Concours commun

Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème :

- Par convention $0^0 = 1$.

- Si i et j sont des entiers naturels tels que $i \leq j$, on note $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$.

- a et b sont des réels tels que $a < b$.

- Si x est un réel, on définit :
$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z}\,,\, k \leq x\} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z}\,,\, x \leq k\}$$

- p est un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

- ζ est la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\zeta(x) = (x+1)\ln(x+1).$$

- Φ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

- $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p, ce que l'on note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Résultats préliminaires

1 ▷ Rappeler la formule de Stirling. En déduire l'existence d'une suite réelle $(\epsilon_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que :
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \epsilon_n).$$

2 ▷ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Démontrer que :
$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x \quad \text{et} \quad \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda x.$$

3 ▷ Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$ converge.

4 ▷ Démontrer que :

$$\zeta(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Étude asymptotique d'une suite

Dans cette partie, si $n \in \mathbf{N}^*$, on note x_n le nombre entier $\lceil np - q \rceil$ et p_n le réel $P(X_n = x_n)$.

5 ▷ Justifier que p_n est le plus grand élément de $\{P(X_n = k)\,,\, k \in [\![0, n]\!]\}$.

6 ▷ Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - x_n) = +\infty$.

Établir alors :

$$\sqrt{n\,p\,q}\,p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}}.$$

7 ▷ Montrer que, pour tout entier $n > \max\left\{\dfrac{p}{q}, \dfrac{q}{p}\right\}$:

$$\frac{n^n\,p^{x_n}\,q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right)-nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}.$$

8 ▷ Montrer que la suite $\left(\sqrt{n\,p\,q}\,p_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

Convergence en loi

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,p\,q}}(X_n - n\,p)$ et on définit les réels $\tau_{n,k}$ par la relation :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \tau_{n,k} = \frac{k - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}.$$

9 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la loi de Y_n et vérifier que Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10 ▷ Justifier l'existence d'un élément $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\text{pour tout entier } n \geq N, \quad [a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}} \leq b - a.$$

On définit les suites $(k_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante : pour tout $n \in N^*$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}\, t + np \rfloor, \quad e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)}, \quad f_n(t) = \sqrt{n\,p\,q}\, P(Y_n = e_n(t)).$$

11 ▷ Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, e_n est une fonction en escalier croissante vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction e que l'on précisera.

12 ▷ Montrer que :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis vérifier que

$$P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

13 ▷ Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$f_n(\tau_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k\,(n-k)}}\, \frac{p^k\, q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}\, \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})},$$

où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est la suite définie à la question 1.

14 ▷ Justifier que, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\sqrt{\frac{p\,q\,n^2}{k_n(t)\,(n-k_n(t))}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_{k_n(t)})(1+\epsilon_{n-k_n(t)})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

15 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $\max\left\{\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right\} \times |\tau_{n,k}| < 1$:

$$\frac{p^k\, q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}.$$

16 ▷ Démontrer que :

$$\frac{p^{k_n(t)}\, q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

17 ▷ En conclure que :

$$\forall\, t \in [a,b],\ f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(t),$$

puis que :

$$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

18 ▷ Déduire de tout ce qui précède que :

$$P\big(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t,$$

puis que :

$$P\big(a \leq Y_n \leq b\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\mathrm{d}t.$$

Applications

19 ▷ Montrer que :

$$\forall\, T \in \mathbf{R}_+^*,\ \int_{-T}^{T} \Phi(t)\mathrm{d}t \geq 1 - \frac{1}{T^2},$$

puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\mathrm{d}t$.

20 ▷ Les suites $\big(P(Y_n \leq b)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\big(P(Y_n \geq a)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ? En préciser les limites éventuelles.

Généralisation

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

21 ▷ Montrer que, si $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, il existe une unique fonction Ψ continue sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\text{pour tout } (\alpha,\beta) \in \overline{\mathbf{R}}^2,\ \text{si } \alpha \leq \beta,\ \text{ alors } P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\alpha^\beta \Psi(t)\mathrm{d}t,$$

où $\overline{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble constitué des réels, de $-\infty$ et de $+\infty$.

Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$?

Fin du problème