ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Thème : étude de la meilleure approximation sur $]0,1[$ *d'une fonction* f *donnée par une fonction constante* c*, au sens des moindres carrés dans la première partie, puis au sens de la moindre moyenne dans le reste du problème. On apprend, dans le cas* f *monotone par morceaux, que* c *est une constante approchant au mieux* f *au sens de la moindre moyenne si et seulement si les ensembles* $\{t \in]0,1[\text{ tq } f(t) < c\}$ *et* $\{t \in]0,1[\text{ tq } f(t) \leqslant c\}$ *ont des mesures encadrant* $\frac{1}{2}$ *(3ème partie), que* c *est unique si de plus* f *est continue, et que l'application* $f \longmapsto c$ *est en quelque sorte continue par rapport à* f *(4ème partie). Problème très intéressant, progressif et sans difficulté insurmontable.*

Première partie

Question 1.

$0 \leqslant w_n(a_n-1)^2 + w_n(a_n+1)^2 = 2w_na_n^2 + 2w_n$, terme général d'une série convergente, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(a_n-1)^2$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(a_n+1)^2$ convergent, et par différence, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 4w_na_n$ converge aussi. On en déduit par linéarité que la série définissant $D_a(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_na_n^2$ et $\beta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_na_n$. On a alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_na_n^2 - 2x\sum_{n=0}^{\infty} w_na_n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \alpha - \beta^2 + (x-\beta)^2.$$

Ainsi, $D_a(x)$ est minimal pour $x = \beta$ et $\min D_a = \alpha - \beta^2$, quantité positive vu la définition de D_a.

Question 2.

Les calculs sont analogues. On obtient pour $x \in \mathbb{R}$:

$$D_f(x) = \int_{t=0}^{1} f^2(t)\,\mathrm{d}t - \Big(\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 + \Big(x - \int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2,$$

et D_f est minimale pour $x = \displaystyle\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, avec $\min D_f = \displaystyle\int_{t=0}^{1} f^2(t)\,\mathrm{d}t - \Big(\int_{t=0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \geqslant 0$.

Deuxième partie

Question 3.

L'intégrale définissant Δ converge par inégalité triangulaire.

Question 4a.

Convexité : soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t, \tau \in [0,1]$. On a, par inégalité triangulaire :

$$|f(t) - \tau x - (1-\tau)y| = |\tau(f(t)-x) + (1-\tau)(f(t)-y)| \leqslant \tau|f(t)-x| + (1-\tau)|f(t)-y|.$$

En intégrant par rapport à t on en déduit $\Delta(\tau x + (1-\tau y) \leqslant \tau\Delta(x) + (1-\tau)\Delta(y)$, ce qui prouve la convexité de Δ.

Continuité : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$ on a $\big||f(t)-x| - |f(t)-y|\big| \leqslant |x-y|$, ce qui montre, en intégrant par rapport à t, que Δ est 1-lipschitzienne et donc continue. On peut aussi remarquer que la convexité sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité, mais ce dernier résultat n'est pas explicitement au programme de MP*.

Question 4b.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,1[$ on a $|f(t)-x| \geqslant |x| - |f(t)|$ d'où $\Delta(x) \geqslant |x| - \int_{t=0}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[|x|\to\infty]{} +\infty$.

Question 5.

Soit $K = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leqslant \Delta(0)\}$. K est un fermé de $\mathbb{R}$ par continuité de Δ, non vide par construction, et K est borné d'après la question précédente. Donc K est compact et $\Delta_{|K}$ admet un minimum $V \leqslant \Delta(0)$. On a alors $\Delta(x) \geqslant V$ pour tout $x \in K$ par définition de V, et aussi $\Delta(x) \geqslant \Delta(0) \geqslant V$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus K$ par définition de K. Ceci prouve que $\min \Delta = V$. Par ailleurs, $M = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) = V\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \Delta(x) \leqslant V\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle (et même un segment par compacité).

Question 6a.

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \text{d'où } V = \tfrac{1}{2} \text{ et } M = [0,1].$$

Question 6b.

$$\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} - x + x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \text{d'où } V = \tfrac{1}{4} \text{ et } M = \{\tfrac{1}{2}\}.$$

Troisième partie

Question 7.

f étant monotone par morceaux, $f^{-1}(J)$ est union d'un nombre fini d'intervalles donc χ_J est une fonction en escalier.

