Mines MP 2021 : épreuve 2
Un corrigé

Matrices de permutation

1. Notons u_σ l'endomorphisme canoniquement associé à $\omega(\sigma)$. On a alors $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$ (où les e_i sont les éléments de la base canonique). Ainsi, pour $\sigma, \sigma' \in B_n$,

$$\forall j,\ u_{\sigma\circ\sigma'}(e_j) = e_{\sigma\circ\sigma'(e_j)} = u_\sigma(u_{\sigma'}(e_j)) = u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j)$$

   En revenant aux matrices,

$$\boxed{\forall \sigma, \sigma' \in B_n,\ \omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\omega(\sigma')}$$

2. Avec les notation précédentes, u_σ permute les éléments de la base canonique et envoie donc une base orthonormée sur une base orthonormée. $\omega(\sigma)$ représente donc une isométrie en b.o.n et est donc orthogonale.

$$\boxed{\omega(B_n) \subset O_n(\mathbb{R})}$$

3. Multiplier à droite (resp à gauche) $\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ revient à multiplier chaque colonne (resp ligne) par d_j. Ainsi

$$[\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma)]_{i,j} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}$$
$$[\omega(\sigma)\mathrm{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})]_{i,j} = d_{\sigma(j)}\delta_{i,\sigma(j)} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}$$

   (pour la dernière égalité : les termes sont nuls si $i \neq \sigma(j)$ et donc égaux ; ils sont aussi égaux si $i = \sigma(j)$)
   On a donc montré que

$$\boxed{\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\mathrm{diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})}$$

4. La propriété (i) signifie qu'il existe $\sigma \in B_n$ telle que $\forall i,\ d'_i = d_{\sigma(i)}$.
   La propriété (ii) s'écrit, puisque les éléments de $\omega(B_n)$ sont des matrices orthogonales, $\omega(\alpha)D' = D\omega(\alpha)$.

   Si (i) a lieu, alors (ii) aussi avec $\alpha = \sigma$ (question précédente). Lé réciproque est similaire toujours avec la question précédente (et avec $\sigma = \alpha$).

$$\boxed{\text{(i) et (ii) sont équivalentes}}$$

Fonctions de matrices symétriques

5. Le théorème spectral indique que S est diagonalisable en base orthonormée (i.e. via une matrice de passage orthogonale). Comme l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée et comme les valeurs propres de S sont supposées dans I,

$$\boxed{\forall S \in S_n(I),\ \exists \Omega \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists (s_i) \in I^n,\ S = \Omega^T \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega}$$

6. Notons $J \subset I$ un ensemble tel que $\{s_i,\ i \in I\} = \{s_j,\ j \in J\}$ et $\forall i, j \in J,\ i \neq j \implies s_i \neq s_j$. J est ainsi un ensemble d'indice donnant les éléments distincts parmi les s_i.
   En notant $d = \mathrm{card}(J)$, l'application $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \mapsto (P(s_j))_{j\in J} \in \mathbb{R}^d$ est linéaire et injective (si P de degré $\leq d-1$ admet d racines différentes, il est nul). Par dimension, c'est un isomorphisme. $(f(s_j))_{j\in J}$ admet donc un (unique) antécédent.
   On a alors $P(s_i) = f(s_i)$ pour tout $i \in J$ et cela reste vrai pour les $i \in I$ par choix de J.

$$\boxed{\forall (s_i) \in I^n,\ \exists P \in\ \mathbb{R}[X],\ \forall i \in\ [\![1,n]\!],\ P(s_i) = f(s_i)}$$

On pourrait même, ce sont les formules d'interpolation de Lagrange, donner une expression explicite d'un P convenable :

$$P = \sum_{j\in J} f(s_j)L_j \ \text{ avec }\ L_j = \prod_{i\in J\setminus\{j\}} \frac{X - s_i}{s_j - s_i}$$

7. Montrons par récurrence sur k que pour toute matrice inversible Q et toute matrice M, on a

$$(Q^{-1}MQ)^k = Q^{-1}M^kQ$$

- C'est vrai pour $k = 0$.
- Si c'est vrai au rang k alors

$$(Q^{-1}MQ)^{k+1} = (Q^{-1}MQ)^kQ^{-1}MQ = Q^{-1}M^kQQ^{-1}MQ = Q^{-1}M^{k+1}Q$$

  et le résultat est vrai au rang $k + 1$.

