(X 2001, Première composition.)

Première partie

1°) On suppose qu'il existe une série entière solution de (E) de rayon de convergence $R > 0$. La série entière se dérive terme à terme sur $]-R, R[$, donc le premier membre de (E) est une série entière, or par théorème une telle série est identiquement nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc, en regardant le coefficient de x^n , $n \geqslant 2$, l'équation (E_s) impose la relation :

$$\begin{aligned} & -2n(n-1)a_n + 2(n+1)na_{n+1} + (2s+1)(n+1)a_{n+1} - (2s+3)na_n - sa_n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (n+1)(2n+1)a_{n+1} - (2n+1)(s+n)a_n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} = \frac{(2n+1)(s+n)}{(n+1)(2s+2n+1)}.a_n \quad . \end{aligned}$$

En fait, on voit que la relation reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque les coefficients provenant des termes en x^2 et/ou en x s'annulent respectivement pour $n = 1$ et/ou $n = 0$. De plus, le dénominateur de la fraction ci-dessus ne s'annulle jamais puisqu'on a supposé s non de la forme $-\frac{2n+1}{2}$.

2°) On voit d'après la relation ci-dessus (par récurrence à partir de $a_0 = 1 \neq 0$) que si $s \notin -\mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Dans ce cas, la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(s+n)}{(n+1)(2s+2n+1)}$ est donnée par les termes de plus haut degré en n , c'est 1 .

3°) D'après la règle de d'Alembert, si $s \notin -\mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série définie par la relation du **1)** est 1 . Mais si s est de la forme $-n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, on voit que tous les coefficients déterminés par cette relation sont nuls à partir de $n_0 + 1$, donc en fait la série est un polynôme de degré n_0 , et son rayon de convergence est infini. Dans tous les cas, comme la relation du **1)** est équivalente à l'équation (E_s) , la série entière obtenue est bien solution de (E_s) sur son domaine de convergence.

4°) On a tout d'abord (par récurrence) que les fonctions $s \mapsto a_n(s)$ sont des fractions rationnelles à dénominateurs ne s'annullant pas sur S , donc continues sur S .
Soient α un réel de $]0, 1[$ et N un entier > 0 fixés. On note $D(O, N)$ le disque du plan complexe défini par $|z| \leqslant N$, et on considère l'ensemble

$$A = \big(D(O, N) \cap S\big) \times [-\alpha, \alpha] \subset S \times]-1, 1[\quad .$$

Pour tout $(s, x) \in A$, on a à partir de $n \geqslant N$ que $0 \leqslant |s+n| \leqslant \left|s+n+\frac{1}{2}\right|$, et donc, vu $\frac{2n+1}{n+1} \leqslant 2$, on a $\frac{|a_{n+1}(s)|}{|a_n(s)|} \leqslant 1$. Par suite, pour $n \geqslant N$ et $(s, x) \in A$, on a la majoration normale $|a_n(s)x^n| \leqslant |a_N|\alpha^n$. Il s'ensuit que la série reste $|R_N(s, x)| = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(s)x^n$ converge normalement donc uniformément sur A . Comme, par produit de fonctions continues, les fonctions $(s, x) \mapsto a_n(s)x^n$ sont continues sur A , on en déduit par théorème que $R_N(s, x)$ est continue sur A . Par somme (finie) de fonction continues, $f_s(x)$ est aussi continue sur A , et comme tout point de $S \times]-1, 1[$ est inclus dans un certain ensemble A , la fonction $(s, x) \mapsto f_s(x)$ est continue sur $S \times]-1, 1[$.

