\oplus} \big(\operatorname{Im}\Phi\big)^{\perp} \quad .$$

10°) On demande ici de minimiser la norme de h (ou encore $\|h\|^2$) lorsque $h = \sum h_j f_j$ vérifie $\Psi(h) = x$. On sait que le minimum est unique, obtenu lorsque h est la projection orthogonale de 0 sur le sous-espace affine $V_x = \Psi^{-1}\big(\{x\}\big)$. Remarquons en effet que V_x est non vide puisque $\Psi \circ \Phi = T$ implique en particulier que Ψ est surjective.

Or, par **8)** justement, on a $\Psi\big(\tilde{\Phi}(x)\big) = (\Psi \circ \Phi \circ T^{-1})(x) = x$, donc $h = \tilde{\Phi}(x) \in V_x$. De plus, il se trouve que $\operatorname{Ker}\Psi = (\operatorname{Im}\Phi)^{\perp}$: en effet, l'égalité $\forall\, x \in E \quad \big(\Psi(h) \mid x\big) = \big(h \mid \Phi(x)\big)_F$ montre que tous les éléments de $\operatorname{Ker}\Psi$ sont orthogonaux à $\operatorname{Im}\Phi$, et, réciproquement, que tout élément $h \in F$ orthogonal à $\operatorname{Im}\Phi$ vérifie que $\Psi(h)$ est orthogonal à E tout entier, c'est-à-dire nul.

On en déduit que $V_x = \tilde{\Phi}(x) \overset{\perp}{+} \big(\operatorname{Im}\Phi\big)^{\perp}$, et donc *le* vecteur $h \in V_x$ minimisant $\|h\|^2$ est précisément $\tilde{\Phi}(x) = \Phi\big(T^{-1}(x)\big)$. La valeur minimale des nombres $\sum_j h_j^2$ est alors

$$\big\|\tilde{\Phi}(x)\big\|_F^2 = \sum_j \big(x \mid \tilde{e}_j\big)^2 = \sum_j \big(T^{-1}(x) \mid e_j\big)^2 = \big(x \mid T^{-1}(x)\big) \quad .$$

(La dernière égalité provient de la relation $\big(T(y) \mid y\big) = \sum_j \big(y \mid e_j\big)^2$ appliquée à $y = T^{-1}(x)$).

11°)

a) x se décompose de manière unique dans une base, donc un seul $h = \sum_j h_j f_j$ possible !

Remarquons que dans ce cas, par (1) appliquée à $T^{-1}(x)$,

$$\|h\|^2 = \sum_j \big(T^{-1}(x) \mid e_j\big)^2 \geqslant \alpha \|T^{-1}(x)\|^2 \geqslant \frac{\alpha}{\lambda_{max}^2}\|x\|^2 \quad ,$$

où λ_{max} désigne la plus grande valeur propre de T ...

b) Ce cas est identique au précédent, avec en plus que $T = Id = T^{-1}$. On a donc ici que le minimum est $\|h\|^2 = \|x\|^2$.

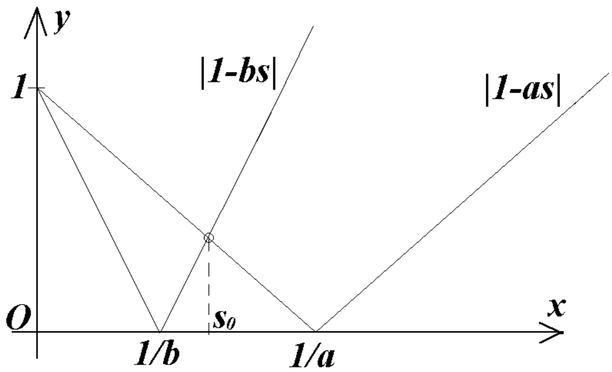
c) On a vu que dans ce cas $T = \alpha Id$, donc le minimum est

$$\|h\|^2 = \sum_j \big(\frac{1}{\alpha}x \mid e_j\big)^2 = \frac{1}{\alpha^2}\sum_j \big(x \mid e_j\big)^2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\|^2 \quad .$$

Troisième partie

12°) T , auto-adjoint défini positif, est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}_v$ orthonormée de vecteurs propres . On voit alors que a est la plus petite valeur propre de T et b la plus grande. Dans la base $\mathcal{B}_v$, la matrice de $V_s = Id - sT$ est diagonale aussi, et on voit que $\|V_s\|$ est le maximum des valeurs absolues $|1 - s\lambda|$ lorsque λ décrit le spectre de T . Puisque $\lambda \in [a,b]$, ce maximum est atteint pour $\lambda = a$ ou pour $\lambda = b$. Donc $\|V_s\| = \mathrm{Max}\big(|1-as|, |1-bs|\big)$.