Question 8a.

Si J_1, J_2 sont deux intervalles disjoints dont la réunion est un intervalle alors $\chi_{J_1 \cup J_2} = \chi_{J_1} + \chi_{J_2}$, d'où l'on déduit $\lambda(J_1 \cup J_2) = \lambda(J_1) + \lambda(J_2)$ par intégration. Le cas général se traite de même ou s'en déduit par réccurrence.

Question 8b.

Soit (J_n) une suite croissante d'intervalles et $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Alors la suite de fonctions (χ_{J_n}) converge simplement en croissant vers χ_J, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone.

Question 8c.

Même raisonnement, la suite (χ_{J_n}) étant ici décroissante.

Question 9a.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|f - x| = (x - f)\chi_{J_1} + (f - x)\chi_{J_2} + (f - x)\chi_{J_3},$$
$$|f - x - \varepsilon| = (x + \varepsilon - f)\chi_{J_1} + (x + \varepsilon - f)\chi_{J_2} + (f - x - \varepsilon)\chi_{J_3}$$

(égalité entre fonctions de $t \in]0,1[$). En soustrayant membre à membre puis en intégrant sur $]0,1[$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(x+\varepsilon) - \Delta(x) &= \int_{t=0}^{1} \varepsilon\chi_{J_1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1} (2x - 2f(t) + \varepsilon)\chi_{J_2}(t)\,\mathrm{d}t \int_{t=0}^{1} (-\varepsilon)\chi_{J_3}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon(\lambda(J_1) + \lambda(J_2) - \lambda(J_3)) + 2\int_{t=0}^{1} (x - f(t))\chi_{J_2}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation demandée.

Question 9b.

On a $-\varepsilon \chi_{J_2} \leqslant (x-f)\chi_{J_2} \leqslant 0$ (inégalité entre fonctions de t) d'où :

$$\left| \frac{\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)}{\varepsilon} - \lambda(J_1)+\lambda(J_3) \right| \leqslant \lambda(J_2)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$. Dans cette inégalité, J_1 est fonction de x seul, et J_2, J_3 sont fonction de x et ε. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on considère une suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant. La suite des intervalles J_2 correspondants est décroissante d'intersection vide, et la suite des intervalles J_3 est croissante de réunion $K =]x, +\infty[$. D'après les questions **8b** et **8c** on a donc $\lambda(J_2) \longrightarrow 0$ et $\lambda(J_3) \longrightarrow \lambda(K)$. Ceci prouve que :

$$\frac{\Delta(x+\varepsilon_n)-\Delta(x)}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[).$$

Cette limite ayant lieu pour toute suite (ε_n) tendant vers 0^+ en décroissant, on en déduit :

$$\frac{\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[),$$

par une adaptation immédiate de la caractérisation séquentielle des limites. Ainsi, Δ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_d(x) = \lambda(]-\infty,x]) - \lambda(]x,+\infty[)$.

Question 9c.

En remplaçant f par $-f$ et x par $-x$ dans le raisonnement précédent, on a de même : Δ est dérivable à gauche sur $\mathbb{R}$, et $\Delta'_g(x) = \lambda(]-\infty,x[) - \lambda([x,+\infty[)$.

Question 9d.

On a $\Delta'_d(x) - \Delta'_g(x) = 2\lambda(\{x\})$ donc Δ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que l'équation $f(t) = x$ admet un nombre fini de solutions (sachant que f est monotone par morceaux). Les exemples étudiés au **6** confirment ce résultat.

Question 10a.

D'après **8b** et **8c**, on a $\phi(x+0) = \phi(x)$ et $\phi(x-0) = \lambda(]-\infty,x[) = \phi(x) - \lambda(\{x\})$.

Question 10b.

On note $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \phi(x) \geqslant \frac{1}{2}\}$. $\phi(x) = \lambda(]-\infty,x])$ est clairement une fonction croissante de x, est continue à droite d'après la question précédente, et $\phi(-n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc A est un intervalle minoré contenant sa borne inférieure : $A = [\alpha, +\infty[$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

De même, $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda(]-\infty,x[) \leqslant \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda([x,+\infty[) \geqslant \frac{1}{2}\}$ est un intervalle de la forme $]-\infty,\beta]$ pour un certain réel β. Donc $N = A \cap B$ est un intervalle, et s'il est non vide alors $N = [\alpha,\beta]$ est fermé borné.