5°)

a) Si on pose $F(t) = t^s f(t^2)$ avec f de classe C^2 , on a

$$F'(t) = st^{s-1}f(t^2) + 2t^{s+1}f'(t^2) \text{ et } F''(t) = s(s-1)t^{s-2}f(t^2) + (4s+2)t^s f'(t^2) + 4t^{s+2}f''(t^2) \quad .$$

Après calculs, on voit ainsi que le premier membre de (E'_s) devient après substitution :

$$2t^{s+2}\Big(2t^2(1-t^2)f''(t^2) + \big(2s+1-(2s+3)t^2\big)f'(t^2) - sf(t^2)\Big) \quad .$$

Comme onpeut simplifier par $t^{s+2} \neq 0$, on obtient donc que f est solution de (E_s) sur $]0, 1[$ si et seulement si $F(t) = t^s f(t^2)$ est solution de (E'_s) sur $]0, 1[$.

b) Les équations (E'_s) et (E'_{1-s}) sont identiques, de plus, si $s \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, ni s ni $1-s$ ne sont dans $-\mathbb{N} - \frac{1}{2}$. Donc d'après ce qui précède, $t^s f_s(t^2)$ et $t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ sont solutions de (E_s) . Or (E_s) est une équation linéaire homogène du second ordre résolue en F'' sur $]0,1[$. On sait (théorème de Cauchy-linéaire) que ses solutions forment un espace vectoriel de dimension deux, il suffit donc de montrer que $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$ et $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ sont linéairement indépendantes. Or ces fonctions sont non nulles (par continuité, puisque $f_s(0) = f_{1-s}(0) = 1$), donc une relation de liaison se traduirait par une égalité de la forme

$$(RL) \qquad t^s f_s(t^2) = \alpha . t^{1-s} f_{1-s}(t^2) \Longleftrightarrow t^{1-2s} f_s(t^2) = \alpha f_{1-s}(t^2) \quad ,$$

avec $\alpha \neq 0$. Or comme $s \neq \frac{1}{2}$, ceci est impossible. En effet, quand $t \to 0$, t^{1-2s} a soit une limite nulle (cas $\mathrm{Re}(1-2s) > 0)$, soit pas de limite (cas $\mathrm{Re}(1-2s) \leqslant 0$), et $f_s(t^2)$ et $f_{1-s}(t^2)$ ont toutes deux pour limite 1 , donc dans tous les cas la relation (RL) aboutirait à une contradiction à la limite $t \to 0$.

Deuxième partie

6°)

a) Pour $z \in \mathcal{H}$, l'égalité $z \sin\theta + \cos\theta = 0$ impliquerait (partie imaginaire) $\sin\theta = 0$ qui impliquerait à son tour $\cos\theta = 0$, donc cette égalité est impossible et le nombre complexe $A_\theta(z) = \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$ est bien défini. De plus, sa partie imaginaire vaut, après calculs en remplaçant z par $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{Im}\big(A_\theta(z)\big) = \frac{y}{|z\sin\theta + \cos\theta|^2} = \frac{y}{(x\sin\theta + \cos\theta)^2 + y^2\sin^2\theta} > 0 \quad ,$$

donc $A_\theta(z) \in \mathcal{H}$.

b) Vérifions les deux propriétés d'action d'un groupe. D'abord, clairement, $A_0(z) = z$ (action de l'élément neutre). Puis, pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les formules d'addition :

$$\begin{aligned} A_{\theta'}\big(A_\theta(z)\big) &= \frac{\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} . \cos\theta' - \sin\theta'}{\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta} . \sin\theta' + \cos\theta'} \\ &= \frac{z\cos(\theta + \theta') - \sin(\theta + \theta')}{z\sin(\theta + \theta') + \cos(\theta + \theta')} \\ &= A_{\theta + \theta'}(z) \quad , \quad cqfd. \end{aligned}$$

c) Appelons D le dénominateur de A_θ ; $D = z\sin\theta + \cos\theta$. On a après calculs

$$\big|A_\theta(z)\big|^2 + 1 = \frac{|z\cos\theta - \sin\theta|^2 + |z\sin\theta + \cos\theta|^2}{|D|^2} = \frac{|z|^2 + 1}{|D|^2} \quad .$$