Par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$\forall P \in\ \mathbb{R}[X],\ \forall Q \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ P(Q^{-1}MQ) = Q^{-1}P(M)Q$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \text{diag}(d_1, \dots, d_n)^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$$

et en combinant linéairement

$$\forall P \in\ \mathbb{R}[X],\ P(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$$

Ici, on a donc (Ω est orthogonale et donc égale à son inverse), P étant le polynôme de la question 6,

$$\Omega^T\text{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega = P(S) = (\Omega')^T\text{diag}(P(s_1'), \dots, P(s_n'))\Omega'$$

De plus, $\text{Sp}(S) = \{s_1, \dots, s_n\} = \{s_1', \dots, s_n'\}$ et donc $P(s_i) = f(s_i)$ et $P(s_i') = f(s_i')$ pour tout i. Ainsi

$$\boxed{(\Omega')^T\text{diag}(f(s_1'), \dots, f(s_n'))\Omega' = \Omega^T\text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega}$$

Comme $(AB)^T = B^TA^T$, il est immédiat que

$$\boxed{\Omega^T\text{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega \in S_n(\mathbb{R})}$$

8. On a $\Omega^T(D_1 + \lambda D_2)\Omega = \Omega^TD_1 + \lambda\Omega^TD_2\Omega$ qui me semble donner aisément

$$u(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(S) = u(\varphi_1)(S) + \lambda u(\varphi_2)(S)$$

Ceci étant vrai pour tout S, $u(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = u(\varphi_1) + \lambda u(\varphi_2)$ et $\boxed{u \text{ est linéaire}}$.
La trace étant linéaire, par composition, $\boxed{v \text{ est linéaire}}$.
Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$. On a $\text{diag}(x, \dots, x) = I_n^T(xI_n)I_n$ et donc

$$u(\varphi)(xI_n) = I_n^T\text{diag}(\varphi(x), \dots, \varphi(x))I_n = \varphi(x)I_n$$

$$\boxed{\forall x \in\ \mathbb{R},\ u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n}$$

9. Supposons que $u(\varphi) = 0$. Alors $\forall S \in S_n(\mathbb{R}),\ u(\varphi)(S) = 0$. Avec la question précédente, $\forall x \in I,\ \varphi(x) = 0$ et donc $\varphi = 0$. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$ (noyau restreint au neutre).

   Si $n = 1$ alors une application V de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ s'assimile à une application φ de I dans $\mathbb{R}$ $(V((x)) = (\varphi(x)))$ et on a $V = u(\varphi)$. u est ainsi surjective.
   Si $n \geq 2$, on peut trouver soit V l'application constante égale à $E_{1,2} + E_{2,1}$, définie sur $S_n(I)$. V est à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$. I étant non vide, il contient un élément x. On a $V(xI_n) = E_{1,2} + E_{2,1}$ qui n'est pas scalaire et n'est donc égale à $u(\varphi)(xI_n)$ pour aucune application φ. Ainsi, V n'a pas d'antécédent par u.

