X 2000, option MP Math. I - Corrigé

Auteur : Robert Cabane (rcabane@free.fr) *1/3/2001*

Partie I

1°) a) L'appartenance de u à E_+ signifie que son rayon de convergence est non nul. Soit $R = r(u)$ ce rayon de convergence ; c'est la borne supérieure des $r \geqslant 0$ tels que la suite $(u_n r^n)$ soit bornée. Choisissons, par exemple, $r = \frac{R}{2}$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|u_n| r^n \leqslant A$ pour tout n, soit aussi $|u_n| \leqslant \frac{A}{r}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$. Posons alors $M = \text{Max}(\frac{A}{r}, \frac{1}{r})$. Il vient aussitôt $|u_n| \leqslant M.M^{n-1} = M^n$.
Réciproquement, une majoration du type $|u_n| \leqslant M^n$ amène que la suite $\left(|u_n|(\frac{1}{M})^n\right)$ est majorée, et que le rayon de convergence $r(u)$ est au moins égal à $\frac{1}{M}$.
b) Si $|u_n| \geqslant M^n$ pour tout n, il peut bien arriver que le rayon de convergence de u soit nul ; autrement, on choisit $\rho < r(u)$, de sorte que qu'il existe A tel que $|u_n|\rho^n \leqslant A$ pour tout n, assurant que $M^n\rho^n \leqslant A$, ou encore $M\rho \leqslant A^{\frac{1}{n}}$. Passant à la limite, il vient $M \leqslant \frac{1}{\rho}$. Faisant tendre ρ vers $r(u)$ on a bien $r(u) \leqslant \frac{1}{M}$.(1)
2°) Décomposons en éléments simples l'expression proposée. On a a priori $\frac{1}{X^2(X-k)^2} = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-k)^2} + \frac{d}{X-k}$ et $a = c = \frac{1}{k^2}$ (en multipliant par la partie polaire et en prenant la valeur au pôle), ainsi que $b + d = 0$ (somme des résidus nulle, car la fraction est de degré $-4 < -1$).
On calcule b par développement limité en 0 : $\frac{1}{x(k-x)^2} = \frac{1}{x^2k^2\left(1-\frac{x}{k}\right)^2} = \frac{1}{x^2k^2}\left(1 + \frac{2x}{k} + o(x)\right)$, d'où $b = \frac{2}{k^3} = -d$.
On en déduit que

$$T_k = k^2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(k-i)^2} + \frac{2}{k}\left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k-i}\right]$$

mais ces sommes sont deux à deux égales, grâce à la transformation $i \mapsto k - i$; enfin, on peut majorer ces sommes par des intégrales selon la méthode des rectangles :

$$T_k = 2\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} + \frac{4}{k}\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \leqslant 2\left[1 + \int_1^{k-1} \frac{dt}{t^2}\right] + \frac{4}{k}\left[1 + \int_1^{k-1} \frac{dt}{t}\right] = 2\left[2 - \frac{1}{k-1}\right] + \frac{4}{k}[1 + \ln(k-1)] \leqslant 4 + \frac{4}{k}(k-1) \leqslant 8$$

Partie II

3°) Une suite u figure dans le noyau de A_a si l'on a $(k+a)u_k = 0$ pour tout k ; ceci amène la nullité de tous les u_k sauf si a est un entier strictement négatif . En tel cas, u_{-a} est quelconque. Finalement, $\boxed{\text{Ker } A_a = \begin{cases} \{0\} & \text{si } a \notin \mathbb{Z}_-^* \\ \mathbb{C}.e_{-a} & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}.}$