Or on a vu que $\mathrm{Im}\big(A_\theta(z)\big) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|D|^2}$, donc il en résulte bien que

$$c\big(A\theta(z)\big) = \frac{\big|A_\theta(z)\big|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}\big(A_\theta(z)\big)} = \frac{|z|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}(z)} = c(z) \quad .$$

d) Par action de groupe on a $A_\theta(z) = A\theta'(z) \Leftrightarrow A_{\theta - \theta'}(z) = z$. Or, en posant $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} A_\theta(z) = z \Longleftrightarrow z\cos\theta - \sin\theta &= z(z\sin\theta + \cos\theta) \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} x\cos\theta - \sin\theta &= x(x\sin\theta + \cos\theta) - y^2\sin\theta \quad (1) \\ y\cos\theta &= xy\sin\theta + y(x\sin\theta + \cos\theta) \quad (2) \end{cases} \end{aligned} \quad .$$

L'équation (2) implique $xy\sin\theta = 0$, soit $x = 0$ ou $\theta = 0\ [\pi]$. Mais si $x = 0$ avec $\pi \neq 0\ [\pi]$, l'équation (1) implique alors $y^2 = 1$, soit, puisque $y > 0$, $y = 1$ et finalement $z = i$. Donc on a bien que, si $z \neq i$, les équations (1) et (2) impliquent $\theta = 0\ [\pi]$.
Réciproquement, il est évident que si $\theta = 0\ [\pi]$, alors $A_\theta(z) = z$.

7°)

a) Comme c est invariante par la transformation A_θ , c est constante sur une orbite. Donc tous les points $z = x + iy$ de l'orbite de z_0 vérifient

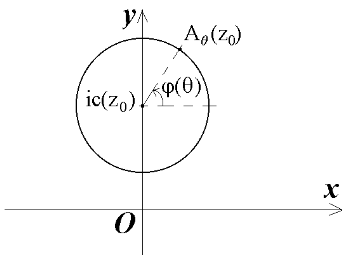
$$\begin{aligned} c(z) = c(z_0) &\iff \frac{|z|^2+1}{2y} = c(z_0) \\ &\iff x^2 + \big(y - c(z_0)\big)^2 = c(z_0)^2 - 1 \quad , \end{aligned}$$

or cette dernière équation est celle d'un cercle de centre de coordonnées $\big(0, c(z_0)\big)$, c'est-à-dire d'affixe $c(z_0)i$, et de rayon $\sqrt{c(z_0)^2 - 1}$.
Remarquons de plus que $c(z_0) - 1 > 0$. On a en effet les inégalités

$$c(x+iy) = \frac{x^2+y^2+1}{2y} \overset{(1)}{\geqslant} \frac{1}{2}\Big(y + \frac{1}{y}\Big) \overset{(2)}{\geqslant} 1 \quad .$$

Or, si $x \neq 0$, l'inégalité (1) est stricte, et si $y \neq 1$, l'inégalité (2) est stricte (elle équivant en effet à $(y-1)^2 > 0$).

b) Pour montrer que tout le cercle est atteint, nous allons utiliser le deuxième théorème du relèvement. La fonction $\theta \mapsto A_\theta(z_0)$ est de classe au moins C^1 sur $\mathbb{R}$, comme quotient de deux fonctions C^1 avec un dénominateur ne s'annulant pas, donc, d'après la remarque ci-dessus, la fonction $g : \theta \mapsto \dfrac{A_\theta(z_0) - ic(z_0)}{\sqrt{c(z_0)^2-1}}$ aussi. Comme on a constamment $|g(\theta)| = 1$, la fonction g se relève en $e^{i\varphi(\theta)}$ avec φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, par **6)d)**, g est injective sur $[0, \pi[$ (par exemple), donc φ a fortiori aussi. Or une fonction continue injective est strictement monotone. De plus on a $g(0) = g(\pi)$, ce qui impose $\varphi(0) = \varphi(\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nécessairement dans cette dernière relation $k \neq 0$, donc φ décrit un intervalle d'amplitude au moins 2π , i.e. tout le cercle est atteint.