$$\boxed{u \text{ est non surjective sauf si } n = 1}$$

10. On suppose f polynomiale et il lui est donc associé un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I,\ P(x) = f(x)$.
    Soit $S \in S_n(I)$. Il existe des éléments $s_i \in I$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega^T \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$ et on a
$$u(f)(S) = \Omega^T \mathrm{diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega = \Omega^T \mathrm{diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega$$
    Avec les remarques faites en question 7, ceci donne
$$u(f)(S) = P(\Omega^T \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega) = P(S)$$
$$\boxed{\text{Si } f \text{ est polynomiale, il existe } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall S \in S_n(I),\ u(f)(S) = P(S)}$$
    On suppose, réciproquement, que f est telle qu'un tel polynôme P existe. On a en particulier
$$\forall x \in I,\ f(x)I_n = u(f)(xI_n) = P(xI_n) = P(x)I_n$$
    et donc $\forall x \in I,\ f(x) = P(x)$. f est donc polynomiale et $\boxed{\text{la réciproque est vraie}}$.

11. On suppose que $\forall x \in I,\ \varphi_k(x) \to \varphi(x)$. On se donne alors $S \in S_n(I)$.Il existe des éléments $s_i \in I$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega^T \mathrm{diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega$ et on a
$$u(\varphi_k)(S) = \Omega^T \mathrm{diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n))\Omega = \Omega^T D_k \Omega$$
    (D_k) converge vers $D = \mathrm{diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ et $M \mapsto \Omega^T M \Omega$ est continue (par exemple car elle est linéaire en dimension finie). Ainsi, $u(\varphi_k)(S)$ tend vers $u(\varphi)(S)$.
$$\boxed{\text{La convergence simple de } (\varphi_k) \text{ vers } \varphi \text{ sur } I \text{ entraîne celle de } (u(\varphi_k)) \text{ vers } u(\varphi) \text{ sur } S_n(I)}$$
    La trace étant une application continue (linéaire en dimension finie)
$$\boxed{\text{La convergence simple de } (\varphi_k) \text{ vers } \varphi \text{ sur } I \text{ entraîne celle de } (v(\varphi_k)) \text{ vers } u(\varphi) \text{ sur } S_n(I)}$$
    Avec les mêmes notations, on a
$$u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S) = \Omega^T \mathrm{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\Omega$$
    Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique $\|.\|_2$ définie par
$$\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$$
    La trace étant invariante par similitude, deux matrices orthogonalement semblables ont même norme (calcul aisé). Ainsi
$$\begin{aligned} \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|_2^2 &= \|\mathrm{diag}(\varphi_k(s_1) - \varphi(s_1), \dots, \varphi_k(s_n) - \varphi(s_n))\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)|^2 \\ &\leq n\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty,I}^2 \end{aligned}$$

Si (φ_k) converge uniformément vers φ sur I, le majorant, qui est indépendant de S, est de limite nulle. On a ainsi convergence uniforme de $(u(\varphi_k)(S))$ vers $u(\varphi)(S)$. Il est à noter que changer de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est indifférent puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

$$\boxed{\text{La convergence uniforme de } (\varphi_k) \text{ vers } \varphi \text{ sur } I \text{ entraîne celle de } (u(\varphi_k)) \text{ vers } u(\varphi) \text{ sur } S_n(I)}$$

Avec des notations, similaires, on a

$$|v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| = \left| \sum_{i=1}^{n} (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)) \right| \le n \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty,I}$$

et là encore

$$\boxed{\text{La convergence uniforme de } (\varphi_k) \text{ vers } \varphi \text{ sur } I \text{ entraîne celle de } (v(\varphi_k)) \text{ vers } v(\varphi) \text{ sur } S_n(I)}$$