Pareillement, A_a est surjectif si a n'est pas entier strictement négatif ; autrement, son image est formée des suites u telles que $u_{-a} = 0$.
4°) Si a n'est pas un entier strictement négatif , la restriction de A_a est encore injective. Elle est bien un endomorphisme de E_R car si u a un rayon de convergence au moins égal à R, la suite $((k+1)u_k)$ a le même rayon de convergence (théorème sur la dérivation des séries entières), tandis que la suite $(a-1)u_k$ a un rayon de convergence au moins R ; la somme a aussi un rayon de convergence au moins égal à R, ce qu'il fallait. Enfin, A_a est surjectif car si v est une suite de rayon de convergence au moins R, la suite $w_k = \frac{v_k}{k+a}$ a la même qualité, car on a une majoration du type $|v_k| \leqslant A\rho^k$ pour tout $\rho < R$, donc pour k assez grand $|w_k| \leqslant \frac{A\rho^k}{k-|a|} \in \mathcal{O}(\rho^k)$, assurant par là une majoration possible par $B\rho^k$, et le fait que $w \in E_R$.

Partie III : Étude de $u \mapsto Tu = A_a u + cu * u$.

5°) a) Nous avons $v_1 = (1+a)u_1$ et $v_k = (k+a)u_k + c\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}$; dans cette dernière expression, u_k ne figure qu'au début. Nous pouvons donc en tirer $u_1 = \frac{1}{1+a}v_1$ et $u_k = \frac{1}{k+a}v_k - \frac{c}{k+a}\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}$.
b) Le noyau de T n'a pas de sens car T n'est pas linéaire. La question précédente nous pousse à examiner la surjectivité de T. Étant donnée une suite v de E, les relations précédentes permettent de définir de proche en proche une suite u de E sans obstacle aucun puisque a n'est pas entier strictement négatif (les dénominateurs ne sont pas nuls). Ces relations prouvent aussi que u est unique ; en d'autres termes, T est bijective de E dans E.

(1) Aucune réciproque ici, car u_n peut s'annuler souvent (penser à la série de l'arctangente).

6°) a) Il s'agit de montrer que si u a un rayon de convergence non nul alors Tu a la même qualité. En appliquant la question 1°a) nous obtenons une constante M telle que $|u_k| \leqslant M^k$ pour tout k ; dès lors, on a

$$\begin{cases} |v_1| \leqslant (1+|a|)|u_1| \leqslant (1+|a|)M \leqslant (1+|c|)(1+a')M \\ |v_k| \leqslant (k+|a|)M^k + |c| \sum_{i=1}^{k-1} M^i M^{k-i} = (k+|a|+|c|(k-1))M^k \leqslant (1+|c|)(k+a')M^k \end{cases}$$

avec $a' = \frac{|a|}{1+|c|} \geqslant 0$. En appliquant ce qui a été vu à la question 3, on trouve que le rayon de convergence de cette dernière suite est $\frac{1}{M}$, et celui de la suite u est au moins égal à $\frac{1}{M}$, donc non nul.[2]

b) Sachant que T est injective sur E_+, pour avoir sa bijectivité il suffit de vérifier que l'image inverse de E_+ (a priori dans E) par T est E_+. On suppose donc que $u \in E$, $v = Tu \in E_+$.

Commençons par δ. La condition (1) nous laisse choisir δ inférieur ou égal à la distance d de a à $\mathbb{Z}_-^*$, non nulle. La constante M (condition (3)) provient de l'application de la question 1°a à la suite v. La condition (2), à partir de γ et δ, est satisfaite par le choix de $M_0 = \frac{\delta}{2|c|\gamma}$. La condition (4) est satisfaite avec toute valeur de M_1 supérieure ou égale à $\frac{M}{\delta M_0}$. La condition (5) équivaut à $\sqrt[k]{\frac{2k^2}{\delta M_0}} M \leqslant M_1$, et est satisfaite dès que la suite $y_k = \sqrt[k]{\frac{2k^2}{\delta M_0}}$ est bornée. Or, $\ln y_k = \frac{1}{k}\big[\ln(2k^2) - \ln(\delta M_0)\big]$ tend vers 0 (croissances comparées), donc y_k tend vers 1, et est bien bornée. C'est ainsi que M_1 existe.