8°)

a) En utilisant la formule donnée dans l'énoncé on trouve après calculs :

$$J(t,\theta) = \frac{(1-t^2)}{(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta)^2} \quad .$$

On remarque que ce jacobien est $\neq 0$ lorsque $t \in]0,1[$.

b) <u>Assertion (1)</u> : $U\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)$ est la réunion des cercles C_t , $t \in]0,1[$, de centres $i\frac{t^2+1}{2t}$ et de rayons respectifs $\frac{1-t^2}{2t}$.
Or un point $z \in C_t$ s'écrit sous la forme $z = i\frac{t^2+1}{2t} + \frac{1-t^2}{2t}e^{i\alpha}$, d'où on voit que $z + i = \frac{1+t}{2t}\Big((1-t)e^{i\alpha} + i(1+t)\Big)$ et $z - i = \frac{1-t}{2t}\Big((1+t)e^{i\alpha} + i(1-t)\Big)$, et finalement

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \Big(\frac{1-t}{1+t}\Big)^2 \frac{(1+t)^2\cos^2\alpha + \big((1+t)\sin\alpha + (1-t)\big)^2}{(1-t)^2\cos^2\alpha + \big((1-t)\sin\alpha + (1+t)\big)^2} = \Big(\frac{1-t}{1+t}\Big)^2 \quad .$$

On en conclut que C_t est exactement le cercle des points z vérifiant $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1-t}{1+t} = cste$ (on sait que c'est un cercle "s'enroulant" autour du point i et situé dans le demi-plan des $y > 0$ si la $cste$ est < 1). Donc déjà $U\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big) \subset \mathcal{H}'$. Mais réciproquement, pour tout point de $\mathcal{H}'$ on peut définir $k = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ avec $0 < k < 1$, donc ce point est sur le cercle C_t tel que $k = \frac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{1-k}{1+k}$.
<u>Assertion (2)</u> : On vient de voir que si $U(t,\theta) = U(t',\theta') = z$, alors en posant $k = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ on a $t = t' = \frac{1-k}{1+k}$. Mais ensuite, on sait d'après **6)d)** que $U(t,\theta) = U(t,\theta') \Leftrightarrow \theta - \theta' = 0\ [\pi]$.

Troisième partie

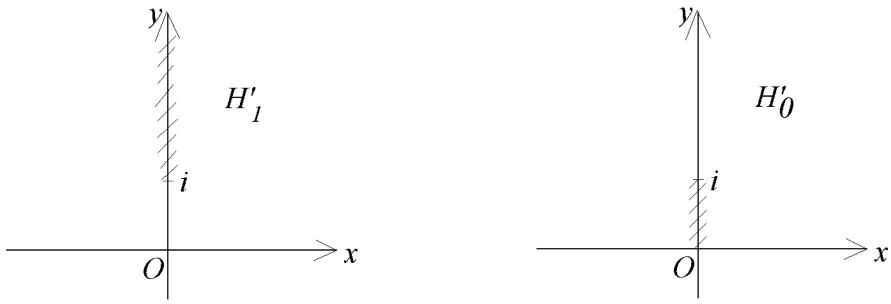
9°) Par les théorèmes généraux, U est une fonction C^∞ sur $\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)$, donc, pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$, $\psi = \varphi\circ U$ est C^∞ par composition. De plus elle est périodique de période π par rapport à θ puisque U l'est (**8)b)**). Donc V va bien de $C^\infty\big(\mathcal{H}'\big)$ dans $C^\infty\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)_{per}$. De plus, V est clairement une application linéaire par définition de la somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par une constante.
V est injective par surjectivité de U : si $\varphi_1\circ U = \varphi_2 \circ U$, φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathcal{H}' = U\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)$.
Montrons que V est surjective. U vérifie, par **8)** les hypothèses du théorème d'inversion globale (injectivité et jacobien non nul) sur $]0,1[\times]0,\pi[$ et sur $]0,1[\times]-\pi/2,\pi/2[$. On a $U(t,\pi)=it$ et $U(t,\pi/2)=i/t$. Donc la fonction