Norme et convexité

12. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, il existe une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (que l'on assimile à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) formée de vecteurs propres pour S. Notons λ_i la valeur propre associée à X_i. Le spectre de S est ainsi constitué des λ_i.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ que l'on décompose en $X = x_1 X_1 + \dots + x_n X_n$. On a alors (la base étant orthonormée)
$$\min(\mathrm{Sp}(S)) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le X^T S X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \le \max(\mathrm{Sp}(S)) \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
Comme $X^T X = x_1^2 + \dots + x_n^2$, on a donc
$$\forall X \in \Sigma,\ \min(\mathrm{Sp}(S)) \le X^T S X \le \max(\mathrm{Sp}(S))$$
Le majorant (resp minorant) est atteint pour $X = X_j$ associé à une valeur propre maximale (resp minimal) et c'est donc un maximum (resp minimum).
$$\boxed{\min(\mathrm{Sp}(S)) = \min\{X^T S X\ ;\ X \in \Sigma\} \text{ et } \max(\mathrm{Sp}(S)) = \max\{X^T S X\ ;\ X \in \Sigma\}}$$

13. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0,1]$. On a
$$\forall X \in \Sigma,\ X^T((1-\lambda)A + \lambda B)X = (1-\lambda)X^T A X + \lambda X^T B X$$
Comme $\lambda \ge 0$ et $1 - \lambda \ge 0$, la question précédente donne
$$\min((1-\lambda)\mathrm{Sp}(A)) + \lambda \min(\mathrm{Sp}(B)) \le X^T((1-\lambda)A + \lambda B)X \le (1-\lambda)\max(\mathrm{Sp}(A)) + \lambda \max(\mathrm{Sp}(B))$$
puis
$$\mathrm{Sp}((1-\lambda)A + \lambda B) \subset [(1-\lambda)\min(\mathrm{Sp}(A)) + \lambda \min(\mathrm{Sp}(B)), (1-\lambda)\max(\mathrm{Sp}(A)) + \lambda \max(\mathrm{Sp}(B))]$$
Comme I est un intervalle, il est convexe. Comme A, B ont un spectre inclus dans I, les bornes de l'intervalle ci-dessus sont dans I et l'intervalle est donc inclus dans I. Ainsi $(1-\lambda)A + \lambda B \in S_n(I)$. On a montré que
$$\boxed{S_n(I) \text{ est une partie convexe de } S_n(\mathbb{R})}$$
Pour montrer que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$, on a quatre propriétés à prouver.
    - ρ est immédiatement positive.

- Si $\rho(S) = 0$ alors 0 est la seule valeur propres de S et comme S est diagonalisable, elle est nulle. Ceci montre l'axiome de séparation.
- Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les valeurs propres de μS sont les $\mu\lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(S)$. Comme $x \mapsto |\mu| x$ est croissante, le maximum des $|\mu||\lambda|$ est égal à $|\mu|$ fois le maximum des $|\lambda|$. Ainsi $\rho(\mu S) = |\mu|\rho(S)$ et on a l'homogénéité.
- Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. On a alors $\text{Sp}(A) \subset [-\rho(A), \rho(A)]$ et idem pour B. On montre Comme plus haut que le spectre de $A + B$ est dans $[-\rho(A) - \rho(B), \rho(A) + \rho(B)]$ et donc $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$. Ceci donne l'inégalité triangulaire.

$$\boxed{\rho \text{ est une norme sur } S_n(\mathbb{R})}$$

Continuité des fonctions de matrices symétriques

14. χ va de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Les espaces étant de dimension finie, le choix de norme n'importe pas dans l'étude de continuité.
Les coefficients de $\chi(S)$ sont des fonctions polynomiales de ceux de S et donc continues (ce qui est immédiat quand on munit $S_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie). Ainsi, les fonctions coordonnées de χ (dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) sont continues :

$$\boxed{\chi \text{ est continue}}$$

15. On suppose que $\rho(M_k - M) \to 0$ et on a donc $\rho(M_k) \to \rho(M)$ (par seconde forme de l'inégalité triangulaire).
Ainsi, la suite $(\rho(M_k))$ est une suite bornée, disons majorée par un réel M. En notant $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{n,k})$, on a
$$\forall k,\ \|\Lambda_k\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_{i,k}| \leq M$$
On a ainsi $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui est bornée dans $\mathbb{R}^n$ et admet une valeur d'adhérence $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. En notant φ l'extractrice associé, $\lambda_{i,\varphi(k)} \to \lambda_i$ et le caractère croissant des Λ_k entraîne celui de Λ.

