

I-Généralités sur les espaces nilpotents

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u^k)^p = (u^p)^k = 0$, d'où $u^k \in \mathcal{N}(E)$ et $Sp(u^k) = \{0\}$ et par suite $tr(u^k) = 0$.
2. • Soit $f \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $\chi_f = X^n$, donc par théorème de Cayley-Hamilton, $f^n = 0$, donc $f \in \mathcal{N}$.
 • L'endomorphisme nul est de matrice nulle dans la base \mathbf{B} , donc appartient à $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$.
 • Soit $f, g \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $A = Mat_{\mathbf{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathbf{B}}(g)$ sont triangulaires supérieures strictes, donc pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous (i, j) tel que $i \geq j$, $(Mat_{\mathbf{B}}(f + \alpha g))_{i,j} = (Mat_{\mathbf{B}}(f))_{i,j} + \alpha (Mat_{\mathbf{B}}(g))_{i,j} = 0$, donc $Mat_{\mathbf{B}}(f + \alpha g) \in T_n^{++}(\mathbb{R})$.
 On conclut que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un s-ev nilpotent.

• $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est isomorphe à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, donc de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $\nu(u)$ le nilindice de $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, alors $u \in \mathcal{N}(E)$, donc $\chi_u = X^n$ ce qui entraîne que $u^n = 0$ et par suite $\nu_u \in [[1, n]]$, d'où les inclusions $\{\nu(u) / u \in \mathcal{N}\} \subset \{\nu(u) / u \in \mathcal{N}(E)\} \subset [[1, n]]$.
 Soit $k \in [[1, n]]$ et notons $\mathbf{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, alors l'endomorphisme u définit dans la base \mathbf{B} par $u(e_j) = 0$ pour $j \in [[1, n-k+1]]$ et $u(e_j) = e_{j-n+k-1}$ pour $j \in [[n-k+2, n]]$ est d'indice de nilpotence $\nu_u = k$ et $u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}$, donc $k \in \{\nu_u / u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\}$, ce qui assure l'égalité entre ces ensembles.

4. • Supposons que la famille est liée, alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ non nulle tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$

et considérons $j = \min\{k \in [[0, p-1]] / \alpha_k \neq 0\}$, alors $\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et en composant $p-1-j$ fois par u , on obtient $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.

• Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \beta_{q-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, alors en composant par u^q , on obtient $\alpha_0 u^q(x) + \alpha_1 u^{q+1}(x) + \dots + \alpha_{r-1} u^{p-1}(x) = 0$ où on a posé $r = p - q \geq 0$.

La liberté de la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ exige que $\alpha_0 = \dots = \alpha_{r-1} = 0$.

On obtient donc $\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, et en composant successivement par $u^{q-1}, u^{q-2}, \dots, u$, on aura successivement $\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_0 u^{q-1}(y) = 0, \dots, \alpha_{p-2} u^{p-1}(x) + \beta_{q-2} u^{q-1}(y) = 0$ et la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ entrainera $(\alpha_r, \beta_0) = \dots = (\alpha_{p-2}, \beta_{q-2}) = (0, 0)$ et finalement $\alpha_{p-1} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$, donc $(\alpha_{p-1}, \beta_{q-1}) = (0, 0)$.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice $p \geq n - 1$.

• Si $p = n$, alors $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & (O) \\ 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ (O) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est clair que $Im(u) = Vect(u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, $Ker(u) = Vect(u^{n-1}(x))$ et $Im(u^{n-1}) = Vect(u^{n-1}(x))$ et on a bien le résultat attendu.

• Si $p = n-1$, alors $(x, u(x), \dots, u^{n-2}(x))$ est libre, on la complète en une base de E , $\mathbf{B}' = (x, u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$, alors $u^{n-1}(y) = 0$ et d'après la question précédente, $(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y))$ est liée, si non on aura $\mathbf{B}' \cup \{y, u(y)\}$ libre avec un cardinal $\geq n + 1$.

• $Im(u) = Vect(u(x), \dots, u^{n-2}(x), u(y))$, $Ker(u) \subset Vect(u^{n-2}(x), y)$ et $Im(u^{n-2}) = Vect(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y)) = Vect(u^{n-2}(x))$.

Or $dim(Ker(u)) \in \{1, 2\}$.