$$U_0 : (t,\theta)\in]0,1[\times]0,\pi[\mapsto U(t,\theta)$$

réalise un C^∞-difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\pi[$ sur $\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}'\setminus\big\{it, t\in]0,1[\big\}$. De même la fonction

$$U_1 : (t,\theta)\in]0,1[\times]-\pi/2,\pi/2[\mapsto U(t,\theta)$$

réalise un C^∞-difféomorphisme de $]0,1[\times]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}'\setminus\big\{i/t\ , t\in]0,1[\big\}$.



Soit ψ une fonction quelconque de $C^\infty\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)_{per}$. On a que les fonctions $\psi\circ U_0^{-1}$ et $\psi\circ U_1^{-1}$ coïncident sur $\mathcal{H}'_0\cap\mathcal{H}'_1$. En effet, soit $z\in\mathcal{H}'_0\cap\mathcal{H}'_1$ et $(t_0,\theta_0)=U_0^{-1}(z)$, $(t_1,\theta_1)=U_1^{-1}(z)$: comme par définition $U(t_0,\theta_0)=U(t_1,\theta_1)$, on a $t_0=t_1$ et $\theta_0-\theta_1=0\ [\pi]$, et donc par propriété de π-périodicité de ψ , $\psi\circ U_0^{-1}(z)=\psi\circ U_1^{-1}(z)$. Donc on peut définir au moyen du couple de fonctions $\big(\psi\circ U_0^{-1},\psi\circ U_1^{-1}\big)$ une unique fonction φ définie sur $\mathcal{H}'$ et C^∞ sur $\mathcal{H}'$. En effet, pour tout point $z\in\mathcal{H}'$, z est dans l'un des deux ouverts $\mathcal{H}'_0$ ou $\mathcal{H}'_1$ et φ est définie localement au voisinage de z par l'une des deux fonctions $\psi\circ U_0^{-1}$ ou $\psi\circ U_1^{-1}$ qui sont C^∞ par composition. Enfin, comme avant par π-périodicité, puisque $U_0^{-1}\circ U(t,\theta)=(t',\theta')$ tel que $U(t',\theta')=U(t,\theta)$, on a $\psi\circ U_0^{-1}\circ U(t,\theta)=\psi(t',\theta')=\psi(t,\theta)$, et de même $\psi\circ U_1^{-1}\circ U=\psi$, si bien que $\varphi\circ U=\psi$ et φ est un antécédent de ψ par V .

10°)

a) On utilise la définition de U et la loi d'action de groupe sur les A_θ : on a $U(t,\theta+\theta_0)=A_{\theta+\theta_0}(it)=A_\theta\circ A_{\theta_0}(it)$. Donc,

$$V(\varphi\circ A_\theta)(t,\theta_0)=\varphi\circ A_\theta\circ U(t,\theta_0)=\varphi\circ A_\theta\circ A_{\theta_0}(it)=\varphi\circ U(t,\theta+\theta_0)=\big(V(\varphi)\circ\tau_\theta\big)(t,\theta_0)\quad .$$

b) Tout élément de de $C^\infty\big(]0,1[\times\mathbb{R}\big)_{per}$ s'écrit par **9)** $\psi=\varphi\circ U$ où $\varphi\in C^\infty(\mathcal{H}')$. Alors, en utilisant la propriété admise de D et le **a)** :

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\psi\circ\tau_\theta) &= \tilde{D}\big(V(\varphi)\circ\tau_\theta\big) \overset{\textbf{a)}}{=} V\circ D(\varphi\circ A_\theta)\\ &\overset{(admis)}{=} V\big(D(\varphi)\circ A_\theta\big)\\ &\overset{\textbf{a)}}{=} V\big(D(\varphi)\big)\circ\tau_\theta=\tilde{D}\circ\psi\circ\tau_\theta\quad .\end{aligned}$$