13°) Le graphe sur $\mathbb{R}_+^*$ des deux fonctions $s \mapsto |1-as|$ et $s \mapsto |1-bs|$ est représenté ci-dessous :



Le minimum de la fonction $s \mapsto \|V_s\|$ est donc atteint pour le point s_0 vérifiant $1 - as_0 = bs_0 - 1$, soit $s_0 = \dfrac{2}{a+b}$. La valeur du minimum est alors $C = \dfrac{b-a}{a+b}$. Comme $b \geqslant a > 0$, on a bien $0 \leqslant C < 1$. De plus, C est nul si et seulement si $a = b$, mais dans ce cas toutes les valeurs propres de T sont égales (à a) et $T = a.Id$.

14°) On a $U(x) - U(x') = V_s(x - x')$ (les $s_0 y$ s'éliminent). Donc, par définition d'une norme triple subordonnée, $\|U(x) - U(x')\| \leqslant \|V_{s_0}\|.\|x - x'\| \leqslant C\|x - x'\|$.

15°) Comme $C < 1$, l'application U est donc contractante, et l'algorithme de point fixe donné par $x_n = U^n(x_0)$ converge vers l'unique point fixe de U . Rappelons pour mémoire les étapes de cette démonstration :

- la suite (x_n) est de Cauchy car

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| \leqslant \sum_{k=1}^{p} C^{n+k-1}\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{C^n}{1-C}\|x_1 - x_0\| \quad ;$$

- l'espace vectoriel E est complet car de dimension finie, donc (x_n) converge vers $c \in E$;
- c est point fixe de U car U est continue et $x_{n+1} = U(x_n)$;
- le point fixe est unique par C-contractance de U , $0 \leqslant C < 1$.

Or, puisque $s_0 \neq 0$, $x = U(x) = x + s_0\big(y - T(x)\big) \Leftrightarrow y = T(x)$, donc l'unique point fixe de U est aussi l'unique antécédent de y par T . On a donc bien construit une suite x_n convergeant (avec une rapidité “optimale” en $O(C^n)$) vers l'antécédent de y cherché.

Quatrième partie

16°)

a) On a $\|(id_E - sT)(x)\|^2 = \|x\|^2 - 2s\big(x \mid T(x)\big) + s^2\|T(x)\|^2$. Or, puisque T est supposée continue, T admet une norme triple subordonnée $\|T\| = b$, d'où $\|T(x)\| \leqslant b\|x\|$. Si, de plus, on fait l'hypothèse supplémentaire que les réels $\big(x \mid T(x)\big)$, x variant sur la sphère unité $\|x\| = 1$, admettent un minorant $a > 0$, on pourra écrire :

$$\forall\, x \in E \quad \|x\| = 1 \Rightarrow \|(id_E - sT)(x)\|^2 \leqslant 1 - 2as + s^2b^2 \quad .$$

Une condition suffisante pour que $\|id_E - sT\|^2 \leqslant 1 - 2as + b^2 s^2$ est donc que $\forall\, x \in E \ \ \|x\| = 1 \Rightarrow \big(x \bigm| T(x)\big) \geqslant a > 0$.

b) La fonction $s \mapsto 1 - 2as + b^2 s^2$ est strictement décroissante, donc < 1 , sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{a}{b^2}\right]$ (et reste évidemment positive). Pour $s = s_0 = \dfrac{a}{b^2}$ on a donc une valeur "optimale" rendant l'application $id_E - s_0 T$ contractante.
Si E est supposé complet, le même raisonnement que ci-dessus en troisième partie s'applique sans changement et donne alors pour tout $y \in E$ l'existence et l'unicité d'un antécédent x à y par T .
On a donc démontré :
si E est préhilbertient complet, tout $T \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifiant la condition

$$\exists\, a > 0 \ \ \forall\, x \in E \ \ \|x\| = 1 \Rightarrow \big(x \bigm| T(x)\big) \geqslant a$$

est bijectif.

⁂