- Si $y \in Ker(u)$, $u(y) = 0$, donc par liberté de $(u(x), \dots, u^{n-2}(x), y)$, $y \notin Im(u)$, donc $Im(u) \cap Ker(u) = Vect(u^{n-2}(x)) = Im(u^{n-2})$.

- Si $y \notin Ker(u)$, alors $Ker(u) = Vect(u^{n-2}(x))$.

II-Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien)

6. • Pour tout $z \in E$, $a, b \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $((a + \alpha b) \otimes x)(z) = (a + \alpha b|z).x = (a|z).x + \alpha(b|z).x = (a \otimes x)(z) + \alpha(b \otimes x)(z) = ((a \otimes x + \alpha b \otimes x))(z)$.
- Notons $\varphi : E \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$.
- Soit $a \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\forall z \in E, \varphi(a)(z) = (a|z).x = 0$, or $x \neq 0$, donc avec $z = a$, on obtient $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui assure l'injectivité de φ .
- $\forall a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$ est linéaire et $\text{Im}(\varphi(a)) \subset \text{Vect}(x)$, donc $\text{Im}(\varphi) \subset \{u \in \mathcal{L}(E) / \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$.
- Complétons x en une base de E , $\mathbf{B}' = (x, e_2, \dots, e_n)$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)$ si, et seulement si, la matrice de u dans cette base est de la forme
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
- donc $\dim\{u \in \mathcal{L}(E) / \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\} = n = \dim(E)$, ce qui entraîne que φ est bijective de E vers $\{u \in \mathcal{L}(E) / \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$.
7. $(a \otimes x)(x) = (a|x).x$, donc en choisissant la base précédente \mathbf{B}' , on aura $\text{Tr}(a \otimes x) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathbf{B}'}(a \otimes x)) = a_1 = (a|x)$.

III- Deux lemmes

8. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $k = 1$, $(u + tv)^1 = u + tv = t^0 u + t^1 v$, donc $f_0^{(1)} = u, f_1^{(1)} = v$.
- Supposons qu'on a le résultat pour un certain $k \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, (u + tv)^{k+1} &= (u + tv)^k (u + tv) = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} (u + tv) = \sum_{i=0}^k (t^i f_i^{(k)} u + t^{i+1} f_i^{(k)} v) = \\ &= \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k+1} t^i f_{i-1}^{(k)} v = f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^k t^i (f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v) + t^{k+1} f_k^{(k)} v. \end{aligned}$$

ce qui donne $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u, f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} v$ et pour $i \in [[1, k]]$, $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v$.

Cette récurrence assure l'existence et l'unicité.

Toujours par récurrence.

- $f_0^{(1)} = u$, et si $f_0^{(k)} = u^k$, alors $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u = u^k u = u^{k+1}$.
- $f_1^{(1)} = v$ et si $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors $f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)} u + f_0^{(k)} v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v = \sum_{i=0}^k u^i v u^{k-i}$.

9. $u, v \in \mathcal{V}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, u + tv \in \mathcal{V}$, donc $u + tv$ est nilpotent et par suite $(u + tv)^p = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi $t \mapsto (u + tv)^p$ est une fonction polynômiale vectorielle nulle, donc les $f_i^{(p)}$ sont nuls, en particulier $f_1^{(p)} = 0$.
10. Par linéarité de la trace, on obtient

$$\text{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^i v u^{k-i}) = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^k v) = (k+1) \text{tr}(u^k v).$$

$u + tv$ est nilpotent, donc aussi pour $(u + tv)^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$0 = \text{tr}((u + tv)^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \text{tr}(f_i^{(k+1)}), \text{ il s'agit d'une fonction polynômiale nulle, donc } \forall k \in \mathbb{N} \text{ tr}(f_i^{(k+1)}) = 0, \text{ c'est à dire } \text{tr}(u^k v) = 0, \text{ ce qui valide le lemme A.}$$

11. $\mathcal{V}^* = \{x \in E / \exists u \in \mathcal{V}, x \in \text{Im}(u^{p-1})\}$.