$$\boxed{(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ possède une valeur d'adhérence croissante}}$$

16. On sait que χ est continue et donc $\chi(M_k) \to \chi(M)$. A fortiori, $\chi(M_{\alpha(k)}) \to \chi(M)$. Or, avec les notation utilisées en question précédente,
$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_{i,\alpha(k)})$$
Notons μ_i la limite de $\lambda_{i,\alpha(k)}$, les théorèmes d'opération donnent
$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$$
Par unicité de la limite, on a donc
$$\chi_M = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$$
La suite (μ_i) étant croissante (par croissance des λ_k), c'est la suite croissante des valeurs propres de M :

$$\boxed{\Lambda_{\alpha(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Sp}_\uparrow(M)}$$

17. La suite (Λ_k) possède une valeur d'adhérence (question 15) et celle-ci est forcément $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$. On a une suite à valeurs dans un compact (ses élément appartiennent à une boule fermée, on l'a noté en question 15) qui possède une unique valeur d'adhérence et cette suite est donc convergente. On a montré que $\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k) \to \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$. Par caractérisation séquentielle de la limite,

$$\boxed{\mathrm{Sp}_\uparrow \text{ est continue}}$$

Si on utilise le résultat de cours sur les suites à valeurs dans un compact, la question 15 ne sert pas. Plus précisément, elle sert juste à justifier, dans sa preuve, que l'on a une suite bornée en dimension finie et donc à valeurs dans un compact.

18. $O_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^TM$. C'est aussi une partie bornée car $\forall M \in O_n(\mathbb{R}),\ \|M\| \leq 1$ (chaque colonne est de norme 1 dans $\mathbb{R}^n$ euclidien).
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie,

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie compacte de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

19. Soit $\varphi \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit (M_k) une suite d'éléments de $S_n(I)$ qui converge dans $S_n(I)$ vers une matrice M. On note encore $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_n(k))$ son spectre ordonné. Pour chaque entier k, il existe $\Omega_k \in O_n(\mathbb{R})$ telle que
$$M_k = \Omega_k^T \mathrm{diag}(\lambda_{i,k})\Omega_k$$
On a alors
$$u_\varphi(M_k) = \Omega_k^T \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_{i,k}))\Omega_k$$
On vient de voir que Λ_k converge vers le spectre ordonné $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de M.
Par ailleurs, comme $O_n(\mathbb{R})$ est un compact, il existe une extraite $(\Omega_{\alpha(k)})$ qui converge vers $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. On a alors
$$M_{\alpha(k)} \to \Omega^T \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_i))\Omega \quad \text{et} \quad u_\varphi(M_{\alpha(k)}) \to \Omega^T \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_i))\Omega$$
Par unicité de la limite, on a $M = \Omega^T \mathrm{diag}(\varphi(\lambda_i))\Omega$ et la seconde limite vaut ainsi $u(\varphi)(M)$. On a donc
$$u_\varphi(M_{\alpha(k)}) \to u(\varphi)(M)$$
Si on considère la suite $(u(\varphi)(M_k))$, on peut en fait, en travaillant sur une extraire quelconque comme ci-dessus, montrer que $u(\varphi)(M)$ est la seule valeur d'adhérence possible. Or, toutes les suites $(\varphi(\lambda_{i,k}))_{k\in\,\mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(u(\varphi)(M_k))$ est bornée (au sens de ρ, c'est quasi immédiat et le choix de norme n'importe pas). On est dans la même situation qu'en question 17 et on peut affirmer que $(u(\varphi)(M_k))$ converge vers $u(\varphi)(M)$. $u(\varphi)$ est donc continue. Comme la trace est continue, $v(\varphi)$ est aussi continues.