11°) La fonction $y\mapsto y^s$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $z\mapsto\omega(z)=\big(\operatorname{Im} z\big)^s$ est C^∞ sur $\mathcal{H}$. Donc, par composition, la fonction $\omega\circ A_\theta$ est C^∞ par rapport aux trois variables (x,y,θ) pour $z=x+iy\in\mathcal{H}$ et $\theta\in[0,\pi]$ (ce qu'on notera $(x,y,\theta)\in\mathcal{H}\times[0,\pi]$). Cela signifie en particulier qu'on peut dériver partiellement à tout ordre la fonction $\big(A_\theta(z)\big)^s$, avec des dérivées partielles obtenues continues des trois variables (x,y,θ) sur $\mathcal{H}\times[0,\pi]$. On peut donc appliquer de manière répétée le théorème de dérivation des intégrales propres à paramètre, ce qui montre que φ_s est C^∞ sur $\mathcal{H}$.
Pour tout $z\in\mathcal{H}$ et tout $\theta_0\in\mathbb{R}$ on a

$$\varphi_s\big(A_{\theta_0}(z)\big)=\int_0^\pi\big(\operatorname{Im} A_\theta\circ A_{\theta_0}(z)\big)^s\,d\theta=\int_0^\pi\big(\operatorname{Im} A_{\theta+\theta_0}(z)\big)^s\,d\theta\quad .$$

Or, comme la fonction $\theta \mapsto A_\theta(z)$ est π-périodique et qu'on intègre sur une période, on peut effectuer le changement de variables $\theta' = \theta + \theta_0$ dans la dernière intégrale sans avoir à changer les bornes. On obtient ainsi $\varphi_s \circ A_{\theta_0} = \varphi_s$.
Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres évoqués ci-dessus, on peut dériver φ_s sous l'intégrale, soit :

$$D\big(\varphi_s(z)\big) = \int_0^\pi D(\omega \circ A_\theta)\, d\theta \quad .$$

Mais on a admis (puisque ω est C^∞) que $D(\omega \circ A_\theta) = D(\omega) \circ A_\theta$. De plus,

$$D(\omega) = y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(y^s) = s(s-1)y^s = s(s-1)\omega \quad .$$

On en déduit bien $D(\varphi_s)(z) = \displaystyle\int_0^\pi s(s-1)\omega \circ A_\theta(z)\, d\theta = s(s-1)\varphi_s$.

12°) On remarque que $A_{\pi/2}\Big(\dfrac{i}{t}\Big) = \dfrac{-1}{i/t} = it$, donc l'invariance de φ_s par $A_{\pi/2}$ montre la propriété :

$$F_s(t) = \varphi_s(it) = \varphi_s \circ A_{\pi/2}\Big(\frac{i}{t}\Big) = \varphi_s\Big(\frac{i}{t}\Big) = F_s\Big(\frac{1}{t}\Big) \quad .$$

13°) On a $F_s(t) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t^s}{(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta)^s}\, d\theta$. Comme l'intégrande précédente est intégrable car continue de θ , on peut effectuer le changement de variable donné par le C^1-difféomorphisme $\theta \mapsto u = \operatorname{cotan}\theta$ de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. On obtient alors, avec $du = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}d\theta$ et $\dfrac{1}{\sin^2\theta} = 1 + u^2$:

$$F_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^s}{(t^2+u^2)^s(u^2+1)^{1-s}}\, du \quad .$$

On en déduit une expression intégrale de $F_{1-s}\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ dans laquelle on effectue le changement de variable $u = v/t$ (justifié par $t > 0$) :

$$\begin{aligned} F_{1-s}\Big(\frac{1}{t}\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{s-1}}{(1/t^2+u^2)^{1-s}(u^2+1)^s}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{1-s}}{(t^2u^2+1)^{1-s}(u^2+1)^s}\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^s}{(v^2+1)^{1-s}(v^2+t^2)^s}\, dv \quad . \end{aligned}$$

On voit ainsi que $F_{1-s}\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = F_s(t)$ et on conclut par **12)**.