Remarque : s'il existe x tel que $\beta < x < \alpha$ alors on a $\lambda(]-\infty,x]) < \frac{1}{2} < \lambda(]-\infty,x[)$, ce qui est absurde. Ceci prouve que l'on a en fait $\alpha \leqslant \beta$, d'où $N \neq \varnothing$.

Question 10c.

On conserve les notations de la réponse précédente. Si $x < \alpha$ alors $\lambda(]-\infty,x]) < \frac{1}{2}$ d'où $\Delta'_d(x) < 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit on a $\Delta(x+\varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$. De même, si $x > \beta$ alors $\Delta'_g(x) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit on a $\Delta(x-\varepsilon) < \Delta(x)$ d'où $x \notin M$ encore. Ceci prouve que $M \subset [\alpha,\beta] = N$.

Lorsque $\alpha = \beta$ on a alors $M = N$ car $M \neq \varnothing$.

Lorsque $\alpha < \beta$, si $\alpha < x < y < \beta$ alors on a $\frac{1}{2} \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(y-0) \leqslant \frac{1}{2}$, d'où $\phi(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, ϕ est constante sur $]\alpha,\beta[$ et donc $\phi(x-0) = \phi(x) = \frac{1}{2}$ (ceci répond à la dernière partie de la question). De plus, $\Delta'_g(x) = \Delta'_d(x) = 0$: Δ est constante sur $[\alpha,\beta]$. La valeur constante en question est V puisque $M \subset [\alpha,\beta]$, d'où $M = [\alpha,\beta] = N$ dans ce cas encore.

Quatrième partie

Question 11a.

Si $x \notin f(I)$ alors, f étant continue, on a $f(I) \subset]-\infty, x[$ ou $f(I) \subset]x, +\infty[$. Dans le premier cas, on a $\Delta'_g(x) = 1$ d'où $\Delta(x-\varepsilon) < \Delta(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit, donc $x \notin M_f$. Dans le second cas on a $\Delta'_d(x) = -1$ et on conclut de même.

Question 11b.

Si M_f n'est pas réduit à un point, alors c'est un intervalle non trivial $[\alpha, \beta]$ et ϕ est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur cet intervalle. $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs vaut $\frac{1}{2}$, et ces intervalles sont des fermés relatifs de $]0, 1[$ par continuité de f. De même, $f^{-1}(]-\infty, \beta])$ est une réunion finie d'intervalles fermés relatifs de $]0, 1[$, qui contiennent les intervalles constituant $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$, et dont la somme des longueurs vaut aussi $\frac{1}{2}$. Ceci implique $f^{-1}(]-\infty, \alpha]) = f^{-1}(]-\infty, \beta])$ donc les réels $x \in]\alpha, \beta[$ n'ont pas d'antécédants par f, ce qui contredit l'inclusion $M_f \subset f(I)$.

Question 11c.

On a $V_f = \min \Delta \leqslant \Delta(0) = \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit $L = \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Pour $|x| > 2L$ on a : $\displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t) - x|\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{t=0}^{1} (|x| - |f(t)|)\,\mathrm{d}t > L \geqslant V_f$, donc $x \neq m_f$. Par contraposée, $m_f \leqslant 2 \displaystyle\int_{t=0}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Question 12.

D'après la question précédente, $|m_n| \leqslant 2\|g_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\|g\|_1$ donc la suite (m_n) est bornée, et elle admet des valeurs d'adhérence. Soit $m = \lim\limits_{k\to\infty} m_{n_k}$ l'une de ces valeurs d'adhérence. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\|g - x\|_1 - \|g - m_{n_k}\|_1 \geqslant (\|g_{n_k} - x\|_1 - \|g - g_{n_k}\|_1) - (\|g_{n_k} - m_{n_k}\|_1 + \|g - g_{n_k}\|_1) \geqslant -2\,\|g - g_{n_k}\|_1.$$

En faisant tendre k vers l'infini on obtient $\|g - x\|_1 \geqslant \|g - m\|_1$ ce qui prouve que $m \in M_g$.

* *
*