c) Nous avons ainsi $|u_1| \leqslant \frac{1}{\delta}M \leqslant M_0 M_1$ (conditions (1) et (4)). Supposons prouvé que $|u_i| \leqslant \frac{M_0 M_1^i}{i^2}$ pour tout $i < k$. Alors,

$$\begin{aligned} |u_k| &\leqslant \frac{1}{\delta}|v_k| + \frac{|c|}{\delta} \sum_{i=1}^{k-1} |u_i||u_{k-i}| \leqslant \tfrac{1}{\delta}M^k + \tfrac{|c|}{\delta} M_0^2 M_1^k \sum_{i=1}^{k-1} \tfrac{1}{i^2} \tfrac{1}{(k-i)^2} \leqslant \tfrac{1}{\delta}M^k + \tfrac{|c|}{\delta} M_0^2 M_1^k \tfrac{2\gamma}{2k^2} \\ &\leqslant \frac{1}{2k^2}\big[\tfrac{1}{\delta}.2k^2 M^k + M_0 M_1^k\big] = \frac{1}{2k^2}\big[M_0 M_1^k + M_0 M_1^k\big] = \frac{1}{k^2} M_0 M_1^k \end{aligned}.$$

d) On vient d'obtenir une domination de u par une suite géométrique (en minorant k^2 par 1) ; ainsi, u est dans E_+ et T est bien un isomorphisme de E_+.

7°) a) Les suites u et α sont ici déterminées par les récurrences

$$\begin{cases} u_1 = \lambda \\ u_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \alpha_{k-i} \end{cases}.$$

Nous avons déjà $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1) = \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4}$. Supposons prouvé que $\alpha_i \in [2^{1-i}, 1]$ pour tout $i < k$; alors il vient $\alpha_k \leqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 1 < 1$ et aussi $\alpha_k \geqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{1-i} 2^{1-k+i} = \frac{1}{k}.2^{2-k}(k-1) \geqslant 2^{1-k}$ ce qu'il fallait.

b) La suite u est d'une part dominée par la suite géométrique λ^k, donc son rayon de convergence vérifie $r(u) \geqslant \frac{1}{\lambda}$ (question 1). D'autre part, elle domine la suite $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k$, donc $r(u) \leqslant \frac{2}{\lambda}$.

Partie IV : Équation différentielle $Df(t) = tf'(t) + af(t) = g(t)$.

8°) L'équation différentielle proposée étant linéaire et homogène, l'espace de ses solutions sur $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$) est un espace vectoriel de dimension 1. On constate aussi que la fonction $f : t \mapsto |t|^{-a}$ est solution sur chacun de ces intervalles ; la solution générale est donc proportionnelle à celle-ci.[3]

9°) Une solution nulle en 0, non nulle et de classe infinie sur $\mathbb{R}$ doit se faire en raccordant une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et une solution sur $\mathbb{R}_-^*$, non nulles. Ce raccordement sera de classe infinie si les dérivées à gauche et à droite des deux solutions choisies existent et coïncident. Pour a entier strictement négatif c'est le cas : il suffit de prendre la fonction polynômiale $t \mapsto t^{-a}$. Pour $a = 0$ on a bien les solution constantes qui sont de classe infinie sur $\mathbb{R}$ mais cela ne convient pas car elles ne peuvent être nulles en 0 sans être nulles partout. Autrement, il y a échec car la fonction $t \mapsto t^{-a}$ n'est pas indéfiniment dérivable en 0 ; en effet, un nombre suffisant de dérivations amène une fonction du type $t \mapsto C.t^b$ avec $b < 0$ et $C \neq 0$ (cette dernière condition provenant du fait que a n'est pas entier négatif), laquelle n'est pas continue en 0.

$\boxed{\text{C'est seulement pour } a \text{ entier strictement négatif qu'on peut trouver une solution nulle en 0, non nulle et } \mathcal{C}^\infty.}$

10°) On utilise le procédé dit « de variation de la constante ». Sachant que $t \mapsto t^{-a}$ est solution de l'équation homogène, ne s'annulant pas sur I, on peut chercher une solution f de $Df = g$ sous la forme $f(t) = t^{-a}h(t)$. Reportant ceci dans l'équation, il vient $t.t^{-a}h'(t) + 0 = g(t)$ soit $h'(t) = t^{a-1}g(t)$, ou encore $h(t) = K + \int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s$,

[2] En affinant un peu on prouverait que $r(v) \geqslant r(u)$.