$f_1^{(p-1)}(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((u + tv)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left((u + tv)^{p-1} \left(\frac{1}{t} y \right) - u^{(p-1)} \left(\frac{1}{t} y \right) \right)$, donc $f_1^{(p-1)}(y)$ est limite d'une fonction à valeurs dans $K(\mathcal{V})$ qui est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

$$\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0, \text{ donc } \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1},$$

$$\text{et par suite } u f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1}, \text{ donc } u \left(f_1^{(p-1)}(y) \right) = -v \left(u^{p-1}(y) \right).$$

On en déduit que $\forall x \in \text{Im}(u^{p-1}), \exists y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$, donc $v(x) = v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)) \in u(K(\mathcal{V}))$ vu que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

12. D'après la question 11., $\forall x \in \text{Im}(u^{p-1}), v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, c'est à dire $\forall x \in \text{Im}(u^{p-1}), \mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V}))$.
- On remarque que $u(\text{Vect}(x)) = \{0\}$, donc $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + u(K(\mathcal{V})) \subset \text{Vect}(x) + u^2(K(\mathcal{V})) \subset \dots \subset \text{Vect}(x) + u^k(K(\mathcal{V}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}, y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
 - Pour $k = p, y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in \text{Vect}(x)$, donc $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$.
 - De l'inclusion précédente, on aura $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V})) \subset (\text{Vect}(x)) \subset \{0\}$, donc $\mathcal{V}x = \{0\}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13. On considère l'applications linéaire $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow E$. $\mathcal{V}x = \text{Im}(\varphi), \mathcal{W} = \text{Ker}(\varphi)$.
- $$v \longmapsto v(x)$$
- On considère l'application linéaire $\psi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$. $\bar{\mathcal{V}} = \text{Im}(\psi), \mathcal{Z} = \text{Ker}(\psi)$.
- $$u \longmapsto \bar{u}$$
14. On applique le théorème du rang aux applications φ et ψ , on obtient $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{V}x)$ et $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\bar{\mathcal{V}})$, ce qui donne l'égalité $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\bar{\mathcal{V}})$.
15. • $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} / \bar{u} = 0\}$, or $\bar{u} = 0$ si, et seulement si, $\forall z \in H, \bar{u}(z) = \pi(u(z)) = 0$ si, et seulement si, $\forall z \in H, u(z) \in \text{Vect}(x)$ si, et seulement si, $u(H) \subset \text{Vect}(x)$.
Donc $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} / u(H) \subset \text{Vect}(x)\}$, or d'après la question 6, l'application $a \longmapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E dans $\{u \in \mathcal{L}(E), / \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$, donc pour chaque $u \in \mathcal{W}$ tel que $u(H) \subset \text{Vect}(x)$, notons L le sous-espace de E image réciproque de \mathcal{Z} par cette application, alors $\mathcal{Z} = \{a \otimes x / a \in L\}$, et \mathcal{Z} et L sont isomorphes, donc $\dim(\mathcal{Z}) = \dim(L)$.
- $\forall a \in L, a \otimes x \in \mathcal{Z}$, donc nilpotente et par suite grâce à la question 7, $\text{tr}(a \otimes x) = (a|x) = 0$, donc $x \in L^\perp$.
16. • Soit $v \in \mathcal{V}$. Montrons que $v(x) \in L^\perp$.
Soit $a \in L$, alors $\forall z \in E, (a \otimes v(x))(z) = (a|z).v(x) = v((a|z)x) = v((a \otimes x)(z)) = (v \circ (a \otimes x))(z)$, donc $a \otimes v(x) = v \circ (a \otimes x)$, en appliquant le lemme A avec $k = 1$, on obtient $\text{tr}(v \circ (a \otimes x)) = \text{tr}(a \otimes v(x)) = (a|v(x)) = 0$, donc $v(x) \in L^\perp$.
 $x \in L^\perp, u \in \mathcal{V}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k \in \mathcal{V}$, et vu que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, on aura $u^k(x) \in L^\perp$.
17. • S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = u(x)$, donc $\lambda \in \text{Sp}(u)$, mais u est nilpotent, donc $\lambda = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$.
- D'après les deux questions précédentes $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ et $\text{Vect}(x) \subset L^\perp$ et $\text{Vect}(x)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}x$, donc l'inclusion $\mathcal{V}x \subset L^\perp$ est stricte, d'où $\dim(\mathcal{V}x) < \dim(L^\perp)$ et par suite $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) < \dim(L^\perp) + \dim(L) = n$, c'est à dire $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) \leq n - 1$.
18. π est la projection orthogonal sur H , donc $\forall z \in H, \pi(z) = z$, donc $\bar{u}^0(z) = z = \pi(u^0(z))$.
Supposons que $\forall z \in H, \bar{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
On fait la remarque suivante : Tout $z \in E$ se décompose par $z = \alpha x + y$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in H$, alors pour tout $u \in \mathcal{W}, u(x) = 0$, donc $u(z) = u(y)$ et $\pi(z) = y$ et par suite $u(\pi(z)) = u(y) = u(z)$.
Alors $\forall z \in H, \bar{u}^{k+1}(z) = \bar{u}(\bar{u}^k(z)) = \bar{u}(\pi(u^k(z))) = \bar{u}(u^k(z)) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z))$, ce qui achève la récurrence.
- Soit $u \in \mathcal{W}, u$ étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, donc $\bar{u}^k = \pi \circ u^k = 0$, donc $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent.
19. $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ nilpotent et $\dim(H) = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence,
 $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc avec l'égalité de la question 14 et l'inégalité de la question 17, on obtient
 $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) + \dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
20. • De l'inégalité de la question 17 et l'égalité de la question 14, on tire $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, or par hypothèse de récurrence $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc $\dim(\bar{\mathcal{V}}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
- Avec ces résultats, l'égalité de la question 14 entraîne que, $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n - 1$, donc $\dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n$.
 - On a les inclusions entre sous-espaces, $\text{Vect}(x) \subset L^\perp$ et $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, donc $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp$, de plus on a égalité de dimensions, donc $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^\perp$.
 - D'après la question 16, pour tout $v \in \mathcal{V}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}, v^k(x) \in L^\perp$, donc $v^k(x) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