14°) Montrons que F_s est solution de (E_s') . Posons comme suggéré $\psi(t,\theta) = F_s(t)$. Alors, suivant ce qui est admis, puis par définition,

$$\tilde{D}(\psi)(t,\theta) = \frac{1}{1-t^2}\big(t^2(1-t^2)F_s''(t) - 2t^3F_s'(t)\big) = V \circ D \circ V^{-1} \circ \psi(t,\theta) \quad .$$

Or, par invariance de φ_s par A_θ ,

$$\psi(t,\theta) = F_s(t) = \varphi_s(it) = \varphi_s \circ A_\theta(it) = \varphi_s \circ U(t,\theta) = V(\varphi_s)(\theta,t) \quad .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} V \circ D \circ V^{-1} \circ \psi(t,\theta) &= V \circ D(\varphi_s) = D(\varphi_s) \circ U(t,\theta) \\ &\overset{\mathbf{11)}}{=} s(s-1)\varphi_s \circ U(t,\theta) \\ &= s(s-1)F_s(t) \quad . \end{aligned}$$

On a donc finalement pour tout $t \in]0,1[$,

$$\frac{1}{1-t^2}\big(t^2(1-t^2)F_s''(t) - 2t^3F_s'(t)\big) = s(s-1)F_s(t) \quad ,$$

ce qui est l'équation (E_s') . D'après la première partie (**5)b)**), on a donc l'existence d'une famille de scalaires (λ_s, μ_s) telle que

$$\forall\, s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} + 1/2 \quad F_s = \lambda_s\Phi_s + \mu_s\Phi_{1-s} \quad .$$

Mais les fonction F_s et F_{1-s} sont identiques, donc par unicité de la décomposition dans une base, on a $\lambda_{1-s} = \mu_s$, cqfd.

15°) On a d'après ce qui précède et la première partie :

$$\frac{F_s(t)}{t^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta\right)^s} = \lambda_s f_s(t^2) + \lambda_{1-s} t^{1-2s} f_{1-s}(t^2) \quad .$$

Par hypothèse $Re(1-2s) > 0$, donc $t^{1-2s} \to 0$ quand $t \to 0$. Comme de plus les fonctions f_s sont continues et valent 1 en 0 , le troisième membre de l'égalité ci-dessus admet la limite fini λ_s quand $t \to 0$. Or, le deuxième membre de cette égalité peut se réécrire (par symétrie par rapport à $\pi/2$) $2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\left(\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta\right)^s}$. L'intégrande apparaissant dans cette intégrale est continue des deux varaibles $(t,\theta) \in [0,1] \times [0\pi/2[$ et est dominée indépendemment de $t \in [0,1]$ par la fonction

$$\frac{1}{\left|(\cos^2\theta)^s\right|} = \frac{1}{(\cos\theta)^{2\,\mathrm{Re}\,s}} = \left(1+\tan^2\theta\right)^{\mathrm{Re}\,s} \quad .$$

Au voisinage de $\pi/2$, on a que $\tan\theta \sim \dfrac{1}{\pi/2-\theta}$, donc la fonction $\left(1+\tan^2\theta\right)^{\mathrm{Re}\,s} \sim \dfrac{1}{(\pi/2-\theta)^{2\,\mathrm{Re}\,s}}$ est intégrable au voisinage de $\pi/2$, donc sur $[0,\pi/2[$, puisque $2\,\mathrm{Re}\,s < 1$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique donc et montre que l'intégrale est une fonction continue de t en 0 . Finalement, quand $t \to 0$, on trouve à la limite :

$$\lambda_s = 2\int_0^{\pi/2} \left(1+\tan^2\theta\right)^s d\theta \quad .$$

Si on veut, on peut en utilisant le changement de variables $\theta \leftarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ réécrire cette intégrale en

$$\lambda_s = \int_0^{\pi} \left(1+\mathrm{cotan}^2\,\theta\right)^s d\theta \quad \blacksquare$$

⁂