[3] Sur $\mathbb{R}_-^*$ c'est correct car la dérivée de la valeur absolue vaut alors -1, ce qui donne $f'(t) = -(-a)|t|^{-a-1} = a|t|^{-1}f(t) = -at^{-1}f(t)$.

K étant une constante, soit encore $f(t) = Kt^{-a} + t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s$. On a $f(t_0) = Kt_0^{-a} = \alpha$, soit enfin $\boxed{f(t) = \alpha\big(\frac{t}{t_0}\big)^{-a} + t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s.}$

11°) Soit $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k t^k$. Cherchons f sous la forme $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k t^k$. On sait qu'il est possible de dériver terme à terme les séries entières sur leur domaine ouvert de convergence ; en conséquence, on a $Df(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ku_k t^k + a\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k t^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+a)u_k t^k$, ce qui, en d'autres termes, exprime que l'opérateur différentiel D coïncide avec l'opérateur A_a sur les séries entières. Nous cherchons donc u telle que $A_a u = v$. D'après la question 4, sachant que a n'est pas entier strictement négatif, u existe et a un rayon de convergence au moins égal à θ. Finalement, on a une unique solution f de $Df = g$ qui soit développable en série entière au voisinage de 0.
Concernant la valeur de α, on peut juste écrire $f(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k t_0^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{k+a} t_0^k = \alpha$.

12°) a) a étant négatif, la fonction $s \mapsto s^{a-1}$ n'est pas intégrable, tout en étant positive. Le théorème d'intégration des relations de comparaison permet alors de tirer de $s^{a-1}g(s) = o\big(s^{a-1}\big)$ une comparaison

$$\int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s = o\Big(\int_{t_0}^{t} s^{a-1}\,\mathrm{d}s\Big) = o\Big(\frac{t^a - t_0^a}{a}\Big) = o\big(t^a\big)\ ,$$

valide quand t tend vers 0. Ainsi, $t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s$ a une limite nulle quand t tend vers 0. D'autre part, $\big(\frac{t}{t_0}\big)^{-a}$ tend vers 0 parce que a est strictement négatif. Finalement, $\boxed{f \text{ est de limite nulle en } 0.}$

b) Cette fois, avec $a > 0$, la fonction $s \mapsto s^{a-1}$ est intégrable au voisinage de 0. Le théorème d'intégration des relations de comparaison donne cette fois

$$\int_{0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s = o\Big(\int_{0}^{t} s^{a-1}\,\mathrm{d}s\Big) = o\big(t^a\big)\ .$$

Considérons alors à nouveau

$$f(t) = \alpha\big(\frac{t}{t_0}\big)^{-a} + t^{-a}\int_{t_0}^{t} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s = t^{-a}\Big[\alpha t_0^a - \int_0^{t_0} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s\Big] + o(1)\ .$$

Cette fonction n'est généralement pas bornée au voisinage de 0, mais si on prend $\alpha = t_0^{-a}\int_0^{t_0} s^{a-1}g(s)\,\mathrm{d}s$ alors f admet une limite nulle. L'hypothèse relative à la dérivée de g en 0 (équivalant à $g(t) \sim mt$ au voisinage de 0) ne semble pas utile.

Remarque finale. Le travail accompli dans la partie III ne semble pas servir ultérieurement ; en effet, il concernait des équations différentielles non linéaires, du type $tf'(t) + af(t) + cf(t)^2 = g(t)$ (équation de Riccati) et visait à montrer que si g est développable en série entière au voisinage de 0 alors il existe une et une seule solution f qui l'est aussi. Le cas particulier étudié à la question 7 concerne l'équation $tf'(t) - f(t)^2 = \lambda t$.