21. • d'après la question 18, $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$ de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $\dim(H) = n-1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base \mathbf{B}' de H tel que pour tout $v \in \mathcal{W}$, $\text{Mat}_{\mathbf{B}'}(\bar{v})$ est triangulaire supérieure stricte. Soit $v \in \mathcal{L}(H)$ de matrice dans la base \mathbf{B}' de taille $n-1$, est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (O) \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (O) & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

alors $v^{n-2} \neq 0$.

• Considérons $u \in \mathcal{V}$ dont la restriction à H est égal à v , alors $u^{n-2} \neq 0$, donc le nilindice générique de \mathcal{V} est supérieur ou égale à $n-1$.

• Si $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$.

On considère la base de E , $\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cup \{x\}$, alors tout élément $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

22. • Si $v^{p-1} = 0$, alors $\text{Im}(v^{p-1}) = \{0\} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
 • Si $v^{p-1} \neq 0$, alors le nilindice de v est $p \geq n-1$, donc d'après la question 5, $\text{Im}(v^{p-1}) = \text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v)$ et $\dim(v^{p-1}) = 1$.
 $v(x) \neq 0$, considérons $j = \max\{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / v^k(x) \neq 0\}$.
 Alors $v^{j+1}(x) = 0$, donc $v^j(x) \in \text{Im}(v) \cap \text{Ker}(v) = \text{Im}(v^{p-1})$ et par suite $\text{Im}(v^{p-1}) = \text{Vect}(v^j(x))$, et par la question 20, $v^j(x) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23. $v_0(x) \neq 0$, donc $\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\pi_j(v_0(x)) = (v_0(x))_j \neq 0$ où π_j la j -ième projection qui envoie la j -ième composante d'un vecteur de E dans une base fixée.

Soit $z \in E$. Considérons une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ nulle sur $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, et la fonction polynômiale

$P : t \mapsto \pi_j((v + tv_0)(x)) \cdot \varphi((v + tv_0)^{p-1}(z))$ de degré $\leq p$.

D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$,

$\forall z \in E$, $(v + tv_0)^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$, donc P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Or $\pi_j(v_0(x)) \neq 0$, donc $t \mapsto \pi_j((v + tv_0)(x))$ est non nul, ce qui exige $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi((v + tv_0)^{p-1}(z)) = 0$, en particulier pour $t = 0$, $\varphi(v^{p-1}(z)) = 0$, ceci pour toute forme φ nulle sur $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, en particulier pour les projections qui envoient un vecteur sur les composantes dans $(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^\perp$, on obtient $v^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraîne que $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. On vient de montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$

et par suite $K(\mathcal{V}) = \text{Vect}\left(\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \text{Im}(v^{p-1})\right) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraîne par le lemme **B**, que $\mathcal{V}x = \{0\}$

et par la question 21, il existe une base de E dans laquelle tout $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire stricte.