$$\boxed{\text{si } \varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}), \text{ alors } u(\varphi) \text{ et } v(\varphi) \text{ sont continues}}$$

Convexité des fonctions de matrices symétriques

20. Pour une matrice M quelconque, on a $[M]_{i,j} = E_j^T M E_i$ où $E_1, \dots, E_n$ sont les vecteurs colonnes associés à la base canonique.
Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et soit $U = \Omega^T S \Omega$. On a alors
$$[U]_{j,j} = Y_j^T S Y_j \quad \text{avec} \quad Y_j = \Omega E_j$$

Les vecteurs Y_j étant dans Σ (car $E_j \in \Sigma$ et O orthogonale), la question 12 montre que

$$\forall j,\ \min(\mathrm{Sp}(S)) \leq [U]_{j,j} \leq \max(\mathrm{Sp}(S))$$

Majorant et minorant sont dans I et I est un intervalle. Ainsi

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ [U]_{j,j} \in I}$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S (comptées avec multiplicité).
Soit $\Omega \in \mathcal{U}_S$. U est orthogonalement semblable à S et il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U = \Omega^T \mathrm{diag}((\lambda_i)_{1\leq i\leq n})\Omega$. Avec les notations précédentes, on a

$$\forall j,\ f([U]_{j,j}) = f\left(Y_j^T \mathrm{diag}((\lambda_i)_{1\leq i\leq n}) Y_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i [Y_j]_i^2\right)$$

Comme $Y_j \in \Sigma$, les $[Y_j]_i^2$ sont positifs de somme 1. Par convexité de f, on a donc

$$\forall j,\ f([U]_{j,j}) \leq \sum_{i=1}^n [Y_j]_i^2 f(\lambda_i)$$

En sommant ces relations, on obtient

$$\sum_{j=1}^n f([U]_{j,j}) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n [Y_j]_i^2 f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n \left(f(\lambda_i) \sum_{j=1}^n [Y_j]_i^2 \right)$$

Les Y_j sont en fait les colonnes de Ω et $[Y_j]_i = [\Omega]_{i,j}$. Les lignes de Ω forment aussi une famille orthonormée et les sommes intérieures ci-dessus valent 1. On a donc

$$\sum_{j=1}^n f([U]_{j,j}) \leq \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = v(f)(S)$$

L'inégalité est une égalité quand $\Omega = I_n$ et on a donc

$$\boxed{\max\left\{\sum_{k=1}^n f\left([U]_{k,k}\right); U \in \mathcal{U}_S\right\} = v(f)(S)}$$

21. Avec la question précédente, il existe une matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle qu'en notant $U = \Omega^T((1-t)A + tB)\Omega$ on ait

$$v(f)((1-t)A + tB) = \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k})$$

Or, $[U]_{k,k} = (1-t)[\Omega^T A \Omega]_{k,k} + t[\Omega^T B \Omega]_{k,k}$ et ainsi

$$v(f)((1-t)A + tB) = (1-t)\sum_{k=1}^n f([\Omega^T A\Omega]_{k,k}) + t\sum_{k=1}^n f([\Omega^T B\Omega]_{k,k})$$

La question précédente permet de majorer les sommes par $v(f)(A)$ et $v(f)(B)$. En multipliant par t et $1-t$ on ne change pas le sens des inégalités. On trouve

$$\boxed{v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)}$$

22. On vient de voir que la convexité de f entraîne celle de $v(f)$.
On suppose, réciproquement, que $v(f)$ est convexe. On applique cette propriété avec $A = xI_n$ et $B = yI_n$ pour $x, y \in I$. On obtient alors

$$nf((1-t)x + ty) = v(f)((1-t)xI_n + tyI_n) \leq (1-t)v(f)(xI_n) + tv(f)(yI_n) = n((1-t)f(x) + ty)$$

ce qui donne la convexité de f.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ ssi } v(f) \text{ l'est sur } S_n(I)}$$